INTRODUCTION TO
SUPERSTRINGS AND M-THEORY

超弦理論と
M理論

ミチオ・カク 著
太田信義 訳

Springer
シュプリンガー・ジャパン

Translation from the English language edition:
Introduction to Superstrings and M-Theory **by Michio Kaku**

本書の原書の初版 “Introduction to Superstrings” の日本語訳は『超弦理論』として 1989 年にシュプリンガー・フェアラーク東京株式会社より出版されました.

序

あなたの理論が気ちがいじみていることでは，皆一致している．
一致していないのは，それが十分気ちがいじみているかどうかだ．
ニールス・ボーア（Niels Bohr）

超弦理論（あるいはその最近の定式化であるM理論）は，現在知られているすべての相互作用の量子論として，もっとも有望な候補として現れてきた．過去50年もの間解けなかった問題，すなわち，今世紀の偉大な2つの基本的物理の理論である場の量子論と一般相対論の統一という問題を，超弦は明らかに解決するように思われる．この超弦理論は，理論物理学にまったく新しい物理的描像を導入すると同時に，数学者をも驚かすような新しい数学を用いる．

皮肉なことに，超弦理論は宇宙の統一場の理論を与えているはずなのに，理論そのものは民間伝承とでもいうべき経験的規則や直観のこんがらがった集まりのように思われることがよくある．これは，超弦理論の発展が他のいかなる理論，たとえば幾何学と作用から出発し，のちに量子論へ発展していった一般相対論などとも異なっていることによる．他の理論とは対照的に，超弦理論は過去30年の間後ろむきに発展してきたといえよう．それは，G. Venezianoと鈴木（M. Suzuki）が1968年に気付いた，量子論の中の本当に偶然の発見に始まる変わった経歴をもっているのである．

古い数学の本をパラパラとめくっているうちに，彼らは，数学者オイラー（Leonhard Euler）が前世紀に書きおろしたベータ関数を偶然見つけたのである．驚いたことに，このベータ関数が粒子の相互作用を記述する散乱行列のみたすべき条件をほとんどすべて満たすことを彼らは見出した．物理の歴史で，このような偶然によって重要な科学的発見がされたことはないといえるであろう．

歴史のこの偶然のために，それ以来物理学者はこの理論にひそむ物理的原理と対称性を見抜くべく研究を行ってきた．アインシュタインの一般相対論では，幾何学的原理である等価原理から出発して作用を導けるのであるが，超弦理論では，その基礎をなす基本的な物理的および幾何学的原理は未だにわかっていない．

こういう事情が生んだ混乱を小さくするために，この本では3つの主題を強調した．超弦理論のしっかりした基礎を与えるために，まず**Feynmanの経路積分**の方法を強調した．これはこの理論を議論するのにもっとも有力な方法である．経路積分は理論物理学者には欠くべからざる手法であり，特にゲージ理論を量子化する場合に必要である．したがってこの本の第1章では，点粒子の場合の経路積分の方法を述べた．

この本の第2の主題は，**第2量子化**の方法である．伝統的に場の理論は，第2量子化した理論として定式化されるのに反し，超弦理論は主に第1量子化した理論として定式化されており，初学者に多くの概念的な問題を生じさせている．すべての規則が1つの作用から導出できる第2量子化の方法と違って，第1量子化の方法では数多くの他の規則や約束事をつけ加えなければならない．これに対し第2量子化した理論では，理論全体の基礎である幾何学が明らかになると期待できるのである．

この本の第3の主題は，デュアリティーであり，これにより弦理論の定式化の仕方が大きく変化した．マクスウェル理論で初めて見つかったデュアリティーにより，2つの一見異なる理論が同等であることが示せる．デュアリティーを使えば，10次元の異なる5つの超弦理論が11次元の1つの理論，M理論に統一されることが示せる．このM理論はまだよくわかっていないが，その低エネルギーの極限は11次元超重力になる．デュアリティーによって弱結合の理論と強結合の理論の同等性が示せるので，初めて弦理論の非摂動的な領域を調べることができ，そこではいろいろな新しい物体，メンブレイン，Mブレイン，Dブレインなどがあることがわかった．M理論の完全な作用はまだわかっていないが，これにより弦理論の強結合での振る舞いに関するたくさんの情報が得られている．

今や弦はいろいろな次元のブレインと共存していることがわかった．最終的には理論はおそらく何らかのブレインによる11次元の完全な理論として書かれることになるであろう．皮肉なことにM理論の作用はわかっていないが，デュアリティーによるいろいろな無矛盾性のチェックにより，物理学者はこの理論が存在すると信じている．(しかしM理論そのものはこのようにあいまいな理論であるので，この理論のことをまだ超弦理論という名で呼ぶことにする.)

学生に経路積分と場の理論のしっかりした基礎を与える他に，この本の別の目的として，超弦理論の最近の発展を知らせることがある．理論的研究で，現在もっとも活発に研究されている分野としては，

- 弦の場の理論
- 共形場の理論
- Kac-Moody代数
- 多重ループ振幅とタイヒミュラー空間
- Calabi-Yau現象論
- オービフォールドと4次元の超弦

などがある．

この本の目標は，研究者に概観を提供し，それにより弦理論の研究分野を知らせ，さらには独創的研究もできるようにすることである．この本を読むのに必要な予備知識は，量子力学をある程度知っていることである．しかし超弦理論に使う数学は，かなり高度なものである．そこでリー群，一般相対論，超対称性，超重力理論などの高度な数学概念への導入として，付録に短い入門をつけた．これにより，これらを知らない者にも理解できるように配慮した．

読者に，この本をどう読むかを述べておこう．第I部は，1–5章から成り，第1量子化の結果を与えている．これは次の章への重要な基礎であり，省くことはできない．しか

し第 1 章は，ふつうの量子場の理論の方法，例えば，ゲージ不変性や Faddeev-Popov 量子化などに比較的習熟している者は省略してもよい．(しかし，経路積分の方法はこの本の基礎をなしているので，すでによく勉強している者にとっても第 1 章を復習すれば有益と思われる.)

第 2, 3 章は，弦理論への初歩的入門の中核をなすものである．しかし第 4 章は，弦理論の概観のみ知りたい者は省略してよい．フェルミオンの頂点関数とゴーストの例外もあるが，弦理論の大部分の結果は共形場の理論を使わずに第 2, 3 章の結果を用いて得ることができるので，初学者はこの章を無視してもよいからである．(しかし，第 1 量子化した弦理論を扱うもっとも現代的な手法は，共形場の理論の結果を用いるものである．この手法が，もっとも有力な手法だからである．したがって，弦理論を真面目に勉強しようとする者は，第 4 章の結果に十分習熟しなければならない.)

第 5 章は，理論の発散が奇跡的に相殺するのを理解するのに本質的な所である．この性質が，弦理論と他のすべての場の理論が異なる点である．多重ループ振幅を記述する場合に，保型関数(automorphic function)の理論はかなり難しくなるので，初学者は高次ループの議論は省略してもよい．しかし真剣に勉強する者には，多重ループ振幅が活発な研究分野であることがわかるであろう．

第 II 部は，弦の場の理論の議論であり，第 III 部は現象論を扱う．これらの 2 つの部分は，順序を入れかえてもさしつかえない．各部はお互いに独立になるように書いてあるので，現象論に興味の強い者は，直接第 III 部へ進んでも何らさしつかえない．

第 II 部の 6–7 章は，弦の場の理論の 3 つの方法の発展を与えている．第 6 章は，最初の光錐理論と，弦に基づいた多重ループ理論を量子化する方法を議論している．しかし第 7 章は，比較的それ自身で完結するように書いてあるので，真剣にやる者は第 6 章を省略して直接共変な理論へ進んでもよい．

第 III 部では，初学者は第 8 章を省略してよい．アノーマリーの議論はかなり技術的であり，主に点粒子の場合の話であって，他の本にある議論と重複しているからである．第 9 章は，いろいろな超弦理論のうちもっとも有望なものを述べているので，省略はできない．同様に第 10 章は，超弦理論が実験データと最終的にどう結びつくかを理解するのに重要な部分である．

第 IV 部では，デュアリティーと M 理論を議論する．第 11 章では M 理論の基本的な記述を行い，知られている 5 つの理論が 1 つの理論によって表されることを見る．第 12 章では $D=8,6,4$ 次元のデュアリティーの関係を調べ，弦理論の非摂動的な領域を初めて見る．第 13 章では D ブレインの物理，行列模型，D ブレインのブラックホールへの応用などの進んだ話題を調べる．

著者は，以上が初学者にもより進んだ学生にも，この本をどのように読むかを決めるのに役立つよう希望している．

ミチオ・カク

謝　辞

この本全体にわたって多くの有益なコメントをし，それによりいくつかの重要な所で書き方および内容の改良に役立ってくれた L. Alvarez-Gaumé 博士に感謝する．M. Dine, S. Samuel, J. Lykken, O. Lechtenfeld, I. Ichinose, D.-X. Li および A. Das の諸博士も，原稿を読み，この本に取り入れることになった多くの役立つ批評をしてくれた．D. O. Vona 博士には，原稿全体を注意深く読み，それをよくするのに役立つ重要な指摘をしていただいた．

特に，B. Sakita 博士と J. Birman 博士およびニューヨーク市立大学の物理学教室の教官と学生には，この原稿を書いている間ずっと激励および支持をうけたことに深く感謝したい．それがなければ，この本を書くことはできなかったと思う．また，National Science Foundation と CUNY-FRAP プログラムからの援助にも感謝する．

ミチオ・カク

日本語第1版への序

“Introduction to Superstring” の日本語版をここに紹介するのは，大きな喜びです．超弦理論は，知られているすべての相互作用を1つの包括的な理論に統一すると考えられており，その点で物理学のすべての理論の中でも特別なものです．そのため，超弦理論は世界中の物理学者と数学者の想像をかき立てており，したがってそれをできるだけ多くの読者に提供することがよいと思われます．

もちろん，超弦理論は多くの科学者の努力の賜です．しかしながら，私はこの本の日本語版を，この理論全体の基礎をかためるのに顕著な役割りを果たした多くの日本の科学者に捧げたい．それらは，南部陽一郎，崎田文二，吉川圭二，鈴木真彦，および故後藤鉄男，木庭二郎の各氏，そしてその他の多くのすぐれた物理学者たちです．これらの人々の先駆的仕事により，ボゾン的弦，超対称性，摂動論，散乱振幅，Riemann 面上の経路積分，そして弦の場の理論が発見されたのです．彼らの数多くの貢献がなければ，超弦理論など考えられなかったことでしょう．

また，Springer-Verlag の編集者と，特に太田信義氏に，この本を日本語へ辛抱強く翻訳してくれたことに対し感謝したい．彼は，多くの点でこの本の説明の仕方を改良してくれ，誤りを修正してくれました．

この日本語版が，新しい世代の日本の研究を教育し鼓舞するのに役立つことを望んでやみません．

1989年7月 ニューヨークにて　　　　ミチオ・カク

日本語第2版への序

量子論の建設者の一人であるパウリ(Wolfgang Pauli)は，対抗理論をやりこめることで有名である．理論を批判する際に,「間違ってさえもいない.」というのが常だった．彼はおそらくその対抗理論が薄っぺらでひ弱で内容がないので間違っていると考えられる価値さえもないというつもりだったのであろう．

(皮肉なことにハイゼンベルグ(Werner Heisenberg)とパウリは，アインシュタインの導きにより，すべての量子的力を統一する統一場の理論を提唱した．今日ハイゼンベルグ-パウリの理論は実は間違っている，すなわちそれはくりこみ可能ではなく知られている原子内の粒子を記述できないことがわかっている．ダイソン(Freeman Dyson)はかつて，統一場の理論への道は失敗の試みの残骸が散乱していると述べている.)

しかしパウリが今日生きていて超弦理論を見たならば，超弦理論が彼の試験に合格したと結論すると思う．それは考慮に値する本物の理論である．この理論が豊かで，強力であり，深遠であることに驚いたであろう．すべての理論が万物の理論の主要な(そして唯一の)候補であるというわけにはいかない．さらにこの理論は過去 30 年の間に受けたすべての挑戦をうち負かしているのである．

しかしこの理論について特筆するべき点は，われわれがまだこの理論の基本的原理を分離していないことである．まるで蝶が蛹を脱皮するように，10 年程度ごとにこの理論は変態しているのである．60 年代後半と 70 年代前半には，これは双対共鳴模型と呼ばれていた．それから 80 年代に超弦理論と呼ばれるようになった．超弦理論が今度は M 理論として今まさに第 3 の変身をしていることは，その強力さと幅の広さを実証するものである．さらに物理学の歴史の中で，これほど謎の理論にお目にかかったことはない．それはまだ不明の核心の原理を明らかにするために幾層ものロシア人形をはがすようなものである．

しかし M 理論のもっとも驚くべきことは，11 次元では量子場の理論が 4 次元よりもある意味で取り扱いやすいという点である．たとえば QCD では，非摂動的領域を探ろうとする過去 20 年以上の勇敢な試みもあまり成功していない．陽子の質量はまだ QCD で計算できない．しかし 11 次元のデュアリティーは非常に強力で，これにより超弦理論の非摂動的領域を初めて探ることができるようになった．これによりさらに，いつかは超弦理論の本当の真空を記述することができ，理論を実験と比較することができると期待できる．理論の本当の真空がわかれば，この理論が本当に万物の理論であるか(あるいは，非常に格調の高い無の理論か)どうかにはっきりと答えること

ができる.

残念ながら，弦理論が扱う目もくらむばかりの多くの内容のために，初学者が理論全体を把握することは非常に難しい．そこでこの本の目的は，1巻だけで共鳴散乱を記述するその起源から現在のデュアリティーを明らかにする研究までの3つの変貌のすべての段階をたどって，理論全体の主要な側面を紹介することにある．読者はいろいろな話題についてのたくさんの複雑な論文を読まなくても，この本で理論全体を理解することができるであろう．

私は大阪大学の太田信義博士がこの本を日本語に翻訳してくれ，若くて能力のある日本の物理学者の新しい世代がこの理論を知るようにしてくれたことに感謝します．彼はこの本を忠実に訳し，誤りがあるときはそれらをなおしてさえくれました．太田博士自身この分野に重要な寄与をした指導的超弦理論の研究者なので，彼が時を経ても残るような本を作り出してくれたと固く信じています．彼に厚く感謝します．ひょっとすると太田博士の翻訳を読んだ若い日本の物理学者が，理論を完成しようと思い立ち，理論の本当の真空をみつけてくれるかもしれません．それにより，ギリシア人たちが人類が自然の統一的秘密を理解できるかと問うて以来の2000年来の古い夢が完成するかもしれません．

2000年6月 ニューヨークにて　　ミチオ カク

第1版への訳者まえがき

本書は，Michio Kaku (加来道雄) 著 “Introduction to Superstrings” (Springer-Verlag, 1988) の翻訳である．原著は，同社から刊行されている “Graduate Texts in Contemporary Physics” の1冊として出版されたものであるが，その内容から，日本語として訳出されればさらに利用価値が高まるであろうとの意見があり，吉川圭二大阪大学教授より訳者に勧められたものである．

著者は，その名前からもわかるように日系の3世である．祖父の世代がアメリカ合衆国に移住し，両親はともに合衆国生まれであるが，(別々に) 日本で10代まで教育をうけ再び合衆国へ渡ったということである．著者自身は，戦後合衆国で生まれ，ハーバード大学を卒業後，大学院をカリフォルニア大学バークレー校で学び，現在はニューヨーク市立大学の物理学の教授である．弦理論の提唱された1960年代後半に，彼はちょうど大学院に入り，本書でもたびたび登場する S. Mandelstam のもとで，弦理論の研究を始め，以後この分野で活発に研究を続けている．特に，光錐ゲージの弦の場の理論を吉川圭二教授とともに提唱したことで知られている．よく来日するので旧知の人も多いが，著者の素顔は，大変気さくで話も大変うまい人である．

本書の内容については，著者の序文にも詳しく述べてあるので，ここに特にくり返す必要はなかろう．全体としては，あまり専門知識を仮定しないで，初歩から超弦理論とはどんなものかが理解できるように書かれているといえる．しかし，カバーしている内容はきわめて広範囲であり，現在の素粒子論のごく最近の話題まで理解できるようになっているのは驚きである．欲をいえば，共形場の理論と Kac-Moody 代数は，現在の素粒子論の重要な流れとなりつつあるので，もう少し詳しい方がよいと思われる．しかし，そのためには，もう1冊本が必要ということにもなりかねないので，仕方のないことであろう．幸いなことに，各々の章には多くの参考文献がつけてあるので，これによってさらに勉強することができるようになっている．

弦理論の教科書として比較し得るのは，今の所 M. Green, J. Schwarz and E. Witten, “Superstring Theory 1, 2” (Cambridge University Press, 1987) しかないが，これはどちらかというと専門家向けであり，弦理論全体を学び，さらに研究への足がかりをつくるという点では，本書の方が成功していると思う．全体の長さが半分 (1巻のみ) であるにもかかわらず，多重ループ振幅，Kac-Moody 代数，弦の場の理論など，こちらでしかカバーしていない話題がかなりある．といって，記述が飛躍しているわけでもなく，わかりやすく述べられている．ただ本書では，著者の専門分野を反映して，

第2量子化の手法が非常に強調されており，この点は訳者にも異論がないわけではない．特に，第8章の内容については，まだ発展途上で完成しておらず，今後どうなるかは今のところ未知数である．しかし，現在の超弦理論の情況は，これこそ決定版と言えるような定式化がないので，これも1つのやり方として意味のあるものと思われる．弦理論のかかえる問題点なども指摘されているので，今後の進むべき方向を考えてみるのにも役立つかもしれない．全体としては，著者の意図がわかりやすく述べられていて，ある程度の批判精神をもって読めば，これから弦理論を勉強する人にも，勉強中の人にも，結構役に立つ本だと思われる．

なお翻訳にあたっては，次のような方針をとった．

i) 原著はまだ初版であるので，式のミスプリントおよび一部に説明の誤述もあると思われた．この点に関しては，著者と話し合う機会があり，同意できたので，大方の所は翻訳で修正を行った．やむを得ず脚註にした所もいくつかあるが，煩雑をさけるためその修正を明示するのはやめた．これらのうち多くのものは，原著の第2版では修正されることになるそうである．

ii) 数学的用語は，大部分は岩波数学辞典によったが，いくつかのもの(コンフォーマル，フォームなど)は今後のことを考えて変えてみた．物理の専門用語は，できるだけよく使われるものを使うように努め，最初に出たときは英語も並記した．本書から進んで論文を読むときには必要になるからである．また，人名は片仮名表記は難しいので，原則として原語を用いたが，古くて慣用の一定しているものや，派生した言葉になっているものは片仮名で書いたものもある．これは多分に訳者の好みによるもので，他意はない．

本書の訳出を勧めていただいた吉川圭二先生，心よく質疑に応じて下さった著者，またシュプリンガー・フェアラーク東京(株)には各段階でお世話になった．心から感謝したい．

最後に，この訳書が今後の若い研究者の勉学に活用されれば望外の喜びである．

1989年11月　　　　太田 信義

第2版への訳者まえがき

今から 10 年以上も前にこの翻訳のもとになった Michio Kaku（加来道雄）著 “Introduction to Superstrings”（Springer-Verlag, 1988）が出たが，それが 10 年たった 1998 年に第 2 版 “Introduction to Superstrings and M-Theory” として改訂された．改訂の主なものは，旧版の第 8 章としてあった幾何学的な弦の場の理論の章が削られ，1995 年に端を発するデュアリティーによる弦理論の新しい発展が第 11–13 章として盛り込まれた点にある．またおそらくページ数の関係で旧版の第 9 章の Atiyah-Singer の定理の節が削られ，付録の述語集も削られた．削られた旧版の第 8 章は私の前書きでも批判した部分であったが，このたびの改訂によって内容的にはよくなったと思われる．

最近弦理論の教科書として J. Polchinski の “String Theory 1, 2”（Cambridge University Press, 1998）が刊行された．この本は弦理論を深く勉強するのにとても役立つ本であるが，専門家向けの本であって初学者や単に弦理論はどんなものかを知りたい読者には向かないであろう．これと比べたときの本書の効用は，弦理論全体の概観を得るのにいいということになると思う．

今回の翻訳改訂にあたっては，方針を前回と少し変えた．

i) 原著には古いミスプリントが直されたところが結構あるが，新たなミスプリントが入ったところもあった．今回はシュプリンガー・フェアラーク東京(株)の協力によってこれらを訂正するとともに，日本語版に残っていたミスプリントもかなり直すことができた．

ii) 数学的用語は，コンフォーマルやフォームなどは，あまり定着しないようなので，共形などの日本語に変更した．また人名もできるだけ片仮名表記とした．

今回もシュプリンガー・フェアラーク東京(株)のスタッフにいろいろお世話になった．感謝します．

2000 年 6 月　　太田 信義

目　次

第 I 部　第1量子化と経路積分

第 1 章　経路積分と点粒子　*3*

1.1　なぜ弦か？　*3*
1.2　ゲージ理論の歴史的概観　*7*
1.3　経路積分と点粒子　*17*
1.4　相対論的点粒子　*23*
1.5　第 1 と第 2 量子化　*26*
1.6　Faddeev-Popov 量子化　*28*
1.7　第 2 量子化　*31*
1.8　調和振動子　*34*
1.9　カレントと第 2 量子化　*37*
1.10　まとめ　*41*
参考文献　*44*

第 2 章　南部-後藤の弦　*47*

2.1　ボソン的弦　*47*
2.2　グプタ-ブロイラー量子化　*56*
2.3　光錐量子化　*63*
2.4　BRST 量子化　*66*
2.5　樹木　*67*
2.6　経路積分から演算子へ　*73*
2.7　射影不変性とトゥイスト　*78*
2.8　閉じた弦　*82*
2.9　ゴーストの除去　*84*
2.10　まとめ　*89*
参考文献　*94*

第 3 章　超弦理論　*95*

3.1　超対称点粒子　*95*
3.2　2 次元超対称性　*98*
3.3　樹木　*103*
3.4　局所的 2 次元超対称性　*110*
3.5　量子化　*112*
3.6　GSO 射影　*115*
3.7　超弦理論　*119*
3.8　GS 作用の光錐量子化　*121*
3.9　頂点と樹木　*126*

3.10 まとめ 128

参考文献 131

第 4 章 共形場の理論と Kac-Moody 代数 133

4. 1 共形場の理論 133

4. 2 超共形場の理論 142

4. 3 スピン場 146

4. 4 超共形ゴースト 149

4. 5 フェルミオン頂点 156

4. 6 スピノールと樹木 158

4. 7 Kac-Moody 代数 161

4. 8 超対称性 164

4. 9 まとめ 164

参考文献 166

第 5 章 多重ループとタイヒミュラー空間 169

5. 1 ユニタリー性 169

5. 2 1 ループ振幅 173

5. 3 調和振動子 176

5. 4 1 ループ超弦振幅 183

5. 5 閉じた弦のループ 185

5. 6 多重ループ振幅 189

5. 7 リーマン面とタイヒミュラー空間 199

5. 8 共形アノーマリー 205

5. 9 超弦理論 209

5.10 行列式と特異性 212

5.11 モジュライ空間とグラスマニアン 214

5.12 まとめ 224

参考文献 228

第 II 部 第 2 量子化と幾何学の探究

第 6 章 光錐の場の理論 233

6. 1 なぜ弦の場の理論か？ 233

6. 2 点粒子の場の理論の導出 236

6. 3 光錐の場の理論 239

6. 4 相互作用 245

6. 5 ノイマン関数の方法 251

6. 6 散乱振幅の同等性 255

6. 7 4 弦相互作用 257

6. 8 超弦の場の理論 262

6. 9 まとめ 267

参考文献 271

第 7 章 BRST 場の理論 273

7. 1 共変的な弦の場の理論 273

7. 2 BRST 場の理論 278

7. 3 ゲージ固定 281

7. 4 相互作用 285

7. 5 公理論的定式 289

7. 6 同等性の証明 291

7.7　閉じた弦と超弦　*297*
7.8　まとめ　*307*
参考文献　*310*

第III部　現象論と模型の構成

第8章　アノーマリーと Atiyah-Singer の定理　*315*
8.1　GUT 現象論を越えて　*315*
8.2　アノーマリーとファインマン図　*319*
8.3　汎関数形式におけるアノーマリー　*323*
8.4　アノーマリーと特性類　*325*
8.5　ディラック指数　*329*
8.6　重力およびゲージのアノーマリー　*334*
8.7　弦におけるアノーマリーの相殺　*343*
8.8　まとめ　*345*
参考文献　*348*

第9章　ヘテロティック弦とコンパクト化　*349*
9.1　コンパクト化　*349*
9.2　ヘテロティック弦　*353*
9.3　スペクトラム　*358*
9.4　共変的およびフェルミオン的定式化　*361*
9.5　樹木　*363*
9.6　1 ループ振幅　*366*
9.7　E_8 と Kac-Moody 代数　*370*
9.8　ローレンツ的格子　*372*
9.9　まとめ　*374*
参考文献　*377*

第10章　Calabi-Yau 空間とオービフォールド　*379*
10.1　Calabi-Yau 空間　*379*
10.2　de Rahm コホモロジーの概観　*384*
10.3　コホモロジーとホモロジー　*387*
10.4　Kähler 多様体　*393*
10.5　スピン接続の埋め込み　*400*
10.6　フェルミオンの世代　*402*
10.7　Wilson ライン　*406*
10.8　オービフォールド　*407*
10.9　4 次元の超弦　*411*
10.10　まとめ　*421*
参考文献　*425*

第IV部　M 理論

第11章　M 理論とデュアリティー　*429*
11.1　はじめに　*429*
11.2　物理学におけるデュアリティー　*430*
11.3　なぜ 5 つの弦理論があるのか？　*431*
11.4　T デュアリティー　*434*
11.5　S デュアリティー　*436*
11.6　まとめ　*447*

参考文献　451

第12章　コンパクト化とBPS状態　453

12.1　BPS状態　453
12.2　超対称性と p ブレイン　454
12.3　コンパクト化　458
12.4　例：$D=6$　460
12.5　例：$D=4, N=2$ と $D=6, N=1$　467
12.6　超対称性の拡大と張力のない弦　468
12.7　F理論　470
12.8　例：$D=4$　472
12.9　まとめ　474
参考文献　479

第13章　ソリトン，Dブレイン，ブラックホール　481

13.1　ソリトン　481
13.2　超メンブレインの作用　483
13.3　5ブレインの作用　485
13.4　Dブレイン　487
13.5　Dブレインの作用　490
13.6　行列模型とメンブレイン　494
13.7　ブラックホール　500
13.8　まとめ　505
13.9　結論　510
参考文献　511

付　録　513

A.1　群論への短い入門　513
A.2　一般相対論への短い入門　524
A.3　微分形式の理論への短い入門　528
A.4　超対称性への短い入門　533
A.5　超重力理論への短い入門　539
A.6　表記法　544
参考文献　546

索　引　548

第I部

第1量子化と経路積分

第1章
経路積分と点粒子

1.1 なぜ弦か？

現代の科学上の最大の問題の1つは，現代物理学の2つの基本的な理論，すなわち場の量子論と一般相対論を1つの理論的枠組みへ統一する問題である．すばらしいことに，これらの2つの理論は自然のもっとも基本的な力に関する人類のすべての知識を体現したものになっている．たとえば場の量子論は，10^{-15}cmより小さい距離にいたるまでの極微の世界の物理を説明することができる．他方一般相対論は，宇宙の大距離での振る舞いをもっともよく説明し，宇宙自身の起源についても魅力的で説得力のある記述を与えてくれる．このようにこの2つの理論を合わせれば，原子核より小さい世界から宇宙の大きさにいたる40桁にもわたる物質とエネルギーの振る舞いを，驚くほどうまく説明することができるのである．

しかし過去50年程の間，これら2つの理論が相容れないものであることが大きな謎であった．それはまるで自然が2つの心をもっていて，それぞれが他方がないかのように互いに独立に固有の領域で作用しているかのようなのである．なぜ自然にはそのもっとも深くもっとも基本的なレベルで，2種の数学と2種の仮定および2種の物理的原理をもつまったく異なる2つの理論が必要なのであろうか？

理想的には，これら2つの基本的理論を統合する統一場の理論があることが望ましい．

$$\left.\begin{array}{l}\text{場の量子論}\\\text{一般相対論}\end{array}\right\}\text{統一場の理論}$$

しかし，これら2つの理論を統合しようとする過去数10年の試みの歴史は暗いものである．それはどうしても無限大の困難をもっていたり，因果律などの大事な物理の原理のいくつかを破るものであった．過去数10年にわたって場の量子論で発展させられたくりこみ理論の強力な手法も，量子重力理論の無限大を除くことはできなかった．明らかに，ジグソーパズルの主要な部分がまだ欠けているのである．

場の量子論と一般相対論はまったく相容れないように見えるけれども，過去20年の精力的な理論的研究により，この謎の解決の鍵はおそらく**ゲージ対称性**にあるということが次第に明らかになってきた．自然界のもっとも顕著な特徴は，基本法則が群論により表現したときに大きな統一性と対称性をもつようになるということである．ゲージ対称性による統一ということが，明らかに物理から得られる大きな教訓となってい

る．とくに Yang-Mills 理論の局所的対称性により場の量子論の発散を消すことができ，素粒子論の法則をエレガントで包括的な枠組みに統一することができたのである．ただ単に美しいからといって，自然は物理法則に対称性を取り入れているようには思えない．むしろ，自然は対称性を**要求している**のである．

しかし問題は，Yang-Mills 理論の強力なゲージ対称性や，アインシュタイン方程式の一般共変性でさえも，重力の有限な量子論を作るには不十分だということである．

現在のところ，これら2つの基本的な理論を真に統一し有限な理論を与えるものとしてもっとも有望なのが，超弦理論とその最近の定式化であるM理論である [1–12]．超弦理論は，物理で今まで発見されたうちで最大のゲージ対称性をもち，おそらく量子重力のすべての発散を消すのに十分大きな対称性をもっていると思われる．超弦理論の対称性は，アインシュタインの一般相対性理論と Yang-Mills 理論の対称性を含むだけでなく，その一部に超重力と大統一理論(GUTs) [13] をも含んでいるのである．

大雑把にいうと，超弦理論が無限大の謎を解く機構は図 1.1 と図 1.2 のように図示できる．図 1.1 では，2つの点粒子の散乱はループをもつ無限個のファインマン図をたし上げて計算される．これらの図は一般に図の位相が変わるまで内線の1つがつぶれ，「ピンチする」ことに対応する特異性をもっている．それに対して図 1.2 には，2つの閉じた弦の状態の散乱への2ループの寄与を示した．ここでは，点粒子の場合のように内線の1つが「ピンチする」ことはできないことに注意しよう．こうして超弦理論では，この位相的な変形を禁止する対称性のために，発散が弱いあるいは有限でさえあると期待されるのである．

S 行列の発散を除くと同時に，量子力学，一般相対論，GUT 理論および超重力を含むような理論は明らかに，息をのむほど美しくかつ複雑な数学を使うものに違いない．実際数学者でさえ，超弦理論から現れた数学には驚いた．それは Kac-Moody 代数，リーマン面とタイヒミュラー空間，モジュラー群，さらにはモンスター群論とさえいった，全然似ても似つかない広範囲にわたる数学を結びつけるものであった．

ところが大変皮肉なことに，**弦理論そのものは統一されていない**のである．初めてこの理論を学ぶ者にとっては，それは民間伝承，経験的規則および直観の不満足な集まりであることが多い．ときには模型の約束の多くのものが，何の理由もなく与えられているように思われる．すべての物理的法則の統一的枠組みを与えると主張する理

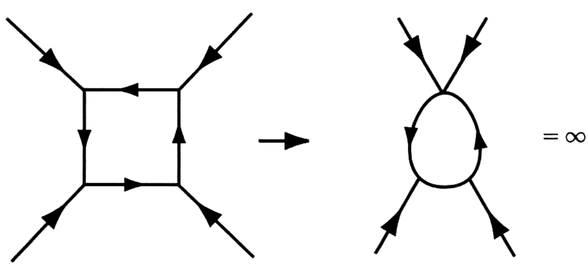


図 1.1：4粒子散乱の1ループファインマン図．この図の紫外発散は，1つの内線がピンチする，つまり点になることから生じる．

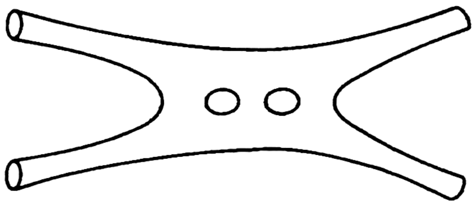


図 1.2：閉じた弦の散乱の 2 ループファインマン図．点粒子の場合のように内線がつぶれないので，図は紫外発散をもたない．このように，位相的な議論だけから弦理論は点粒子の理論より発散が弱いことがわかる．しかし，赤外発散は存在するかもしれない．

論にとって，理論そのものがこんなに分裂しているとは何という皮肉であろうか！ これは実はこの模型のもっとも基本的なレベルの秘密の鍵が，まだしっかりとらえられていないためである．

ふつう量子論を書き下すとき，われわれは理論の幾何学あるいは対称性から出発して作用を書き下す．次に作用から S 行列のユニタリー性を始め，その模型のすべての予言を導く．このように**第 2 量子化**した作用が，場の量子論を定式化する本来の方法なのである．そして超弦理論がときに一見ランダムな約束のまとまりのない集まりであるように見える根本的な理由は，それがふつう第 1 量子化された理論として定式化されていることにある．このためにユニタリーな理論のすべてのファインマン図を構成するには，直観といい伝えにたよらなければならなくなるのである．将来の理論は，M 理論（またはそのさらに進んだ理論）として単純な首尾一貫した形式にまとまることが期待される．M 理論はすでに 5 つの異なる超弦理論を 1 つの理論に統一することができている．最終的には（おそらく 1 インチより短い）1 つの方程式で理論全体が統一できるのではないだろうか．

不幸なことに，超弦理論とメンブレインの幾何学はこの模型で 1 番最後に発展させられたものである．実際この概観に見るように，この模型は 1968 年のその量子論の偶然の発見に始まり，過去 30 年の間**後ろ向き**に発展してきたといえる．

これに対しアインシュタインが最初に一般相対論を発見したときは，等価原理などの物理的原理から出発し，それを一般共変性の言葉で定式化した．彼は幾何学を確立してから，問題の唯一の解として作用を書き下したのである．その後方程式の古典解が曲がった多様体を用いて発見され，宇宙の大スケールの振る舞いを初めてうまく説明する理論的模型となった．一般相対論の発展の最後の 1 歩は，重力の量子論の展開となっている．このように一般相対論の歴史的発展の重要なステップは，

$$\text{幾何学} \to \text{作用} \to \text{古典論} \to \text{量子論}$$

と表すことができる．

さらに一般相対論と Yang-Mills 理論は，両方とも成熟した理論である．両方とも理論の基礎となっている幾何学と物理的仮定を含む第 1 原理から出発して定式化されているのである．これに対し超弦理論と M 理論は，まさに発展のこの段階に達しようと

しているところである．

すばらしいことに，Yang-Mills 理論と重力理論は，次の 2 つの単純な幾何学的原理の **1 つしかない**解になっている．

1. 大域的対称性
   相互作用のない理論は，SU(N) とローレンツ群の既約な表現として変換する，純粋な，ゴーストを含まないスピン 1 とスピン 2 の場が伝播するものである．

2. 局所的対称性
   理論は局所的 SU(N) 共変であり，一般共変である．

驚くべきことは，Yang-Mills と重力の結合した作用が，この 2 つの原理の一意的な解であることである：

$$L = -\frac{1}{4}\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\kappa^2}\sqrt{-g}R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}. \tag{1.1.1}$$

（第 1 の原理が理論の本当の物理的内容を含んでおり，それを第 2 の原理の一部に含めることはできない．一般共変で SU(N) 対称な不変量は無限個あるので，物理的内容を決め基本的な場の既約表現を選ぶのに第 1 の原理が必要となる．「純粋な」というのは，たかだか 2 つの微分しかもたないゴーストのない場のことであり，これにより R^2 や F^4 の高階微分の理論が除かれる．）

残された問題は，**超弦理論と M 理論に対してこれら 2 つの単純な原理に相当するものは何か**，ということである．

本書の構成は，もちろん理論が後ろ向きに発展してきたことを反映している．教育的理由により，大部分は理論の歴史的な発展に従う．そのためこの本の第 I 部では，第 1 量子化された理論を扱うので，ときには指導原理のない約束事のまとまりのない集まりのように見えるであろう．それが，第 I 部では弦理論の**経路積分あるいは汎関数的取り扱い**を強調した理由である．ファインマンの経路積分を使った場合にだけ，調和振動子の形式などの他の形式を導くことのできる形式が得られるからである．第 1 量子化した理論の経路積分による形式は，第 2 量子化した理論に比べればとても不満足なものではあるが，第 1 量子化した理論のつじつまを合わせるにはもっとも便利な形式なのである．

第 II 部では，場の理論そのものを議論するが，そこでは 1 つの作用から理論のすべての結果を導くことができる．しかしここでも再び歴史的順序に従い，後ろ向きに場の理論を与えた．

第 III 部では，弦の「現象論」を述べた．10^{19}GeV で始まる現象論をやることはやりすぎかもしれないが，理論の予言がどんなものかを得ておくことは重要であろう．

最後に第 IV 部では，デュアリティーと 11 次元の M 理論について述べた．これによりわれわれは初めて超弦理論の非摂動的領域をしらべることができ，そこでは p ブレインや D ブレインといった風変わりな物体が共存している様を見ることができる．

しかし超弦理論のうまくいく点と欠点を本当に知るためには，まず過去 50 年にわたって物理学者を悩ませてきた歴史的問題を理解しようと努めねばならない．そこで

重力の有限な理論を構成する際の困難を知るために，まずゲージ理論の発展を簡単に復習しよう．また，超弦理論の歴史的発展も簡潔に述べることにする．

1.2　ゲージ理論の歴史的概観

1960年代には，素粒子物理学はどうしようもなく混乱していた．弱，電磁，強，および重力の力は，ほとんど他のものとは独立に，別々のものとして研究されていた．さらに各々の力の研究は，次のような根本的な障害につき当っていた．

1. **弱い相互作用．** 弱い相互作用の理論的模型は，30年も前の1930年代に考えられたフェルミの理論以上には，ほとんど進歩していなかった：

$$L_{\mathrm{Fermi}} \sim \bar{\psi}_p \Gamma^A \psi_n \bar{\psi}_e \Gamma_A \psi_\nu. \tag{1.2.1}$$

ここで Γ^A はディラック行列のいろいろな組み合わせを表す．次の大きな進歩である W ボソンの理論は，無限大の問題をもっていた．さらにレプトン間にある対称性を，いやそういうものがあるのかどうかさえ誰も知らなかった．

2. **強い相互作用．** 弱い相互作用と違って，湯川の中間子論は強い相互作用のくりこみ可能な理論を与えていた：

$$L_{\mathrm{Yukawa}} \sim g\bar{\psi}\psi\phi. \tag{1.2.2}$$

しかし，湯川の理論では当時粒子加速器で発見されつつあったたくさんの「素」粒子を説明できなかった．当時 J. Robert Oppenheimer は，物理のノーベル賞はその年に粒子を発見しなかった物理学者に与えるべきだとさえいったぐらいである．さらに予想以上にデータをよく説明するように思われるクォーク模型は，クォークが実験で見つからないという問題をかかえていた．

3. **重力の力．** 重力の研究は，他の相互作用の研究とはまったくかかわりがなかった．古典的相対論学者は素粒子の研究とは関係なく，いろいろな古典解の発見を続けていた．理論を正準量子化しようとする試みは，理論に存在する途方もない不変性にはばまれていた．たとえ理論がうまく量子化できたとしても，くりこみ不可能であろうという意気をそがれるような事も認識されていた．

この寒々とした風景は，1970年代最初のゲージ革命の到来とともに完全に変化した．すなわち，過去15年の間の大きな成果の1つは，スピン1のゲージ粒子の完全にくりこみ可能な理論の発展である．これにより初めて，物理学者が現実的な S 行列要素を実際に計算できるようになったのである．このように1860年代にマクスウェルが初めて提唱した最初のゲージ理論を越える進歩があるまでに，100年以上かかったのである．（ゲージ理論と群論の初歩的入門は付録を見よ.）

明らかに相対論的量子力学の発散を除く鍵は，より大きなより洗練されたゲージ群を用いることであろう．対称性は単に特別な模型の審美的特徴ではなく，次に述べるように，今やもっとも重要な特徴となっているのである．

たとえば電気的な力と磁気的な力を初めて統一したマクスウェルの方程式は，U(1) で与えられるゲージ群をもっている．弱い力と電磁気の力を電弱力として統一するには，$SU(2) \otimes U(1)$ が必要である．クォークを結びつけてハドロンにしている力すなわち量子色力学(QCD)は，SU(3) に基づいている．実際素粒子物理学全体は，$SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ の最小の理論と矛盾していないのである．

さらに電弱力と強い力を統一すると考えられている大統一理論(GUTs)は，正しいかどうかまだ不明であるが，統一の基本となっているものはやはりゲージ対称性であり，SU(5), O(10) などの対称性が考えられている．

この数10年のうちでゲージ革命はおそらくもっとも重要な発展の1つであろうが，それでさえ十分ではない．Yang-Mills 理論だけでは今のレベル以上にはわれわれの物理的世界の理解を深めることはできないということが，徐々に認識されてきているのである．GUTs は重要な物理現象を説明できないだけではなく，重力の量子論を定式化していないという決定的に重要な問題点をもっているからである．

なにはともあれ，GUTs はすべての力の統一の最終版とはなり得ない．未だ解決されていない GUTs の問題点がいくつかあるからである．

1. GUTs は，なぜ3つのほとんどそっくりな素粒子の世代があるかという問題を解いていない．いまだ Rabi の問い,「誰がミューオンを注文したか？」に答えられないのである．

2. GUTs は，19個の任意パラメーターをもっている．GUTs ではたとえばクォークの質量や，いろいろな湯川結合の大きさを計算できない．本当の統一理論では，多くても1つの任意パラメーターしかあってはならない．

3. GUTs には階層性の問題を解くのに困難がある．超対称性を用いなければ，途方もなく重い粒子の物理が日常のエネルギー現象と混ざりあって，階層性をこわしてしまうのを避けるのは困難だからである．

4. 粒子の力の統一が 10^{-28}cm のあたりで起こり，重力の効果が重要になるプランクの長さ 10^{-33}cm に非常に近い．それにもかかわらず，GUTs は重力について何もいっていない．

5. 今までのところ陽子崩壊が観測されていないことが結論されており，最小の SU(5) はすでに排除されている．したがって，こういう理論を導入しなければならないという実験的理由はまだない．

6. 現在のエネルギー領域と統一のスケールとの間に，何の新しい相互作用もないと考えるのは難しい．この2つのスケールの間の「砂漠」にはまだ知られていない新しい相互作用が咲きほこっているかもしれない．

基礎的な観点から見て，これらの問題のうちもっとも困りもっとも挑戦的なものは，アインシュタインの一般相対論を量子化する方法を見つけることであった．Yang-Mills 理論は，素粒子物理学の知られている法則を統一する上でははなばなしい成功を収め

たが，重力の法則は基本的なレベルで異なっている．明らかにYang-Mills理論と通常のゲージ理論では，この問題を取り扱うことはできない．このようにGUTsは，その限界までつきつめてみると，とても大変な実験的および理論的問題をもっているのである．

一般相対論もまたその限界までつきつめてみると，同じような困難をもっている．

1. 古典的にはアインシュタインの方程式は，必然的に点状の特異点をもつことが確立されており，そこでは一般相対論の法則がつぶれると思われる．この領域では，量子論的補正が古典論より主要な効果とならざるを得ない．

2. 作用が曲率テンソルの1次であるために，下限をもたない．したがって，量子力学的に安定でないかもしれない．

3. 一般相対論はくりこみ可能でない．たとえばコンピューターによる計算により，2ループのレベルでアインシュタインの理論には0でないくりこみ項があることが，はっきりと示された．

アインシュタインの重力の理論を量子化しようとする単純な試みは失敗に帰した．一般相対論が量子力学と相容れないことを最初に指摘した人の1人であるハイゼンベルグは，次元をもつ結合定数が存在するために，ふつうのくりこみの処法が使えないことに気付いていた．

$$\frac{h}{2\pi} = 1; \quad c = 1 \tag{1.2.3}$$

とおけば，ニュートンの重力の理論で次元のある定数が得られる．それは，法則

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1.2.4}$$

に現れる重力定数Gで，センチメーター2乗の次元をもつ．そのため計量テンソル$g_{\mu\nu}$を，計量$\eta_{\mu\nu} = (-+++)$をもつ平らな空間のまわりに展開するとき，センチメーターの次元の結合定数κが必要となる：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}. \tag{1.2.5}$$

ここで，

$$G \sim \kappa^2 \tag{1.2.6}$$

である．唯一の単位がセンチメーターであるこの単位系では，この結合定数κはプランク長10^{-33}cm，あるいは10^{19}GeVとなり，実験でとどくはるかかなたにある．

しかしくりこみ理論は，ある結合定数を無限大を除いて再定義することにより，すべての発散を除けるという基本的な仮定に基づいている．次元が負の定数があるということは，複雑なグラフを入れ替え，たし上げかたを変えるこの手続きができなくなることを意味する．次元が負の結合定数があれば，ファインマン図にいつでも相互作用項を挿入して発散の度合いを上げることができるからである．これは，どんな図も

たくさんの相互作用の挿入で自由に発散させられることを意味する．したがって，**一般相対論はくりこみ可能ではない**．たとえばグラビトン・グラビトンの散乱振幅は，次元をもつパラメーターについてのべき展開となる(図 1.3 を見よ)：

$$A = \sum_{n=2}^{\infty} \kappa^n A_n. \tag{1.2.7}$$

この式ではくりこみ理論でやるように，グラフを組み替えて無限大を消すことはできない．したがって，くりこみ理論が破たんするのである．

このように一般相対論は通常のくりこみ理論の範疇にとてもおさまらないので，ディラックの基本的な反対を再考することが必要となる．ディラックは，量子力学の成功は各補正項がどんどん小さくなるような近似に基づいていると述べている．ところがくりこみ理論はこの原理を最大限に破っており，無限大の量が出てくるが最後にそれを捨て去っているのである．

これを解決する 1 つの方法は，結合定数のすべての次数で有限である重力の理論を作り，くりこみがまったく必要でないようにすることであろう．しばらくの間，局所的ゲージ群 Osp(N/4) (付録を見よ)に基づいた超重力 [14, 15] がその期待をになっていた．これは 60 年間で初めてのアインシュタイン方程式の自明でない拡張になっていた．人々の期待はこのゲージ群が十分たくさんのウォード-高橋恒等式を与えて，多くの種類の発散する図を消すだろうというところにあった．ゲージ群が大きくなればなるほど，やっかいな無限大がよく消えるようになるからである(図 1.4 を見よ)．

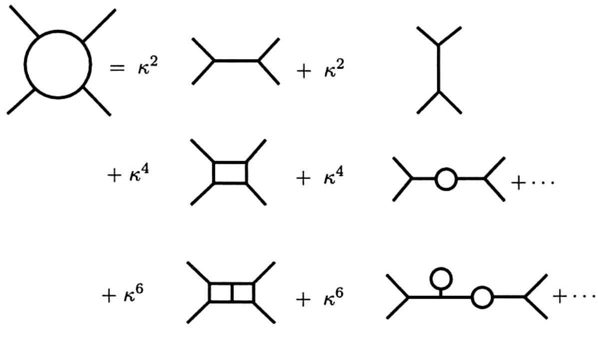


図 1.3：グラビトン・グラビトン散乱の散乱振幅．結合定数が負の次元をもつので，どのようなグラフも発散させられ，したがって無限個の繰り込み項(counterterms)が必要になる．ゆえに量子重力を含む理論は，各次数ごとに発散しているか，完全に有限かのどちらかである．量子重力のみの理論は，コンピューター計算により 2 ループで発散することが示されている．低いスピンの粒子と結合した量子重力にもくりこみ項が発見されている．したがって超弦理論が，有限な理論の唯一の候補である．

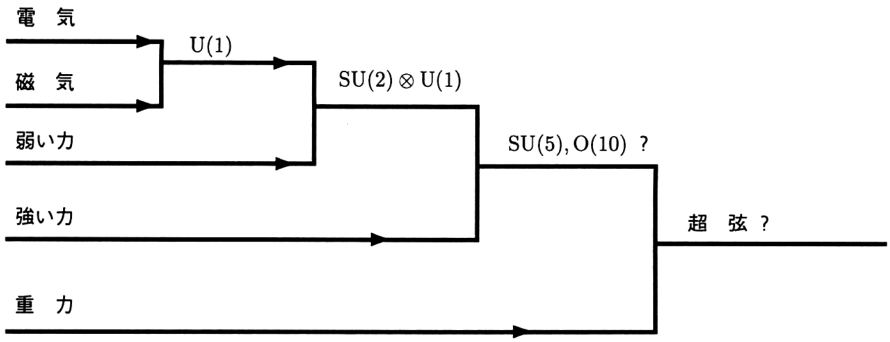


図 1.4：リー群に基づいたゲージ理論が自然の基本的な力を統一してきた様子を示す図．U(1) に基づいたマクスウェルの理論は，電気と磁気を統一した．SU(2) ⊗ U(1) に基づいた Weinberg-Salam 模型は，弱い力と電磁力を統一した．SU(5), O(10) あるいはより大きな群に基づく GUT 理論は，強い力と電弱の力を統一する最良の候補である．超弦理論は，重力と他の粒子の力を統一するゲージ理論の唯一の候補である．

理論	ゲージ群
電磁気	U(1)
電弱	SU(2) ⊗ U(1)
強	SU(3)
GUT (?)	SU(5)，O(10)
重力 (?)	GL(4)，O(3, 1)
超重力 (?)	Osp(N/4)

ここで追求されている基本的な考え方は，次のようである．

ゲージ対称性 → ウォード-高橋恒等式 → グラフの相殺 → くりこみ可能な理論

たとえばアインシュタインの重力理論でさえも，最初の 1 ループは容易に有限であることが示せる．ガウス-ボネ恒等式と呼ばれるすばらしい恒等式があって，それによりただちに，一般相対論におけるすべての 1 ループのグラフを（それを書き下すにはコンピューターが必要であろう）加えると 0 になることがわかるのである．さらに超重力の発散のうちたくさんのものが超ガウス-ボネ恒等式により消えるが，どうも理論を有限にするに十分ではないように思われる．

超重力のうち最大でもっとも有望な O(8) 超重力は，おそらく発散しているであろう．残念ながら，7 ループのレベルで局所的に超対称なくりこみ項を書き下すことができるからである．さらに高い対称性などを用いるのでなければ，この項および他の無限個のくりこみ項の係数がすべて 0 になるとは非常に考えにくい．これは一般相対論の発散を除くには，最大の超重力理論の対称性 Osp(8/4) でさえも小さすぎるということを意味しており，残念なことである．

さらに O(8) のゲージ群は小さすぎて，素粒子物理の最小の SU(3) ⊗ SU(2) ⊗ U(1) 群を入れることができない．O(8) 以上の群を入れようとすると，理論により高いスピンの粒子を入れなければならない．しかし，相互作用のあるスピン 3 の理論は多分矛

盾を含んでいると考えられているので，O(8) が超重力理論の上限である．

結論として，超重力理論は次の 2 つの基本的な理由により排除される．

1. ゲージ群が十分大きくて，すべての超対称なくりこみ項が除けるようになっていないので，多分有限な理論ではない．7 ループのレベルでくりこみ項が存在するからである．

2. ゲージ群は O(8) で，素粒子物理の最小の対称性，即ち $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ を入れられるほど大きくないし，カイラルなフェルミオンが入らない．

長年これらおよび他の問題点に直面していた物理学者は，おそらくわれわれの宇宙に関してもっている仮定のいくつかを捨てなければならないのだろうと結論した．一般相対論と量子力学はいくつかの仮定から得られるので，これらの仮定のどれかが間違っているだろう．その鍵は一般相対論と量子力学がよりどころとしている自然に関しての常識的仮定を落とすことにあるに違いない．こうして長年にわたり，宇宙に関する常識的概念をいくつか落とす提案がなされてきた．

1. 連続性

   このアプローチでは，時空が粒状であると仮定する．この粒の大きさがファインマン積分に自然な切断を与え，有限の S 行列を与えてくれる．

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} d^4x\, f(x). \tag{1.2.8}$$

   のような積分は $\varepsilon \to 0$ で発散するが，ε が 0 になるような極限は決してとらないのである．格子重力理論は，この種のものである．たとえばレッジェ解析学 [16] では，リーマン空間を不連続な 4 次元単体に分割し，曲率テンソルを単体のまわりの円を動くときに計算される角度の不足によって置き換える：

$$-\frac{1}{2\kappa^2}\sqrt{-g}R \to \text{角度の不足}.$$

   (平坦な空間では，閉じた経路のまわりを歩くときには角度の不足はなく，作用は 0 になる.）ふつう格子理論では，格子の長さが 0 になる極限をとる．ところがここではそれを小さな数に固定しておくのである [17]．しかし今のところ，時空が粒状であることを支持する実験的証拠はない．このアプローチは決して否定できないが，素粒子物理の自然な発展であるより大きな，より美しい群を仮定する流れに逆行するように思われる．

2. 因果律

   このアプローチでは，因果律に小さな破れを許す．実際リー-ウィックの機構 [18] を含む理論はくりこみ可能であるが，因果律からの小さなずれを許している．これらの理論は，伝播関数の紫外での振る舞いを変えるような質量 M の仮想的パウリ-ビラー場を加えて，ファインマン図が収束するようにしている．ふつうファインマン伝播関数は，紫外の極限で p^{-2} のように収束する．しかし仮想的粒子を付け加えれば，伝播関数が p^{-4} のようにずっと速く収束するようにできるのである：

$$\frac{1}{p^2+m^2}-\frac{1}{p^2+M^2}\longrightarrow\frac{1}{p^4}. \tag{1.2.9}$$

パウリ-ビラー場は，伝播関数に現れている -1 のためにゴーストであることに注意しよう．（これは理論が負の確率をもつことを意味する．） ふつうは，パウリ-ビラー場の質量を無限大にもっていく．ところがここではそれを有限に保ち，極が非物理的なシートにのるようにするのである．しかしこの結果得られるファインマン図の構造を調べると，因果律が破れることがわかる．すなわち自分が生まれる前に，自分の両親に会うことができることになる．

3. ユニタリー性
曲率テンソルを用いるアインシュタインの理論のかわりに，ワイルテンソルを用いる共形理論を考えることができる：

$$\sqrt{-g}R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\longrightarrow\sqrt{-g}C^2_{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{1.2.10}$$

ここで，ワイルテンソルは

$$C_{\mu\nu\rho\sigma}=R_{\mu\nu\rho\sigma}+g_{\mu[\sigma}R_{\rho]\nu}+g_{\nu[\rho}R_{\sigma]\mu}+\frac{1}{3}Rg_{\mu[\rho}g_{\sigma]\nu} \tag{1.2.11}$$

により定義されるものである．角括弧は反対称化を表している．共形テンソルは，曲率テンソルよりも大きな対称性の群をもつ．すなわち，局所的共形変換

$$\begin{cases} g_{\mu\nu}\to e^{\sigma}g_{\mu\nu} \\ C^{\mu}_{\nu\rho\sigma}\to C^{\mu}_{\nu\rho\sigma} \end{cases} \tag{1.2.12}$$

のもとで不変である．このワイル理論は伝播関数が p^{-4} のように振る舞うので収束する．これは高階微分の理論である．しかし上に挙げたのと同じ理由により，伝播関数に -1 をもつ「ユニタリーゴースト」が存在する．もっとも楽観的な筋書きは，これらのユニタリーゴーストがクォーク閉じ込めに似た機構で「閉じ込められる」というものであろう［19, 20］．

4. 局所性
長年にわたって，局所性というような量子力学の重要な仮定をいくつかやめる提案もなされてきた．結局のところ，量子力学の法則が 10^{-33}cm というところまで成立するという保証はないのである．しかし物理学者が局所性などの量子力学の法則からはみ出そうとすると，いつでも問題が生じた．今のところ，量子力学にかわるようなうまくいく理論はない．

5. 点粒子
最後に，超弦理論のアプローチがある．これは2000年も前にギリシア人たちによって最初に導入された，理想化された点粒子という概念を捨てるものである．

超弦理論は物質の基本的な構成物が点粒子であるという仮定だけを捨てるのであるから，今までの物理原理をもっともそこなうことがなく，ゲージ群を複雑で洗練され

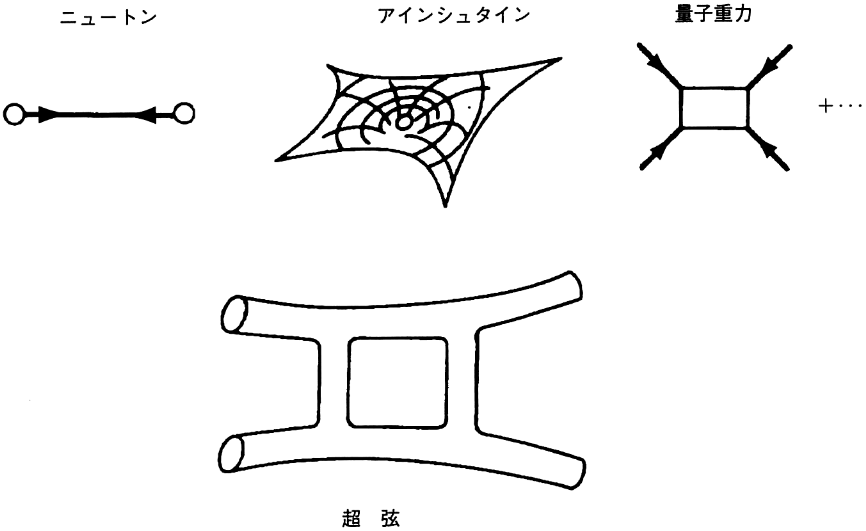


図 1.5：重力の理論の発展の段階．この図の各段階は，前の段階の成功に基づいている．ニュートンは，重力は離れたものに瞬間的に働く力だと考えた．アインシュタインは，重力は時空の曲率によって生じるとした．一般相対論と量子力学を単純に合体させると発散する量子重力理論となり，そこでは重力は粒子的グラビトンの交換によって生じると仮定している．超弦理論では，重力は閉じた弦の交換で生じると考えている．

たものにするという伝統を踏襲するものである．そして超弦理論は，量子力学のどの法則も破ることはなく，ファインマン図の発散を全部ではないとしてもほとんど除いてくれる．超弦模型の対称性の群は物理の歴史で最大のものであり，おそらく理論を全次数で有限にするほど大きいであろう．もう1度言うと，理論を有限にする根本的な鍵は，量子力学の破れではなくて，対称性なのである．

図 1.5 に重力のいろいろな理論の発展を図示した．まずニュートンの遠隔相互作用の理論があり，そこでは重力相互作用は光の速度より速く伝わる．アインシュタインはこれを曲がった多様体の古典的解釈で置き換えた．一方量子重力は，ループを加えることによりアインシュタインの理論に量子補正を行う．最後に超弦理論が，相互作用する弦のすべての位相的な配位の和をとることにより，さらに点粒子の量子論への補正を行う．

しかし超弦理論は，その歴史的発展においてそれ以前の理論とまったく異なっている．他の物理理論と違って，ローラーコースターよりもねじれや曲がりが多い，科学のなかでも多分もっとも奇妙な歴史をもっているであろう．

まず，2人の若い物理学者 Veneziano と鈴木［21, 22］が数学の本をパラパラとめくり，オイラーのベータ関数が(ユニタリー性以外の)ハドロンの相互作用の S 行列のすべての性質をみたすことを偶然見つけて，その量子論を独立に発見した．そして，Neveu，Schwarz および Ramond ［23–25］が，ただちにこの理論にスピンをもつ粒

子があるように一般化した．ユニタリー性の問題を解くために，吉川，崎田，Virasoro [26] はオイラーのベータ関数を摂動展開のボルン項として取り扱うことを提唱した．最後に，Kaku，Yu，Lovelace および Alessandrini [27–33] がボソンの多重ループ図を計算して，量子論を完成した．しかしこの理論は質量殻条件をみたす(on-shell)[1]状態だけに対する S 行列振幅によって定式化されたものであった．

次に南部と後藤 [34, 35] は，これらの散乱振幅の背後には古典的な相対論的弦が潜んでいることに気付いた．彼らは理論の背後にある統一的古典描像を明らかにして，一挙に理論全体に大きな革命を起こした．古典論と量子論の間の関係は，Goldstone，Goddard，Rebbi および Thorn [36] によってただちに明らかにされ，さらに Mandelstam [37] によって発展させられた．しかし理論は第 1 量子化の理論として定式化されており，測度や頂点，グラフの数などはすべて適当に仮定しなければならず，第 1 原理から導出されなかった．

(特別なゲージでの)作用は，最終的に Kaku と吉川によって書き下された [38]．こうしてやっと模型は物理変数によって 1 つの作用から導出できるようになったが，作用には何の対称性も残っていなかった．しかし理論が 10 次元か 26 次元でしかうまく定義されないことが発見されて，模型はすぐに死んだ．さらにハドロンの相互作用の理論として QCD が急速に発展し，超弦の柩に最後のくぎが打たれたように見えた．

10 次元や 26 次元の理論が 4 次元の物理に使えるとは誰も思わなかったので，10 年の間，この模型はかえりみられなかった．Scherk と Schwarz [39] が，この双対模型が実はすべての相互作用の理論であるという(そのときは)途方もない示唆をしたとき，誰もそのアイデアを真剣にとらなかった．そのアイデアは，鉛の風船のように落ちたのである．

最後に 1984 年に Green と Schwarz [40] が，超弦理論にはアノーマリーがなく，摂動の全次数でおそらく有限であることを発見して理論は息を吹きかえした．Gross，Harvey，Martinec および Rohm の $E_8 \otimes E_8$「ヘテロティック弦」は [41]，現在のところ素粒子物理の物理的によい模型と重力を統一する最良の候補である．

現在のもっとも活発な研究分野の 1 つは，理論の発展を完結すること，なぜこの模型の「奇跡」が起こるかを発見することである．そのためにこの 20 年の間に見つかった方法，たとえば BRST などを用いて，共変的作用を書き下す方向が活発に調べられてきた．

最後に 1990 年代初期にデュアリティーについて集中的な研究が行われ，とくに 1995 年の Witten と Townsend の仕事により，弦理論の最新のもっとも進んだ定式化として M 理論が確立した．5 つの超弦理論が 11 次元の 1 つの理論として，おそらくメンブレインによって統一されると考えられる．さらに低次元の大きなデュアルな関係が，弦理論の非摂動的解を探す「道路地図」として得られた．しかし理論が最終的に基づくべき幾何学はまだない．この幾何学を理解することにより，完全な理論を単純な一貫した方程式に書くことができるであろう．これにより過去 30 年の間後ろ向きに進歩してきた理論の発展が，本当に完結することになる．

---

[1] 運動量 p_μ が，$p_\mu^2 + m^2 = 0$ をみたすこと．

量子論 → 古典論 → 作用 → 幾何学

超弦理論の有望な側面をいくつかまとめてみよう．

1. ゲージ群は $E_8 \otimes E_8$ を含み，最小の群 $\mathrm{SU}(3) \otimes \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{U}(1)$ よりずっと大きい．この理論には，現象論の余地が十分あるわけである．

2. 理論はアノーマリーをもたない．量子論におけるこの小さな，だが重要な欠陥は，どのような理論が自己矛盾をもたぬかに強い制限を与える．超弦理論の対称性は，数々の「奇跡」によってそのアノーマリーをすべて打ち消す．

3. リーマン面の理論による強力な議論により，理論が摂動論の全次数で有限であることが示される(厳密な証明はまだない)．

4. もてあそべるような自由度はほとんどない．超弦模型は，その奇跡的な性質をこわさずにいじることが難しいことで有名である．このように19個の任意結合定数の問題はない．

5. 理論は，GUTs，超 Yang-Mills，超重力，カルーツァ-クライン理論をその一部に含んでいる．したがってこれらの理論に対して発展させられた現象論の多くの特徴が，弦理論にもそのままあてはまる．

大雑把にいうと超弦理論がいろいろな力と粒子を統一する方法は，ちょうどバイオリンの弦が音色を統一的に記述する方法を与えてくれるのと同じである．音符のド，レ，ミなどは，それだけでは基本的ではない．しかしバイオリンの弦は基本的である．この物理的実体がいろいろな音色や，それから構成できるハーモニーさえも説明できるのである．これとまったく同じように，超弦は素粒子と力を統一的に記述する．実際超弦の作り出す「音楽」が，自然界の力と粒子なのだといえよう．

非常に大きな対称性があるために，超弦理論はアノーマリーと発散を「奇跡的に」消すのであるが，つりあいのとれた描像を与えるためにその欠点も示そう．正直にいえば，模型を批判する人たちによって指摘された次のような問題点がある．

1. プランク長で見られるような大きなエネルギーに，実験的に到達するのは不可能である．したがって，理論はある意味で検証不可能である．検証不可能な理論は，物理の理論として受け入れられない．

2. 超弦はいうまでもなく，超対称性の存在を支持する実験的証拠はまったくない．

3. 100と10^{19}GeVの間の「砂漠」に何も新しいことがないと仮定するのは僭越である．加速器のエネルギースケールを上げるたびに，新しいまったく予想もしなかった現象が現れてきたのである．ところが超弦理論は，次の17桁上での予言をするが，そんなことは科学の歴史にいまだかつてなかったことである．

4. この理論はなぜ宇宙定数が0であるかを説明しない．「すべての理論(theory of everything)」であるという理論ならば，宇宙定数が0である謎を説明しなければならないが，超弦がこの問題をどう解決するのか明らかでない．

5. この理論は困るほど豊かである．理論を低エネルギーへと破っていくには，一見何百万もの方法がある．どれが正しい真空なのか？ 超弦理論は $SU(3)\otimes SU(2)\otimes U(1)$ の最小の理論を作り出すことはできるが，今まで見つかっていない他の多くの相互作用も予言する．

6. 10 次元の理論を 4 次元へどうやって落とすか，誰も知らない．

この模型に対する 6 つの反対のうち，もっとも基本的なものは，最後の次元の破れが計算できない点である．この理由は簡単である．摂動の各次数で，時空の次元は安定だからである．したがって理論が自発的に 4 次元と 6 次元の宇宙になってくれるためには，非摂動的な力学的効果を考えねばならないが，それを計算するのは非常に難しい．これが理論に存在する幾何学を探すのが重要な理由である．模型の幾何学的定式化ができれば，非摂動的計算を行い理論によるしっかりした予言のできるような重要な知見が得られると思われる．

したがって，プランク長で模型が検証できないという批判は少々誤まっている．**力学的にうまく破ることができれば，超弦理論は日常のエネルギーのレベルの予言ができるはずである．**たとえば，クォークの質量が予言できるはずである．したがって，プランク長に到達できる加速器ができるまで，何世紀も待つ必要はない．

このように，超弦理論の直面している基本的問題は必ずしも実験的なものではない．主に理論的なものである．理論の主要な問題は，力学的対称性の破れを計算して，その予言がふつうのエネルギーでの実験データと比較できるようにすることである．

プランクエネルギーでの基本的な理論は，ふつうのエネルギーでの基本的な理論でもある．理論の主な障害となっているものは，その非摂動的な振る舞いの理解である．

しかしこの本の第 I 部では歴史的慣例に従い，模型の第 1 量子化した定式化を与えることにする．この本全体で強調するように，第 1 量子化した理論はランダムな事柄のまとまりのない集まりのように思える．そのため(Veneziano 模型に対しては，Hsue, 崎田，Virasoro ［42, 43］が初めて書き下した)経路積分の方法を，第 1 量子化した理論のもっとも強力な方法として与えた．経路積分のアプローチは模型にある幾何学的な定式化を明らかにすることはできないが，第 1 量子化した理論のもっともわかりやすい定式化を与えてくれるからである．

そこで点粒子の汎関数による定式化 ［44］ に入ろう．それはほとんどそのまま弦理論に使うことができる．

1.3 経路積分と点粒子

いろいろな体系のうちでもっとも簡単なもの，古典的非相対論的点粒子の場合から分析することにしよう．驚いたことに，この単純な力学系の分析の大部分は，超弦理論に直接使えるのである．用いる言葉は経路積分の形式で，これは第 1 量子化した点粒子も第 2 量子化したゲージ場も同じように取り扱える強力な方法である．

古典力学のときと同じように，出発点は点粒子のラグランジアンである：

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 - V(x). \tag{1.3.1}$$

ここで，粒子は外部ポテンシャルの中を動いているとする．これで与えられる作用 S が最小になることを要請し，それにより次のように運動方程式が得られる：

$$\begin{aligned} S &= \int L(x_i, \dot{x}_i, t) \\ \delta S &= 0. \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

運動方程式を計算するために，粒子の経路を小さな量

$$\delta x_i; \qquad \delta \dot{x}_i \tag{1.3.3}$$

だけ変えてみよう．この小さな変分のもとで，作用は次のように変化する：

$$\int dt \left\{ \frac{\delta L}{\delta x_i}\delta x_i + \frac{\delta L}{\delta \dot{x}_i}\delta \dot{x}_i \right\} = 0. \tag{1.3.4}$$

部分積分して，オイラー-ラグランジュ方程式

$$\frac{\delta L}{\delta x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{x}_i} = 0 \tag{1.3.5}$$

が得られる．今の点粒子の場合，運動方程式は

$$m\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \tag{1.3.6}$$

となり，ふつうの古典的ニュートン方程式に対応する．

古典力学のラグランジアン形式に加えて，ハミルトニアン形式もある．位置と速度を基本的な量として導入する代わりに，ここでは位置と運動量を導入する：

$$p_i = \frac{\delta L}{\delta \dot{x}_i}. \tag{1.3.7}$$

共役変数のこの定義により，

$$\begin{aligned} H &= p_i \dot{x}_i - L \\ H(p_i, x_i) &= \frac{p_i^2}{2m} + V(x) \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

が得られる．最後に，運動量と座標のポアッソン括弧が

$$[p_i, x_j]_{\mathrm{PB}} = -\delta_{ij} \tag{1.3.9}$$

によって与えられる．

古典力学の名高い定理により，ニュートンの運動方程式と作用原理の方法は同等であることが示せる．作用原理から始めてニュートンの運動の法則が得られるし，逆もできるのである．

運動方程式 $\longleftrightarrow$ 作用原理

しかし，**この等価性は量子レベルで破れる**．量子力学的にはこの2つには根本的な

違いがあり，運動方程式は物質の本当の量子論的振る舞いの近似にしかすぎないのである．したがって，**作用原理こそが量子力学の唯一のよい枠組み**なのである．

さて，量子力学の原理をファインマンの経路積分で再定式化しよう [44]．

1. 粒子が点 a から点 b へ動く確率 $P(a,b)$ は，遷移関数 $K(a,b)$ という複素数の絶対値の2乗である：

$$P(a,b)=|K(a,b)|^2 . \tag{1.3.10}$$

2. 遷移関数は，a から b へのすべての可能な経路についてとった作用 S の関数である位相因子の和で与えられる：

$$K(a,b)=\sum_{\text{経路}} ke^{i2\pi S/h}. \tag{1.3.11}$$

ここで定数 k は，

$$K(a,c)=\sum_{\text{経路}} K(a,b)K(b,c) \tag{1.3.12}$$

で決まり，中間の和は可能なすべての中間点 b を通る経路についてとる．

第2の原理は，点 a から点 b への可能なすべての経路に，それがいかに複雑であろうと，粒子が「さまよい出る」と主張する．この無限個の経路の各々に対し，この位相因子を計算するのである．すると a と b の間の経路の遷移因子が，すべての可能な位相因子の和をとって計算されるというわけである（図 1.6 を見よ）．

著しいことに，**量子力学の本質はこの2つの原理にとらえられている．** 古典力学から驚くほどずれている量子力学の非常に重要な結果はすべて，これら2つの単純に見える原理から導くことができる！ とくにこれらの2つの原理は，2重スリットの実験の量子論的解釈の本質をまとめたものであり，一方この実験の解釈は量子力学そのものの本質を集約しているのである．

ここで古典力学の結果が，今の2つの仮定からある近似の下で再現できることが明らかであろう．プランク定数に比べて大きな S の値に対しては，位相因子が速くゆらぎ，その寄与が打ち消すことに注意しよう．

$$\delta S \gg \frac{h}{2\pi}: \quad \sum_{\text{経路}} e^{i2\pi S/h} \to 0 \tag{1.3.13}$$

したがって経路積分に寄与するのは，古典的経路からの作用のずれがプランク定数の大きさのものだけになる：

$$\delta S \sim \frac{h}{2\pi}. \tag{1.3.14}$$

こうしてオイラー-ラグランジュの運動方程式が，ある特定の極限，すなわちプランク定数が0になるときにのみ再現されることがわかる．したがってプランク定数の大きさが，粒子が古典的には禁止されている軌跡を通る確率を最終的に決めているのである．こうしてハイゼンベルグの不確定性原理の起源が，この2つの原理に体現されているのがわかるであろう．

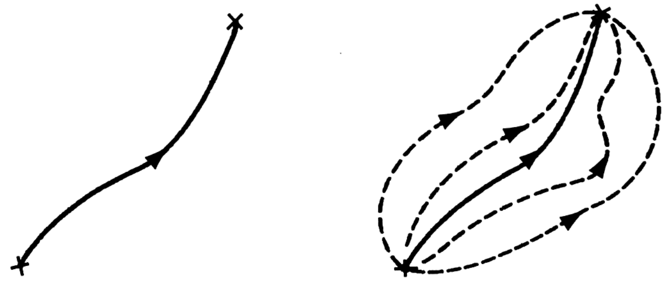


図 1.6：古典力学と量子力学の間の本質的な差．古典力学では，粒子は運動方程式か最小の作用を与えるということで決まる2点間のただ1つの経路を動くと仮定する．これに対し量子力学では，2点間の可能なすべての経路に対し（作用による）確率関数の寄与を加える．古典的な経路がもっともありそうなものではあるが，原理的には可能なすべての経路が経路積分に寄与する．したがって量子レベルでは作用が運動方程式より基本的である．

さて，このことを経路積分でもっと正確に定式化してみよう．第2の原理は，

$$K(a,b) = \int_a^b Dx\, e^{i2\pi S/h} \tag{1.3.15}$$

となる．ただし，

$$K(a,c) = \int K(a,b)K(b,c)Dx_b \tag{1.3.16}$$

$$\sum_{\text{経路}} \to \int Dx = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=1}^{3} \prod_{n=1}^{N} dx_{i,n} \tag{1.3.17}$$

である．ここで添字 n は，始めと終わりの座標の間を N 個の点に区切った中間の点のラベルである．そして N が無限大へ近づく極限をとる．

積分 Dx がふつうの x についての積分でないことを理解しておくことが，絶対に重要である．実際はこれは点 a と b の間のすべての中間点 $x_{i,n}$ についてのすべての可能な積分の積である．これがふつうの積分と汎関数積分の本質的な差であり，経路積分の形式の核心をなしている．

一方この無限個の積分は，a と b の間のすべての可能な経路について和をとることと同等である．したがって無限個の中間点についての積分を実行する際，規格化因子を注意して入れなければならない．

$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2$ の簡単な場合には，すべての汎関数積分が正確に実行できる．この場合は問題の積分がガウス型であり，幸運なことに実際に実行できる数少ない汎関数積分の1つである．経路積分の方法で実際に実行できる積分は数少ないが，その1つは

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\; x^{2n} e^{-r^2x^2} = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{r^{2n+1}} \tag{1.3.18}$$

である．この公式はこの本全体で使うことになるであろう．

ここで経路を無限個の中間点 $x_{i,n}$ に分割しよう．(汎関数では中間点 $x_{i,n}$ のすべての可能な値について積分するので，小さな時間だけ離れていても $x_{i,n}$ と $x_{i,n+1}$ が互いに近いとはいえないことに注意せよ.)

$$dt \to \varepsilon$$
$$\frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 dt \to \frac{1}{2}m(x_n - x_{n+1})_i^2 \varepsilon^{-1} \tag{1.3.19}$$

と書こう．無限個の中間点についての汎関数積分を実行するために，次のガウス型積分をくり返し使う：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \exp[-a(x_1-x_2)^2 - b(x_2-x_3)^2] = \left(\frac{\pi}{a+b}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{ab}{a+b}(x_1-x_3)^2\right]. \tag{1.3.20}$$

ここで重要な点は，1 つの中間点についてのガウス型の積分が，その中間点のない別のガウス型の積分を生じていることである．これが無限個の中間点についての汎関数積分を実行できる基本的な理由である．

最後に，実行したい経路積分は[2]，

$$K(a,b) = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint \cdots \int dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1} \left(\frac{2\pi i\varepsilon}{m}\right)^{-\frac{1}{2}N} \exp\left\{\frac{im}{2\varepsilon}\sum_{n=1}^{N}(x_n - x_{n-1})^2\right\} \tag{1.3.21}$$

で与えられる(ここで，ベクトル添字 i を省略した)．前の関係(1.3.20)を用いると，最終的な結果は

$$K(a,b) = \left|\frac{m}{2\pi(t_b - t_a)}\right|^{1/2} \exp\left(\frac{im(x_b - x_a)^2}{2(t_b - t_a)}\right) \tag{1.3.22}$$

となる．この遷移確率関数 K は，いくつかの非常に面白い性質をもっている．たとえば t_a が t_b より大きいとき，波動方程式

$$-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_a^2}K(a,b) = i\,\frac{\partial}{\partial t_a}K(a,b) \tag{1.3.23}$$

の解になっている．

これらの表式を自由に伝播する弦の場合に後で一般化するが，グリーン関数に対するこれらの式はほんの小さな，だが重要な変更をするだけで移ることがわかる．

経路積分の形式でのハミルトニアンとラグランジアン形式の間の関係を示すには，a から b への経路を分割したときに中間の完全系を挿入すればよい．変数 x を固有状態の集合に作用する演算子 $\hat{x}$ として扱おう：

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle. \tag{1.3.24}$$

$|x\rangle$ は位置の演算子の固有状態で，$\hat{x}$ をその固有値が数 x であるような演算子として扱うものである．すると座標と運動量の固有状態の完全性は，

---

[2] 以下では，式(1.2.3)の単位系が用いられている．

$$1=\int |x\rangle dx\langle x|$$
$$1=\int |p\rangle dp\langle p| \tag{1.3.25}$$

と表せる．状態は，

$$\langle x|y\rangle=\delta(x-y)$$
$$\langle p|x\rangle=\frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}} \tag{1.3.26}$$

と規格化する．(経路積分形式には無限個の規格化因子がくり返し現れるので，この本では，混乱をさけるためときどきそれらを省略する．もちろん必要なら経路積分にもう1度入れることができるので，何ら一般性を失うことはない.)

これらの固有状態を用いて，点 x_1 から x_N へ行くグリーン関数の表現を書き換えることができる：

$$K(1,N)=\langle x_1,t_1|x_N,t_N\rangle. \tag{1.3.27}$$

遷移振幅に対する前の式(1.3.22)を導くために，x_1 と x_N の間のすべての中間点に，中間状態の完全系を入れよう：

$$\begin{aligned}\langle x_1,t_1|x_N,t_N\rangle =&\langle x_1,t_1|x_2,t_2\rangle\int dx_2\langle x_2,t_2|\cdots\\ &\cdots|x_{N-1},t_{N-1}\rangle\int dx_{N-1}\langle x_{N-1},t_{N-1}|x_N,t_N\rangle.\end{aligned} \tag{1.3.28}$$

さて，各無限小の伝播関数をハミルトニアンを用いて調べよう．ハミルトニアンを，座標と微分の関数として書いておく：

$$H=H(x,\partial_x). \tag{1.3.29}$$

すると無限小の間隔に対する遷移は，

$$\begin{aligned}\langle x_1,t_1|x_2,t_2\rangle &= \langle x_1|e^{-iH(x,\partial_x)\delta t}|x_2\rangle\\ &= e^{-iH(x,\partial_x)\delta t}\langle x_1|x_2\rangle\\ &= e^{-iH(x,\partial_x)\delta t}\langle x_1|p\rangle\int dp\langle p|x_2\rangle\\ &= \int\frac{dp}{2\pi}e^{-iH(x,p)\delta t}e^{ip(x_2-x_1)}\\ &= \int\frac{dp}{2\pi}e^{-iH(x,p)\delta t}e^{ip\dot{x}\delta t}\end{aligned} \tag{1.3.30}$$

によって与えられる．

経路積分によって，古典論から量子論的交換子へ移ることができることに注意しておくことが非常に大切である．ハミルトニアンは，恒等式

$$\partial_x e^{ipx}=ipe^{ipx} \tag{1.3.31}$$

のために，座標に関する微分の関数か，運動量の関数のどちらかで表される．これに

より重要な同一視

$$\begin{cases} H(x,p) \longleftrightarrow H(x,\partial_x) \\ p \longleftrightarrow -i\dfrac{\partial}{\partial x} \end{cases} \tag{1.3.32}$$

ができる．運動量と偏微分の間のこの重要な対応関係は，汎関数形式では上の恒等式のために出てくる．

以上をまとめれば，完全な遷移振幅を書くことができる：

$$\langle x_1, t_1 | x_N, t_N \rangle = \int_{x_1}^{x_N} Dp\ Dx \exp\left\{ i \int_{t_1}^{t_N} [p\dot{x} - H(p,x)]\, dt \right\}. \tag{1.3.33}$$

ただし，

$$H = \frac{{p_i}^2}{2m} + V(x) \tag{1.3.34}$$

（いつものように，すべての中間の規格化因子 2π を落とした.） 前には座標のみの関数だった汎関数積分が，今は運動量と座標の両方の関数になっていることに注意せよ．

もとのラグランジアンを回復するには，単純なガウス積分になっている p 積分を実行すればよく，

$$\langle x_1, t_1 | x_N, t_N \rangle = \int_{x_1}^{x_N} Dx \exp\left\{ i \int_{t_1}^{t_N} \left[\frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - V(x) \right] dt \right\} \tag{1.3.35}$$

を得る．こうして，汎関数の方法を用いてラグランジアンとハミルトニアンの間を移ることができる．つまり，

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - V(x) \longleftrightarrow H = \frac{p_i^2}{2m} + V(x) \tag{1.3.36}$$

のどちらでも使うことができるのである．汎関数的にはこれら 2 つの表現の違いは，座標について積分するか，座標と運動量の組み合わせについて積分するかということにしかない．遷移確率は次のように表される：

$$\begin{aligned} K(a,b) &= \int_{x_a}^{x_b} Dx \exp\left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - V(x) \right] \right\} \\ &= \int_{x_a}^{x_b} Dx Dp \exp\left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt \left[p \dot{x}_i - \frac{p_i^2}{2m} - V(x) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{1.3.37}$$

1.4　相対論的点粒子

今までの議論は非相対的粒子に限定しており，すべての自由度が物理的であった．しかし相対論的な粒子の場合に議論を拡張するときには，複雑な事態が生じる．とくにローレンツ計量に現れる (-1) のために，一般に理論の中で非物理的状態が伝播するようになる．これらの非物理的「ゴースト」状態は負の確率をもっているので，負ノルム状態のない，意味のある，因果律の成り立つ理論にするためには，これらのゴーストを注意深く取り除いておかねばならない．

相対論的な場合には，点粒子の場所が4元ベクトル

$$x_\mu(\tau) \tag{1.4.1}$$

で与えられるとしよう．ここでパラメーター τ は，必ずしも時間のことではない．作用はとくに簡単で，4次元経路の長さに比例している：

$$S = -m\int ds = -m(\text{長さ}). \tag{1.4.2}$$

経路の長さ ds は座標により

$$ds = \sqrt{-\dot{x}_\mu^2}\,d\tau \tag{1.4.3}$$

と書ける．ここに，点はパラメーター τ に関する微分を表す．この作用は前の非相対論的作用と違って，仮想的パラメーター τ のつけかえ(reparametrization)の下で不変である．τ から $\tilde{\tau}$ への座標の変換をしてみよう：

$$\tau \to \tilde{\tau}(\tau). \tag{1.4.4}$$

すると，

$$\begin{gathered} d\tau = \frac{d\tau}{d\tilde{\tau}}d\tilde{\tau} \\ \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{d\tilde{\tau}}\frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} \\ \left\{\left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\right)^2\right\}^{1/2} d\tau = \left\{\left(\frac{dx_\mu}{d\tilde{\tau}}\right)^2\right\}^{1/2} d\tilde{\tau} \end{gathered} \tag{1.4.5}$$

を得る．したがって，作用は変数 τ の任意のつけかえのもとで不変である．

これを無限小で書くと

$$\begin{cases} \tau \to \tau + \delta\tau \\ \delta x_\mu = \dot{x}_\mu \delta\tau \end{cases} \tag{1.4.6}$$

となる．前のように，正準共役量を導入しよう：

$$p_\mu = \frac{\delta L}{\delta \dot{x}^\mu} = \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}_\mu^2}}. \tag{1.4.7}$$

しかし，前の非相対論的点粒子の場合と決定的に違う点は，正準運動量がすべて独立ではないことである．実際，それらの間には拘束があることがわかる：

$$p_\mu^2 + m^2 \equiv 0. \tag{1.4.8}$$

このように質量殻(mass-shell)条件が，運動量の間の正確な拘束として出てくる．この系のハミルトニアンを計算すると，

$$H = p^\mu \dot{x}_\mu - L \equiv 0 \tag{1.4.9}$$

となり，恒等的に 0 になる．

ハミルトニアンが 0 になり，運動量の間に拘束があるというふつうにはない特徴は，余分なゲージ自由度をもつ系に典型的なことである．たとえばパラメーターつけかえ不変性から，前に書いた経路積分が実は発散することがわかる：

$$\int Dx\ e^{iS} = \infty. \tag{1.4.10}$$

これは一定のパラメーターづけの各々が，別々の寄与をするからである．しかし Dx はパラメーターつけかえ不変であるから，このことは同じもののコピーを無限個加えていることを意味している．それで積分が発散するのである．

ところがディラックが，余分なゲージ自由度のある系の量子化の方法を与えている．例として正準運動量 p を導入して，拘束条件をラグランジュ未定定数によって課してみよう：

$$L = p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2}e(p_\mu^2 + m^2). \tag{1.4.11}$$

ここでは古典的運動方程式として拘束条件(1.4.8)を課してある．実際 e で変分すれば，運動量に対する拘束が再現される．量子力学的には，この拘束は e について汎関数積分することによって課される．経路積分では，

$$\int De \exp\left[-i\int d\tau \frac{1}{2}\ e\ (p^2 + m^2)\right] \sim \delta(p^2 + m^2) \tag{1.4.12}$$

となる．ここで，e^{ikx} (つまり，数 1 のフーリエ変換)の積分が $\delta(x)$ に等しいことを用いた．新しいラグランジアン(1.4.11)は，まだゲージの自由度をもっていることに注意しよう．それは，

$$\begin{aligned} \delta x_\mu &= \varepsilon \dot{x}_\mu \\ \delta p_\mu &= \varepsilon \dot{p}_\mu \\ \delta e &= \frac{d(\varepsilon e)}{d\tau} \end{aligned} \tag{1.4.13}$$

の下で不変になっている．前の作用よりこの作用の方が良い点は，すべての変数が線形になっていることである．平方根による複雑さについて，悩む必要がないのである．(この作用を弦に拡張すると，今導入した場 e は計量テンソル g_{ab} になる)．

そこで p 変数について汎関数積分しよう．積分は再びガウス型なので，問題なく p 積分ができる：

$$\int Dp \exp\left\{i\int d\tau \left[p\dot{x} - \frac{1}{2}e(p^2 + m^2)\right]\right\} \sim \exp\left\{i\int d\tau \frac{1}{2}(e^{-1}\dot{x}^2 - em^2)\right\}. \tag{1.4.14}$$

こうして，点粒子の作用の 3 番目の形が得られた．この作用の利点は，得られる運動方程式が座標について線形であり，

$$\begin{cases} \delta x_\mu = \varepsilon \dot{x}_\mu \\ \delta e = \dfrac{d(\varepsilon e)}{d\tau} \end{cases} \tag{1.4.15}$$

の下で不変であることである．以上をまとめると，相対論的点粒子を表す3つの同等な方法が得られた.「2次の」ラグランジアン(1.4.14)は，変数 $x_\mu(\tau)$ と場 e の微分につき2階になっている.「非線形」ラグランジアン(1.4.3)は，$x_\mu(\tau)$ のみで表されている．それは2次の形から，e 場について汎関数積分することにより得られる．そして最後に「ハミルトニアン」の形は，$x_\mu(\tau)$ と正準共役量 $p_\mu(\tau)$ の両方を含む(それは微分について1階である)：

$$
\begin{aligned}
1\text{次 (ハミルトニアン) 形：}\ & L = p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2}e(p_\mu^2 + m^2) \\
2\text{次の形：}\ & L = \frac{1}{2}(e^{-1}\dot{x}_\mu^2 - em^2) \\
\text{非線形の形：}\ & L = -m\sqrt{-\dot{x}_\mu^2}.
\end{aligned}
\tag{1.4.16}
$$

どの形もパラメーターのつけかえの下で不変である．各々の形は，それぞれ異なる長所と欠点をもっている．自由相対論的粒子の作用をこのように3通りの方法で書いてみることは，弦の理論へそのままあてはまるので重要なことである．経路積分で表すと，点粒子の理論と弦の理論は本当によく似ているのである．

1.5　第1と第2量子化

この節では，古典的点粒子を量子化し，より伝統的な第2量子化した形式である場の理論との関係を示す．大部分の物理学者が慣れ親しんでいる第2量子化した形式に比べると，第1量子化の方法は少々使いにくいものであるが，歴史的には弦は第1量子化した理論として発展してきたのである．第2量子化した形式の大きな長所は理論全体が1つの作用から導かれることにあるが，第1量子化した理論ではたくさんの余分の仮定が必要となる．

古典系から量子系へ移ることは，余分の無限大を除くという問題と密接に関係している．すでに述べたように，経路積分は同じものの無限個のコピーを加えているために形式的には正しく定義されていない．正しい移行のやり方は1つのコピーだけを取り出すことにある．

第1量子化した点粒子を第2量子化するには，少なくとも3つの基本的方法がある．それは，クーロンゲージ，グプタ-ブロイラー形式およびBRST形式である．

クーロン量子化

ここでは，

$$x_0 = t = \tau \tag{1.5.1}$$

というゲージをとる．言い換えると，x 変数の時間成分を実際の時間 t と同じくとり，それで粒子の進行をパラメーターづけするわけである．このゲージでは，作用は

$$L = -m\int\sqrt{1 - \dot{x}_i^2}\,dt \tag{1.5.2}$$

となる．速度が光の速度に比べて小さい極限では，前のように

$$L \sim \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 \tag{1.5.3}$$

となるので，汎関数積分は

$$\int Dx_\mu \delta(x_0 - t)e^{iS} = \int Dx_i \exp\left(i\int \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 dt\right) \tag{1.5.4}$$

となる．弦の場合にはこの単純な例が，光錐量子化の基礎となっている．クーロンゲージの長所は，すべてのゴーストは理論からまったく除かれており，物理的な量だけを扱っている点にある，他の長所は，位置ベクトルの第 0 成分が時間変数として定義されていることである．今は物理的な時間によって点粒子のパラメーターづけがなされているのである．

しかしクーロン形式の欠点は，明白なローレンツ対称性が破れており，量子化されたローレンツ生成子が正しく閉じることを確かめなければならないことである．点粒子の場合にはこれは自明であるが，量子化された弦の場合には，驚いたことに時空の次元が 26 に固定されるのである．

グプタ-ブロイラー量子化

このアプローチでは，ローレンツ不変性を保つようにする．もちろんそのために，負ノルム状態が S 行列の物理的性質をこわさないように注意する必要があることになる．グプタ-ブロイラーの方法は作用を完全に相対論的に保つが，状態ベクトルに拘束 (1.4.8) を課す：

$$\left[p_\mu^2 + m^2\right]|\phi\rangle = 0. \tag{1.5.5}$$

(上の式は p_0 を除くのに使えるので，ゴーストを除く拘束になっていることに注意しよう.) この形式は，交換子を完全に相対論的に保つようにできる：

$$[p_\mu, x_\nu] = -i\eta_{\mu\nu}. \tag{1.5.6}$$

ここで，$\eta_{\mu\nu} = (-+++\cdots)$ である．このゲージの拘束は自然にクライン-ゴルドン方程式

$$\left[\Box - m^2\right]\phi(x) = 0 \tag{1.5.7}$$

に一般化することに注意しよう．

グプタ-ブロイラー形式は，弦理論の大部分の計算がこの形式で行われているので重要なものである．

BRST 量子化

BRST 形式 [45, 46] の長所は，それが明白にローレンツ不変なことにある．しかしヒルベルト空間にゲージの拘束をつけてユニタリー性を回復する (これは実際には大変難しい) かわりに，BRST 形式では Faddeev-Popov ゴーストを用いて負計量の粒子

を打ち消す．したがって負計量の状態とゴーストの伝播があるためにグリーン関数はユニタリーな理論のものと異なるが，すべての不要な粒子がお互いに打ち消し合うために最終的な S 行列はユニタリーになる．このように BRST 形式は，両方の形式のよい特徴，つまりグプタ-ブロイラー形式の明白なローレンツ不変性と，クーロンすなわち光錐形式のユニタリー性を取り入れている．しかし BRST 形式を学ぶには，まず Faddeev-Popov 量子化を理解する必要がある．

1.6　Faddeev-Popov 量子化

BRST の方法を議論する前に，わき道にそれて Faddeev と Popov が展開した形式 [47] を復習しなければならない．すでに述べたように，経路積分の測度はゲージの自由度をもっているために同じ量の無限個のコピーを積分しており，正しく定義されていない．それをさけるために，単純にはゲージの拘束を直接経路積分へ入れることが考えられる．その拘束が場のある関数 F を 0 にする条件

$$F(x_\mu) = 0 \tag{1.6.1}$$

であれば，そのデルタ関数を経路積分に直接入れるのである：

$$Z = \int Dx \prod_x \delta\left[F(x_\mu)\right] e^{iS}. \tag{1.6.2}$$

しかしこの単純な考えは，このデルタ関数が汎関数積分に**複雑な測度**を与えるので実は正しくない．

Faddeev-Popov の方法の鍵は，明らかに正しい測度をもつ数 1 を挿入することにある．今の目的には，数 1 のもっとも便利な形は，

$$1 = \Delta_{\mathrm{FP}}(x) \int D\varepsilon \delta\left[F(x_\mu^\varepsilon)\right] \tag{1.6.3}$$

によって与えられる．ここで ε は(1.4.6)の座標のゲージ対称性のパラメーター，x_μ^ε はこの対称性に関して変化させた場であり，Faddeev-Popov 行列式 $\Delta_{\mathrm{FP}}(x)$ はこの式で定義されるものとする．

この式に現れる積分は，場のすべての可能なパラメーターづけについての積分であることに注意しよう．すべてのパラメーターづけについて積分するのであるから，その構成法から Faddeev-Popov 行列式はどんな特定のパラメーターづけにもよらないことになる：

$$\Delta_{\mathrm{FP}}(x) = \Delta_{\mathrm{FP}}(x^\varepsilon). \tag{1.6.4}$$

数 1 を汎関数積分に入れ，x の ε 依存性を再吸収するようゲージ変換をしよう：

$$\begin{aligned} Z &= \int Dx \Delta_{\mathrm{FP}}(x) \int D\varepsilon \delta\left[F(x^\varepsilon)\right] e^{iS} \\ &= \int Dx \Delta_{\mathrm{FP}}(x) \int D\varepsilon \delta\left[F(x)\right] e^{iS}. \end{aligned} \tag{1.6.5}$$

ここで x^ε をもとの変数 x へゲージ逆回転したことに注意しよう．汎関数積分の他の

すべての部分はもはやゲージによらないので，

$$Z = \left[\int D\varepsilon\right] \int Dx \Delta_{\mathrm{FP}}(x) \delta\left[F(x)\right] e^{iS} \tag{1.6.6}$$

を得る．こうして，ゲージパラメーターについての積分を取り出すことができる．それは群空間の無限の体積を与える：

$$\text{体積} = \int D\varepsilon. \tag{1.6.7}$$

こうして，この無限の余分さをもたない汎関数の新しい表現が得られる：

$$Z = \int Dx\, \Delta_{\mathrm{FP}}(x) \delta\left[F(x)\right] e^{iS}. \tag{1.6.8}$$

経路積分の単純な量子化(1.6.2)では，単に F の拘束を挿入しているので，測度が正しく与えられるようにする Faddeev-Popov の行列式を落としていることに注意しよう．

次に理論のゴーストに関するすべての情報をもつ Faddeev-Popov の行列式を計算しよう．やり方は，変数を ε から F に変えるのである．ε も F も両方とも同じ数の自由度をもつために，これが可能である．これによりヤコビアンが計算できる：

$$\det\left[\frac{\delta F}{\delta \varepsilon}\right] D\varepsilon = DF. \tag{1.6.9}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathrm{FP}} &= \left\{\int D\varepsilon \delta(F)\right\}^{-1} = \left\{\int DF \det\left[\frac{\delta \varepsilon}{\delta F}\right] \delta(F)\right\}^{-1} \\
&= \left\{\det\left[\frac{\delta \varepsilon}{\delta F}\right]_{F=0}\right\}^{-1} = \det\left[\frac{\delta F}{\delta \varepsilon}\right]_{F=0}
\end{aligned} \tag{1.6.10}$$

となる．こうして Faddeev-Popov の因子は，ゲージ拘束の変分の簡単な行列式として表せる．実際はこの因子を指数化することにより，作用の中に直接加えておく方が便利である．次のトリックを使う：

$$\Delta_{\mathrm{FP}} = \int D\theta\, D\bar{\theta} e^{iS_{\mathrm{gh}}}. \tag{1.6.11}$$

こうして新しいゴーストの作用への寄与は，

$$S_{\mathrm{gh}} = \int d\tau\, \bar{\theta} \left[\frac{\delta F}{\delta \varepsilon}\right]_{F=0} \theta \tag{1.6.12}$$

となる．ここで θ 変数は，**グラスマン数**と呼ばれる c 数である．ふつう汎関数積分を実行すると，行列の逆の行列式が得られると期待される．ところがグラスマン数についての汎関数積分では，行列式は分母ではなく**分子**に現れるのである．グラスマン数は

$$\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i \tag{1.6.13}$$

という奇妙な性質をもっている．とくにこれから

$$\theta^2 = 0 \tag{1.6.14}$$

となる．ふつうこれは θ が 0 であることを意味する．しかしグラスマン数では θ は 0 ではないのである．また次の奇妙な恒等式

$$e^{\theta} = 1 + \theta \tag{1.6.15}$$

が成り立つ．グラスマン数の値をもつ指数についての積分は，この恒等式により単に多項式についてのものになるのでかなり容易になる．グラスマン数について，もっと多くの恒等式は付録に与えてある．そこで

$$\int \prod_{i=1}^{N} d\theta_i\, d\bar{\theta}_i\, \exp\left[\sum_{i,j=1}^{N} \bar{\theta}_i A_{ij} \theta_j\right] = \det(A_{ij}) \tag{1.6.16}$$

を示しておいた．この恒等式から，グラスマン変数についての積分が行列式の因子を分母ではなく分子に出すことがわかり，したがって(1.6.10)の Faddeev-Popov 行列式をグラスマン積分として表せることがわかる．

これで Faddeev-Popov 量子化のための手段が得られたので，BRST のアプローチにもどってゲージ条件

$$e = 1 \tag{1.6.17}$$

を課そう．(このゲージに関する微妙な点は省略する.)　このゲージでは，ふつうの共変ファインマン伝播関数が得られるはずである．これを示すために，われわれの作用(1.4.14)が

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_\mu^2 - m^2) \tag{1.6.18}$$

となることに注意する．このラグランジアンに対し，1 つの点から別の点へ点粒子が伝播することに対応するグリーン関数は

$$\begin{aligned}
\Delta_F(x_1, x_2) &= \langle x_1 | \frac{1}{\Box - m^2} | x_2 \rangle = \langle x_1 | \int_0^\infty d\tau e^{-\tau(\Box - m^2)} | x_2 \rangle \\
&= \int_0^\infty d\tau \int_{x_1}^{x_2} Dx \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^\tau d\bar{\tau}(\dot{x}_\mu^2 - m^2)\right)
\end{aligned} \tag{1.6.19}$$

で与えられる．これは第 1 量子化した経路積分の言葉で書き直したふつうの共変なファインマン伝播関数であることに注意せよ．

ゲージを固定する前には，もともと作用は

$$\delta e = \frac{d(\varepsilon e)}{dt} \tag{1.6.20}$$

の下で不変であった．したがって選んだゲージ $e = 1$ から得られる Faddeev-Popov の行列式は，微分の行列式である．(1.6.11)を用いて，行列式を表すのにグラスマン状態を用いたガウス積分を使う：

$$\Delta_{\mathrm{FP}} = \det|\partial_\tau| = \int D\theta\, D\bar{\theta}\, \exp i \int d\tau\, \bar{\theta}\partial_\tau \theta. \tag{1.6.21}$$

(グラスマン数の場のかわりにふつうの実数場を用いると，行列式は逆のべきで出てしまう.)

以上を総合して，最終的な作用は

$$L = p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2}(p_\mu^2 + m^2) - i\bar{\theta}\partial_\tau\theta \tag{1.6.22}$$

となることがわかる．**BRST のアプローチの本質は，このゲージを固定した作用が余分の対称性**

$$\begin{aligned} \delta x_\mu &= i\varepsilon\theta\dot{x}_\mu \\ \delta p_\mu &= i\varepsilon\theta\dot{p}_\mu \\ \delta\theta &= i\varepsilon\theta\dot{\theta} \\ \delta\bar{\theta} &= i\varepsilon\theta\dot{\bar{\theta}} + \frac{1}{2}\varepsilon(p_\mu^2 + m^2) \end{aligned} \tag{1.6.23}$$

をもつことにある．最初は，ゲージの自由度をすでに固定したあとでどうして別の対称性が現れるのか不思議かもしれない．しかしこの余分の対称性はべき零(nilpotent)であり，**大域的**な対称性である．そのために，理論にさらにゲージの拘束を課すことはできない．したがってこの対称性は前に見つけたものと異なっており，作用からゲージ場を消去するのには使えないのである．

ここで見つけた対称性を生成する演算子 Q を求めて，BRST のアプローチをまとめることができる：

$$\begin{aligned} \delta\phi &= [\varepsilon Q, \phi] \\ Q &= \theta(\Box - m^2) \\ Q^2 &= 0. \end{aligned} \tag{1.6.24}$$

物理的状態は

$$Q|\phi\rangle = 0 \tag{1.6.25}$$

をみたす．この拘束を課せば，質量殻条件をみたす粒子に対するクライン-ゴルドン方程式

$$(\Box - m^2)\phi = 0 \tag{1.6.26}$$

が再現されることに注意しよう．

1.7 第 2 量子化

今までは量子的粒子の第 1 量子化の手法しか分析しなかった．位置と運動量のベクトルしか量子化しなかったのである：

$$\text{第 1 量子化：} \qquad [p_i, x_j] = -i\delta_{ij}. \tag{1.7.1}$$

しかし相互作用を導入するとただちに，第 1 量子化の手法には限界があることが明らかになる．外部のポテンシャルを導入するのではなく，お互いに衝突後離れていく点粒子を記述したいとしよう．それには生成汎関数を修正して，ファインマン図の和をとらなければならない：

$$Z=\sum_{\text{位相}}\int Dx\, e^{-(\text{長さ})}. \tag{1.7.2}$$

(ここでτ積分をウィック回転したので，指数が収束するようになっていることに注意．この本では，ウィック回転した理論になっている場合は指数が実になるので，文脈からわかるはずである．ここでは，経路積分の収束性という微妙な問題は議論しないことにする．)

言い換えると，点粒子が分離したりくっついたりするいろいろな粒子の位相について，手でたし上げなければならない．各位相はいろいろな粒子が相互作用する軌跡のすじ道を表す．運動量$k_1, k_2, \ldots, k_N$をもつ粒子の散乱振幅は，

$$A(k_1,k_2,\ldots,k_N)=\sum_{\text{位相}} g^n\int Dx\,\Delta_{\mathrm{FP}}\exp\left\{-\int dt\,L(t)+i\sum_{i=1}^{N}k_\mu x_i^\mu\right\} \tag{1.7.3}$$

で表される．ここではグリーン関数のフーリエ変換をとっているので，振幅が外線運動量の関数であることに注意しよう．この公式のより便利な形は，

$$A_N=\sum_{\text{位相}} g^n\left\langle \exp i\sum_{i=1}^{N}k_\mu x_i^\mu\right\rangle \tag{1.7.4}$$

である．このように各外線粒子には，フーリエ変換の項から来る因子e^{ikx}がつく．この散乱振幅の経路積分の公式は，弦の理論にほとんどそのまま使えるので重要である．

この記述法がとても使いにくいものであることに注意しよう．すべての位相的に許される配位の集合とその重みを，別に決めなければならないのである．さらにS行列のユニタリー性はまったく不明である．

しかし第2量子化したアプローチでは，場$\psi(x)$を導入し，座標同士ではなく，その場自身の間の量子化関係を導入する：

$$\text{第2量子化}：[\pi(x),\psi(y)]_{x_0=y_0}=-i\delta^{(3)}(x_i-y_i). \tag{1.7.5}$$

第2量子化の方法の長所は，位相についての和を導入しなくても相互作用ハミルトニアンが具体的に書けることにある．ハミルトニアンがエルミートであることを示せば，すべての図の重みを決めS行列のユニタリー性を示すのに十分なのである．

まとめると，第1と第2量子化のよい点と悪い点は次の通りである．

第1量子化

1. 結合定数の次数ごとに，相互作用を手で付け加えねばならない．

2. 最終的なS行列のユニタリー性は不明である．これは各次数ごとに具体的に確かめねばならない．

3. 位相についての展開は結合定数についての展開と密接に結びついているので，この形式は必然的に摂動論である．

4. 理論を質量殻条件からずれたところ(off-shell)で書くのは困難である．

第 2 量子化

1. 相互作用は，作用そのものに具体的に入っている．

2. ハミルトニアンがエルミートならユニタリー性は保証される．

3. 形式的には非摂動的にも摂動的にも理論は書ける．

4. 理論は必然的に質量殻条件なしに書ける．

第 1 から第 2 量子化の理論へ移るには，クーロンゲージの経路積分の形式がもっとも容易である．前に伝播する自由点粒子のグリーン関数が，具体的に得られることを示した：

$$K(a,b)=\left\{\frac{m}{2\pi i(t_b-t_a)}\right\}^{\frac{1}{2}}\exp\left[i\frac{m(x_b-x_a)^2}{2(t_b-t_a)}\right]. \tag{1.7.6}$$

このグリーン関数は，第 2 量子化した形でも書ける．ハミルトニアン

$$H=-\frac{1}{2m}\nabla^2 \tag{1.7.7}$$

から出発しよう．グリーン関数は

$$(i\partial_t-H)K(x,t\,;\,x',t')=\delta^{(3)}(x-x')\delta(t-t') \tag{1.7.8}$$

をみたす．これを解いてグリーン関数を求めると

$$K(a,b)=[i\partial_t-H]^{-1}_{x_a,t_a;x_b,t_b} \tag{1.7.9}$$

ここで逆グリーン関数を，あたかも (x,t) 空間の中の不連続な行列のように取り扱い，自明な規格化因子を落とした．これにより積分を第 2 量子化した言葉で書くことができる．それを示すためこの本では次の恒等式を用いる：

$$\begin{aligned}\int\prod_{i=1}^{N}dx_i\exp\left\{\sum_{i,j=1}^{N}-x_iA_{ij}x_j+\sum_{i=1}^{N}J_ix_i\right\}\\ =\frac{\pi^{\frac{1}{2}N}}{\det|A_{ij}|}\exp\left\{\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{N}J_i(A^{-1})_{ij}J_j\right\}.\end{aligned} \tag{1.7.10}$$

(この積分は，ガウス積分に対する以前の公式(1.3.18)を用いて容易に得られる．x の変数変換をして，A 行列を対角化する．そうすると積分の 2 次の項は S 行列の固有値の関数になる．すべてのモードが分離するので，ガウス積分は平方完成によって正確に実行できる．最後にもう 1 度相似変換をして，A の固有値を A 行列にもどせばよい.)

これから，また次のものが得られる：

$$\int x_n x_m \prod_{i=1}^{N} dx_i \exp\left\{\sum_{i,j=1}^{N} -x_i A_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{N} J_i x_i\right\}$$
$$\sim \left[\frac{\delta}{\delta J_n}\frac{\delta}{\delta J_m}\exp\left\{\frac{1}{4}J_i (A^{-1})_{ij} J_i\right\}\right]_{J=0} \det|A_{ij}|^{-1}$$
$$\sim (A^{-1})_{nm} (\det|A_{ij}|^{-1}). \tag{1.7.11}$$

これらはこの本でもっとも重要な積分の 1 例である．これらの式を用いて，グリーン関数を第 2 量子化した場で書くことができる：

$$K(a,b) = \int \psi^*(x_a,t_a)\psi(x_b,t_b) D\psi^* D\psi \exp\left[i\int dx\ dt L(\psi)\right]. \tag{1.7.12}$$

ここに，

$$L(\psi) = \psi^*(i\partial_t - H)\psi \tag{1.7.13}$$

ここで再び $K(a,b)$ をまるで不連続な (x,t) 空間の中の行列のように取り扱った．

以上をまとめると，点粒子の 2 つの相補的な記述法が得られた．粒子の座標 x_i か，あるいはその場 $\psi(x)$ によって理論を書くことができるのである．

記述の容易さという点でも，数学の易しさという点でも，自由粒子のレベルではどちらの記述法もまったく同等である．しかし相互作用するレベルでは，明白な差が現れる．たとえば第 2 量子化で

$$L_1 \sim \psi^3; \qquad \sim \psi^4 \tag{1.7.14}$$

を書くのは容易であり，相互作用する場のユニタリーな記述が得られることが保証される．しかし第 1 量子化した手法では，位相についての和

$$\sum_{\text{位相}} \tag{1.7.15}$$

は，ユニタリーな理論を記述するには便利な方法ではない．ユニタリー性を各次数ごとに確かめようとすると，ファインマン図がどんどん複雑になっていくからである．さらに第 1 量子化した記述では，完全に摂動的な方法を用いることを余儀なくされる．第 1 量子化の経路積分における位相の和は，摂動的ファインマン図についての和なので，この定式化は必然的に出発点から摂動的なのである．それが，この本を第 1 量子化と第 2 量子化に分割した根本的な理由である．

1.8　調和振動子

第 1 量子化と第 2 量子化の間の関係を説明してくれる 1 つの例は，調和振動子の問題である．弦模型で広く用いる調和振動子の表示を導入するのにこの例は役立つ．次のハミルトニアンをもつ点粒子から始めよう：

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2. \tag{1.8.1}$$

ここで k はばね定数である．運動量と座標は共役なので，経路積分の議論ですでに与えたのと同じ議論により，

$$[p,x]=-i \tag{1.8.2}$$

とおける．そこで座標と運動量を調和振動子で書く：

$$\begin{aligned} p &= \left(\frac{1}{2}m\omega\right)^{1/2}(a+a^\dagger) \\ x &= i(2m\omega)^{-1/2}(a-a^\dagger). \end{aligned} \tag{1.8.3}$$

ただし，

$$k=m\omega^2 \tag{1.8.4}$$

である．正準交換関係(1.8.2)をみたすためには，

$$\left[a,a^\dagger\right]=1 \tag{1.8.5}$$

でなければならない．この表示をハミルトニアンに入れて，

$$H=\frac{1}{2}\omega(aa^\dagger+a^\dagger a) \tag{1.8.6}$$

を得る．c 数をとり出すことにより，正規順序(normal order)の形

$$H=\omega(a^\dagger a+h_0) \tag{1.8.7}$$

に書くことができる．ここで h_0 は零点エネルギーである．これにより調和振動子のヒルベルト空間を導入できる．真空を

$$a|0\rangle=0 \tag{1.8.8}$$

で定義しよう．調和振動子のハミルトニアンのフォック空間の要素は，

$$|n\rangle=\frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \tag{1.8.9}$$

で与えられ，状態は正規直交基底をなす：

$$.\langle n|m\rangle=\delta_{nm}. \tag{1.8.10}$$

系のエネルギーは量子化されていて，

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega \tag{1.8.11}$$

で与えられる．

ここまでは，系を第1量子化した形式のみで記述した．常に1つの点粒子だけを量子化していたのである．次に

$$|\Phi\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n|n\rangle \tag{1.8.12}$$

を導入して，第2量子化した波動関数へ移ろう．ここで調和振動子の基底状態で，波動関数をべき展開しておいた．こうして点粒子の1つの励起状態を記述するかわりに，

任意の数の励起状態の重ね合わせである波動関数を導入する．

ここで重要な定義

$$\langle x|\Phi\rangle = \Phi(x) \tag{1.8.13}$$

をしよう．これは具体的に計算できるものである．今は 2 つの独立な基底状態，調和振動子の基底 $|n\rangle$ と，位置の固有ベクトル $|x\rangle$ があることに注意する．次に，これら 2 つの基底を行き来する方法を調べなければならない．

まず，もっとも簡単な行列要素

$$\sigma_0(x) = \langle x|0\rangle \tag{1.8.14}$$

を分析しよう．この行列要素は，方程式

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x|a|0\rangle \\ &= \langle x|\frac{p - im\omega x}{\sqrt{2m\omega}}|0\rangle \\ &= (2m\omega)^{-1/2}\left(-i\frac{\partial}{\partial x} - im\omega x\right)\langle x|0\rangle \\ &= -i(2m\omega)^{-1/2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + m\omega x\right)\sigma_0(x) \end{aligned} \tag{1.8.15}$$

をみたす．この最後の式は厳密に解くことができる：

$$\sigma_0(x) = (m\omega/\pi)^{1/4} e^{-\xi^2/2}. \tag{1.8.16}$$

ただし

$$\xi = (m\omega)^{1/2} x \tag{1.8.17}$$

このような行列要素をすべて計算するのは容易である．次のように変形すればよい：

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \langle x|n\rangle \\ &= \langle x|(n!)^{-1/2} a^{\dagger n}|0\rangle \\ &= (n!)^{-1/2}(2m\omega)^{-n/2}\langle x|\left[p + im\omega x\right]^n|0\rangle \\ &= (n!)^{-1/2}(2m\omega)^{-n/2}\left(-i\frac{\partial}{\partial x} + im\omega x\right)^n \sigma_0(x). \end{aligned} \tag{1.8.18}$$

したがって解は

$$\sigma_n(x) = i^n (2^n n!)^{-1/2} (m\omega/\pi)^{1/4}\left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^n e^{-\xi^2/2} \tag{1.8.19}$$

となる．一般にこれはエルミート多項式 H_n にほかならない．この多項式を用いて，固有状態 $|x\rangle$ と $|n\rangle$ をお互いに表すことができる：

$$\begin{cases} |x\rangle = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |n\rangle\langle n|x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |n\rangle\sigma_n(x) \\ |n\rangle = |x\rangle \displaystyle\int dx \langle x|n\rangle = \int dx \sigma_n(x)|x\rangle. \end{cases} \tag{1.8.20}$$

こうして(1.8.12)と(1.8.20)を用いて，直交する多項式，すなわちエルミート多項式の完全系により波動関数のべき展開が得られる：

$$\Phi(x) = \langle x|\Phi\rangle = \langle x|\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n|n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n H_n(\xi)e^{-\xi^2/2}. \tag{1.8.21}$$

同様に，調和振動子のポテンシャルの中の点粒子の伝播に対するグリーン関数を計算することも困難ではない．グリーン関数は，あたかも作用

$$L = \Phi(x)^*\left(i\partial_t + \frac{1}{2m}\nabla^2 - \frac{1}{2}kx^2\right)\Phi(x) \tag{1.8.22}$$

をもつ第2量子化した形式から出発したのと同じになるであろう．この第2量子化した作用から，運動方程式

$$\begin{aligned} i\partial_t\Phi(x,t) &= \left[\frac{-1}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}kx^2\right]\Phi(x,t) \\ &= H\Phi(x,t) \end{aligned} \tag{1.8.23}$$

が導かれる．これから $\Phi(x,t)$ に対する正準運動量が定義できて，正準量子化関係

$$[\Pi(x,t), \Phi(x',t)] = -i\delta(x-x') \tag{1.8.24}$$

がみたされる．

1.9 カレントと第2量子化

まず相対論的第2量子化した理論を議論しよう．すでに見たように，これは摂動的には第1量子化した理論と同等である．グプタ-ブロイラー形式で点粒子を量子化すると，運動方程式

$$\left[\Box - m^2\right]\phi = 0 \tag{1.9.1}$$

が得られた．これは第2量子化した作用

$$L = \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + m^2\phi^2\right] \tag{1.9.2}$$

から導かれるものである．第1量子化した理論を調べるのに用いたもっとも強力な手法の1つは，対称性であった．そこで第2量子化した形式の中で，対称性の問題を調べることにしよう．

まず場に小さな変分を行い，作用がその変分の下で不変であることを要求して，運動方程式を計算する：

$$\delta S = 0 = \int d^Dx\left(\frac{\delta L}{\delta\phi}\delta\phi + \frac{\delta L}{\delta\partial_\mu\phi}\delta\partial_\mu\phi\right). \tag{1.9.3}$$

$\delta\partial_\mu\phi = \partial_\mu\delta\phi$ を用いて，部分積分をしよう：

$$\delta S = \int d^Dx\left(\frac{\delta L}{\delta\phi} - \partial_\mu\frac{\delta L}{\delta\partial_\mu\phi}\right)\delta\phi + \int d^Dx\partial_\mu\left(\frac{\delta L}{\delta\partial_\mu\phi}\delta\phi\right). \tag{1.9.4}$$

一時的に表面項を無視することにすると，次の運動方程式が成り立てば作用は停留する：

$$\partial_\mu \frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \phi} - \frac{\delta L}{\delta \phi} = 0. \tag{1.9.5}$$

ラグランジアンをこの式に代入すると運動方程式が得られ，第1量子化した形式ですでに得られている拘束を再現する．

さて，小さいけれど特定されていない量 ε^α の小さな変化を場に生じさせてみよう：

$$\delta\phi = \frac{\delta\phi}{\delta\varepsilon^\alpha}\delta\varepsilon^\alpha. \tag{1.9.6}$$

これを前の作用の変分の式に代入し，表面項を残しておく．運動方程式がみたされているとすると，次の式を得る：

$$\delta S = \int d^D x \partial_\mu \left(\frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \phi} \frac{\delta \phi}{\delta \varepsilon^\alpha} \right) \delta\varepsilon^\alpha. \tag{1.9.7}$$

括弧の中のテンソルを**カレント**として定義しよう：

$$J^\mu_\alpha = \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu \phi)} \frac{\delta\phi}{\delta\varepsilon^\alpha}. \tag{1.9.8}$$

すると，重要な式

$$\delta S = \int d^D x \partial_\mu J^\mu_\alpha \delta\varepsilon^\alpha \tag{1.9.9}$$

を得る．こうして作用 S がこの変分の下で停留するとき，保存するカレント $J^{\mu\alpha}$ が得られる：

$$\partial_\mu J^{\mu\alpha} = 0. \tag{1.9.10}$$

弦の議論で，超対称性と共形不変性に対するカレントを出したいときに，この式を何度も用いることになる．最後にカレントから得られる積分したチャージ Q^α は，時間的に一定であることに注意する：

$$\int d^D x \partial_\mu J^{\mu\alpha} = \int d^{D-1} x \partial_0 J^{0\alpha} + \text{表面項}. \tag{1.9.11}$$

したがって，

$$\begin{gathered} Q^\alpha = \int d^{D-1} x J^\alpha_0 \\ \partial_\mu J^{\mu\alpha} = 0 \longrightarrow \frac{dQ^\alpha}{dt} = 0 \end{gathered} \tag{1.9.12}$$

最後に，作用に付随したもう1つ別の保存するカレントを作ろう．時空の変数に小さな変分を行う：

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu. \tag{1.9.13}$$

この変化の下で，積分の体積要素は

$$\delta d^D x = d^D x \partial_\mu \delta x^\mu \tag{1.9.14}$$

と変化する．したがってこの変化の下での作用の変分は

$$\delta S = \int d^D x [L\partial_\mu \delta x^\mu + \delta L]$$
$$\delta L = \delta x^\mu \partial_\mu L + \frac{\delta L}{\delta \phi}\delta\phi + \frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \phi}\delta \partial_\mu \phi \tag{1.9.15}$$

となる．そこで運動方程式がみたされているとすると，

$$\delta S = \int d^D x \partial_\mu \left\{ \left(+L\delta^\mu_\nu - \frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \phi}\partial_\nu \phi \right) \delta x^\nu \right\} \tag{1.9.16}$$

を得る．**エネルギー運動量テンソル**を

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta L}{\delta \partial^\mu \phi}\partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} L \tag{1.9.17}$$

と定義すれば，式

$$\delta S = -\int d^D x \partial_\mu (T^{\mu\nu}\delta x_\nu) \tag{1.9.18}$$

を得る．したがってこの変化の下で作用が不変ならば，エネルギー運動量テンソルは保存する：

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{1.9.19}$$

たとえばスカラー粒子の作用に対し，エネルギー運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} L \tag{1.9.20}$$

となる．これは運動方程式が成り立てば保存する．

最後に，このいろいろな量子化の方法が Yang-Mills 場（付録を見よ）の場合にどうなっているかを調べておくと役立つ．SU(N) 不変な作用

$$L = -\frac{1}{4}[F^a_{\mu\nu}]^2 \tag{1.9.21}$$

から出発しよう．ここに，

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^{abc} A^b_\mu A^c_\mu \tag{1.9.22}$$

である．作用は

$$\delta A^a_\mu = \partial_\mu \Lambda^a + f^{abc} A^b_\mu \Lambda^c \tag{1.9.23}$$

の下で不変である．ここで Λ^a はゲージパラメーターである．

経路積分の方法では，汎関数

$$Z = \int \prod_{\mu,x} DA_\mu(x) e^{i\int d^4x \left(-\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu}\right)} \tag{1.9.24}$$

から出発する．ここで 3 つの量子化の方法を考える．

クーロン量子化

ゲージ不変性により，

$$\nabla_i A_i^a = 0$$

というゲージがとれる．A_0 成分は時間微分をもたないので積分できてしまい，したがってクーロン形式は陽にゴーストを含まない．（もちろんこのために明白なローレンツ不変性が失なわれてしまうので，それを具体的に確かめなければならない．）　このゲージでは，作用は

$$L = +\frac{1}{2}(\partial_0 A_i^a)^2 - \frac{1}{4}(F_{ij}^a)^2 + \cdots \tag{1.9.25}$$

となり，すべての場が横波である．これがラグランジアンの正準形である．

グプタ-ブロイラー量子化

グプタ-ブロイラー形式の長所は，ユニタリー性を損うことなく明白なローレンツ対称性を保てることである．たとえば，

$$\partial_\mu A^{\mu a} = 0 \tag{1.9.26}$$

というゲージをとろう．このゲージでは，質量のないベクトル粒子の伝播関数は

$$\frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2} \tag{1.9.27}$$

となる．伝播関数が陽にゴーストを含んでいることに注意しよう．時間的励起状態は伝播関数に -1 の係数を含んでおり，ゴーストであることを表しているからである．しかしゴーストを消す拘束条件

$$\langle\phi|\partial_\mu A^{\mu a}|\psi\rangle = 0 \tag{1.9.28}$$

をヒルベルト空間に課すので，この共変的方法で量子化してもよい．この拘束条件はゴーストモードについて解け，したがってそれを除いてくれる．したがって自由伝播関数はゴーストが伝播するのを許すが，ヒルベルト空間にはゴーストはなく，理論自体はローレンツ不変でゴーストがないのである．

BRST 量子化

BRST のアプローチでは Faddeev-Popov 行列式(1.6.10)を計算することから始める．その行列式を計算しよう：

$$\begin{aligned} M^{ab}(x,y) &= \frac{\delta(\partial_\mu A^{\mu a}(x))}{\delta\Lambda^b(y)} \\ &= \partial_\mu D^\mu \frac{\delta\Lambda^a(x)}{\delta\Lambda^b(y)} \\ &= \partial_\mu D^\mu(\delta^4(x-y)\delta^{ab}). \end{aligned} \tag{1.9.29}$$

前のように，M^{ab} の行列式を(1.6.10)を用いて指数化して作用に入れることができる：

$$L = -\frac{1}{4}{F_{\mu\nu}^a}^2 + \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^{\mu a})^2 + \bar{c}^a M^{ab} c^b. \tag{1.9.30}$$

ここで反交換する Faddeev-Popov ゴースト場を c と $\bar{c}$ で表した．この作用は次の BRST 変換の下で不変である：

$$\text{BRST:}\begin{cases}\delta A_\mu^a = (\nabla_\mu c)^a\varepsilon \\ \delta c^a = -\frac{1}{2}f^{abd}c^b c^d \\ \delta\bar{c}^a = \frac{1}{\alpha}(\partial_\mu A^{\mu,a})\varepsilon.\end{cases} \tag{1.9.31}$$

もう 1 度，BRST 変換がべき零であることに注意しておくのが大事である．BRST 対称性は，いかなる観測可能量の保存にも関係していない．前の不変性からこの変換の生成子 Q を得ることができ，

$$Q^2 = 0 \tag{1.9.32}$$

が成り立つ．理論の物理的状態は，

$$Q|\text{phys}\rangle = 0 \tag{1.9.33}$$

をみたす．

1.10 まとめ

知られているすべての相互作用の統一的枠組みを与えると思われている弦理論の大きな皮肉は，理論自体が大変混乱していることである．弦理論は，伝説，約束事，勝手な経験則にみちており，初心者にとって不満足なものであることがよくある．この基本的な理由は，弦理論が歴史的に後ろ向きに，すなわち全体の理論が基本的な作用で定義される第 2 量子化した理論としてではなく，第 1 量子化した理論として発展してきたためである．第 1 量子化の方法の欠点は次の通りである．

1. 理論の相互作用を手で付け加えねばならない．それは 1 つの作用からは導出できない．

2. このアプローチではユニタリー性が明らかでない．グラフの数をいちいち確かめなければならないのである．

3. この定式化は摂動的なので，次元の破れなどの重要な非摂動的計算ができない．

4. この定式化は基本的に質量殻条件をつけたもので，それからずれたものではない．

これに対し第 2 量子化のアプローチの長所は，まさにすべてのことが質量殻条件をみたしていない 1 つの作用から導かれ，ユニタリー性が明白であり，非摂動的計算が原理的にはできることである．

不幸にも，弦理論は歴史的に第 1 量子化した理論として発展してきた．このように弦理論は後ろ向きに発展し，第 2 量子化した幾何学的理論はまだその揺籃期にある．教育的理由により，われわれは弦理論を半分歴史的な観点から導入し，第 1 量子化した理論から始めて，後に第 2 量子化した理論と M 理論を発展させる．将来の弦理論の

説明が，この逆の順であることを希望する．

第 1 量子化した理論のあいまいさをできるだけ少なくするために，この章では経路積分の形式で弦理論の基礎を与えることに努めた．この汎関数のアプローチは，第 1 と第 2 量子化したゲージ理論を同じように容易に表すことができるという大きな長所をもっている．実際点粒子の経路積分形式の大部分を，すっかり弦理論にあてはめることができることがわかる．

経路積分の方法は，量子力学の本質を表す 2 つの基本原理を仮定する．

1. 粒子が点 a から点 b へ行く確率 $P(a,b)$ は，遷移関数 $K(a,b)$ の絶対値 2 乗で与えられる：

$$P(a,b) = |K(a,b)|^2.$$

2. 遷移関数は位相因子 e^{iS} の和で与えられる．ここで S は，a から b のすべての可能な経路についてとった作用である：

$$K(a,b) = \sum_{\text{経路}} ke^{iS}.$$

連続的経路の極限で，

$$K(a,b) = \int_a^b Dx\ e^{iS}$$

を得る．ここで，

$$Dx = \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{3} \prod_{n=1}^{N} dx_{i,n}$$

である．

第 1 量子化した点粒子の作用は，粒子が時空で掃く経路の長さで与えられる．点粒子のラグランジアンは，3 通りに表され，

$$\begin{aligned} 1\text{ 次 (ハミルトニアン) 形：}\ L &= p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2}e(p_\mu^2 + m^2) \\ 2\text{ 次の形：}\ L &= \frac{1}{2}(e^{-1}\dot{x}_\mu^2 - em^2) \\ \text{非線形の形：}\ L &= -m\sqrt{-\dot{x}_\mu^2} \end{aligned} \tag{1.10.1}$$

となる．残念ながら，この 3 つの形の作用のどれもパラメーターつけかえの下で不変なため，経路積分は発散する．したがって量子化の手続きでこの対称性を破り，汎関数に正しい測度を与えなければならない．

これらの作用は 3 通りの方法で量子化でき，それぞれが固有の長所と欠点をもっている．

1. **クーロン量子化**

場のいくつかの値を固定することにより，たとえば

$$x_0 = t = \tau$$

としてわずわらしい負計量の状態を消すことができ，ラグランジアンは $\frac{1}{2}mv_i^2$ となる．したがってクーロン量子化の方法は明白にゴーストをもたない．しかしこの方法の欠点は明白なローレンツ対称性が破れており，それを各レベルで確かめねばならないので大変やっかいな点である．

2. **グプタ-ブロイラー量子化**
グプタ-ブロイラー量子化の方法の長所は，明白に共変的な量子化ということである．もちろん負計量のゴーストが理論の中をまわることが許されるが，最終的にはヒルベルト空間に直接ゲージ拘束条件を課すことにより除かれている：

$$[p_\mu^2 + m^2]|\phi\rangle = 0.$$

したがって S 行列は最終的には，ゴーストを含まない．しかしこのアプローチの欠点は，とくに相互作用するレベルでこれらのゲージ拘束条件を課すことがしばしば困難なことである．

3. **BRST 量子化**
この量子化の方法は，両方のアプローチの良い点をもっている．理論は明白に共変的であるが，理論にゴースト場を加えてちょうど負計量の状態を打ち消すようになっているので，S 行列はユニタリーである．BRST の方法では，1 次の形で $e = 1$ のゲージをとり，次に Faddeev-Popov の項 Δ_{FP} を汎関数に挿入して正しい測度を得ている．グラスマン変数を用いて，この行列式を指数化し作用に入れることができる：

$$\Delta_{\mathrm{FP}} = \det|\partial_\tau| = \int d\theta\ d\bar{\theta} e^{i\int d\tau \bar{\theta}\partial_\tau\theta}.$$

得られるゲージ固定した作用は，BRST 対称性と呼ばれる対称性をもっている．それは BRST チャージ Q によって生成される．

これらの方法を相互作用する場合に一般化するときは，経路積分では N 粒子散乱の遷移関数の基本公式から出発する：

$$\begin{aligned} A(k_1, k_2, \ldots, k_N) &= \sum_{\text{位相}} g^n \int Dx\Delta_{\mathrm{FP}} \exp\left\{i\int dt L(t) + i\sum_{i=1}^N k_\mu x_i^\mu\right\} \\ &= \sum_{\text{位相}} g^n \langle e^{i\sum_{i=1}^n k_\mu x_i^\mu}\rangle. \end{aligned} \tag{1.10.2}$$

N 粒子散乱振幅の第 1 量子化した記述では，ある位相について適当に和をとらなければならないので面倒である．これは第 1 量子化した形式では，ユニタリー性が明らかでないことを意味している．後で第 1 量子化した点粒子理論のこの問題点が，第 1 量子化した弦理論にそのままひきつがれることを見るであろう．しかし第 2 量子化した記述では，すべての位相は 1 つの作用から具体的に導けるのである．

第 1 から第 2 量子化した記述へ移ることは，経路積分の形式では簡単である．たとえば伝播関数は，第 1 または第 2 量子化の言葉で書ける：

$$\Delta_{ab} = \int_{x_a}^{x_b} Dx e^{i\int_{t_a}^{t_b} dt L(t)}$$
$$= \int D\psi D\psi^* \psi(x_a)\psi^*(x_b) e^{i\int DxL(\psi)}. \quad (1.10.3)$$

ここに，

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$$
$$L(t) = \frac{1}{2} m\dot{x}_i^2 \quad (1.10.4)$$
$$L(\psi) = \psi^*(i\partial_t - H)\psi$$

である．最後の方程式はシュレディンガーの波動方程式に対するラグランジアンで，経路積分の仮定と $L = \frac{1}{2}mv_i^2$ から出発して導ける．

相互作用に関しては，まったく同様にして第 1 量子化した理論から第 2 量子化した頂点を求めることができる．単に点粒子が他の点粒子にわかれる世界面についての汎関数積分を書き下し，次にこのグリーン関数を第 2 量子化した場についての汎関数積分として書けばよいのである．

点粒子の経路積分の詳細を注意深く与えた利点を，すぐに知ることになろう．この形式のほとんどすべてが，弦の形式に直接あてはまることを見出すからである．

参考文献

[1] 弦理論のレビューは次を見よ：J. H. Schwarz, ed., *Superstrings*, Vols. 1 and 2, World Scientific, Singapore, 1985; J. H. Schwarz, *Phys. Rep.* **89**, 223 (1982).

[2] M. B. Green, *Surv. High Energy Phy.* **3**, 127 (1983).

[3] V. Alessandrini, D. Amati, M. LeBellac, and D. I. Olive, *Phys. Rep.* **1C**, 170 (1971).

[4] S. Mandelstam, *Phys. Rep.* **13C**, 259 (1974).

[5] C. Rebbi, *Phys. Rep.* **12C**, 1 (1974).

[6] P. Frampton, *Dual Resonance Models*, Benjamin, New York, 1974

[7] J. Scherk, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 1213 (1975).

[8] G. Veneziano, *Phys. Rep.* **9C**, 199 (1974).

[9] M. Jacob, ed., *Dual Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1974.

[10] J. H. Schwarz, *Phys. Rep.* **8C**, 269 (1973).

[11] M. B. Green and D. Gross, eds., *Unified String Theories*, World Scientific, Singapore, 1986.

[12] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory*, Vols. 1 and 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[13] H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 438 (1974).

[14] D. Z. Freedman, P. Van Nieuwenhuizen, and S. Ferrara, *Phys. Rev.* **D13**, 32 (1976).

[15] S. Deser and B. Zumino, *Phys. Lett.* **62B**, 335 (1976).

[16] T. Regge, *Nuovo Cim.* **19**, 558 (1961).

[17] N. H. Christ, R. Friedberg, and T. D. Lee, *Nucl. Phys.* **B202**, 89 (1982).

[18] G. C. Wick and T. D. Lee, *Nucl. Phys.* **B9**, 209 (1969).

[19] M. Kaku, *Nucl. Phys.* **B203**, 285 (1982).

[20] M. Kaku, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1895 (1983); *Phys. Rev.* **D27**, 2809, 2819 (1983).
[21] G. Veneziano, *Nuovo Cim.* **57A**, 190 (1968).
[22] M. Suzuki, unpublished.
[23] P. Ramond, *Phys. Rev.* **D3**, 2415 (1971).
[24] A. Neveu and J. H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B31**, 816 (1971).
[25] A. Neveu and J. H. Schwarz, *Phys. Rev.* **D4**, 1109 (1971).
[26] K. Kikkawa, B. Sakita, and M. A. Virasoro, *Phys. Rev.* **184**, 1701 (1969).
[27] M. Kaku and L. P. Yu, *Phys. Lett.* **33B**, 166 (1970).
[28] M. Kaku and L. P. Yu, *Phys. Rev.* **D3**, 2992, 3007, 3020 (1971).
[29] M. Kaku and J. Scherk, *Phys. Rev.* **D3**, 430 (1971).
[30] M. Kaku and J. Scherk, *Phys. Rev.* **D3**, 2000 (1971).
[31] V. Alessandrini, *Nuovo Cim.* **2A**, 321 (1971).
[32] C. Lovelace, *Phys. Lett.* **32B**, 703 (1971).
[33] C. Lovelace, *Phys. Lett.* **34B**, 500 (1971).
[34] Y. Nambu, Lectures at the Copenhagen Summer Symposium (1970).
[35] T. Goto, *Prog. Theor. Phys.* **46**, 1560 (1971).
[36] P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi, and C. B. Thorn, *Nucl. Phys.* **B56**, 109 (1973).
[37] S. Mandelstam, *Nucl. Phys.* **B64**, 205 (1973); **B69**, 77 (1974).
[38] M. Kaku and K. Kikkawa, *Phys. Rev.* **D10**, 1110, 1823 (1974).
[39] J. Scherk and J. H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B81**, 118 (1974). 次も参照, T. Yoneya, *Prog. Theor. Phys.* **51**, 1907 (1974).
[40] M. B. Green and J. H. Schwarz, *Phys. Lett.* **149B**, 117 (1984); **151B**, 21 (1985).
[41] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. Martinec, and R. Rohm, *Nucl. Phys.* **B256**, 253 (1986); **B267**, 75 (1986).
[42] C. S. Hsue, B. Sakita, and M. A. Virasoro, *Phys. Rev.* **D2**, 2857 (1970).
[43] J. L. Gervais and B. Sakita, *Nucl. Phys.* **B34**, 632 (1971); *Phys. Rev.* **D4**, 2291 (1971); *Phys. Rev. Lett.* **30**, 716 (1973); 次も参照, D. B. Fairlie and H. B. Nielsen, *Nucl. Phys.* **B20**, 637 (1970).
[44] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and PathIntergrals*, McGraw-Hill, New York, 1965.
[45] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, *Ann. Phys.* **98**, 287 (1976).
[46] I. V. Tyupin, Lebedev preprint FIAN No.39 (1975), unpublished.
[47] L. D. Faddeev and V. N. Popov, *Phys. Lett.* **25B**, 29 (1967).

第2章

南部-後藤の弦

2.1 ボソン的弦

過去 50 年の間第 2 量子化した場の理論に対して開発されてきた標準的手法から，弦理論は一見かけ離れているように見える．これは弦理論が歴史的に，まず**第 1 量子化した理論**として発見されたためである．それが，弦理論がときには勝手な約束事のまとまりのない集合のように見える理由である．第 2 量子化した理論では 1 つの作用からすべてのことを導くことができるが，第 1 量子化した理論には余分の仮定が必要である．とくに頂点関数，相互作用の取り方，さらに摂動の図の重みなどは適当に仮定し，後でユニタリーになっていることを確かめなければならない．

幸運にも J. L. Gervais と崎田(B. Sakita)により，第 1 量子化した点粒子の経路積分の形式が弦に拡張されている．これにより相互作用する弦の力学を，非常にたやすく書き下すことができるようになった．

前章で，第 1 量子化した点粒子の理論を議論するための重要な数学的基礎を与えておいた．驚くべきことに，南部-後藤の弦のほとんどすべての主要な特徴が，第 1 量子化した点粒子の理論に何らかの類似点をもっている．もちろん弦理論には，世界面上での強力な対称性の存在といったまったく新しい特徴があるが，量子化の基本的な方法は前の章で調べた点粒子の場合のものがそのままあてはまるのである．

われわれはすでに第 2 量子化した場の理論のふつうの定式化が，第 1 量子化の形で書き直せることを見た．ふつうの共変なファインマン伝播関数(1.6.19)は，(1.3.28)，(1.3.30)，(1.3.37)により，

$$
\begin{aligned}
\Delta_F(x_1, x_2) &= \langle x_1 | \frac{1}{\Box - m^2} | x_2 \rangle \\
&= \langle x_1 | \int_0^\infty d\tau e^{-\tau(\Box - m^2)} | x_2 \rangle \\
&= \int_0^\infty d\tau \int_{x_1}^{x_2} Dx e^{-\frac{1}{2}\int_0^\tau d\bar{\tau}(\dot{x}_\mu^2 - m^2)}
\end{aligned}
\tag{2.1.1}
$$

と書ける．ここで，$x_\mu(\tau)$ にある粒子の，点 x_1 から出発し点 x_2 で終わる可能なすべての軌跡について積分する．すでに見たようにこの粒子が動きまわれる位相の特別な集合を考えることにより，理論に相互作用を人為的に入れた．たとえば散乱振幅は，

$$A(k_1, k_2, \ldots, k_N) = \sum_{\text{位相}} \int Dx\ \Delta_{\text{FP}}\ e^{-\int L d\tau + i \sum_{i=1}^{N} k_i \cdot x_i}$$
$$= \sum_{\text{位相}} \left\langle \prod_{i=1}^{N} e^{i k_i \cdot x_i} \right\rangle \qquad (2.1.2)$$

である．この和は ϕ^3 または ϕ^4 理論でなじみ深いファインマン図を作る位相についてとる．

ここで得られるファインマン図が，グラフであって多様体でないことに注意しておくことが重要である．相互作用の点の局所的な位相は $\mathbb{R}^n$ ではないので，多様体とはなり得ない．内線と相互作用の点には，何の相関もない．そのために第 1 量子化した相対論的点粒子の相互作用の点には，任意の高いスピンを導入してもよいことになる．したがって第 1 量子化した点粒子の理論には，相互作用の点に導入し得るいろいろなスピンや質量に対応した無限の任意性が存在する．さらに各ファインマン図の紫外特異性は，内線をつぶして図を「ピンチ」し，局所的位相を変えることができる仕方の数に対応していることが知られている．

しかしこの描像は，弦ではまったく変化する．経路積分の形式はほとんど同一に見えるが，非常に重要な違いがある．とくに経歴についての和は，2 つの異なる弦の間に描くことのできる管または面の可能なすべてのものについての和となる(図 2.1 を見よ)．そしてこの世界面は本当の多様体，すなわちリーマン面となり，そのため伝播関数と矛盾しない相互作用は非常に制限される．したがって**点粒子の理論は無限個書けるのに対して，弦理論は非常に少数しかないと期待される．**さらに超弦理論は，内線の 1 つを縮めてなくすことによって生じる紫外発散をもたない．弦の世界面を「ピンチ」して紫外発散を出すことができないのである．このように完全に位相的な議論により，弦理論には紫外発散がないことがいえる．(だがこのつぶした図は，質量 0 でスピン 0 の粒子が真空へ消えることを示す赤外発散として再解釈できることに注意する．しかし幸運なことに，超対称性のためにこれらの赤外発散は除ける．)

まとめると，経路積分の形式では，第 1 量子化した点粒子と第 1 量子化した弦理論の両方を比較的容易に取り扱うことができるが，この 2 つの理論には完全に位相的な

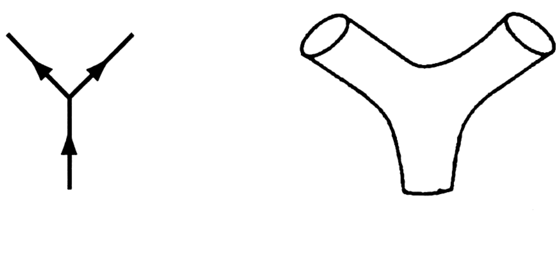


図 2.1：点粒子と弦の頂点関数．点粒子の理論ではファインマン図がグラフであるために，異なるスピンとアイソスピンを用いた多数の理論が可能である．しかし弦では，相互作用がグラフではなく多様体に制限されているので，少数の理論しか知られていない．共形対称性，モジュラー不変性および超対称性のために，超弦理論を構成するのに用い得る多様体に非常に大きな制限がつくのである．一方点粒子には，このような制限はない．

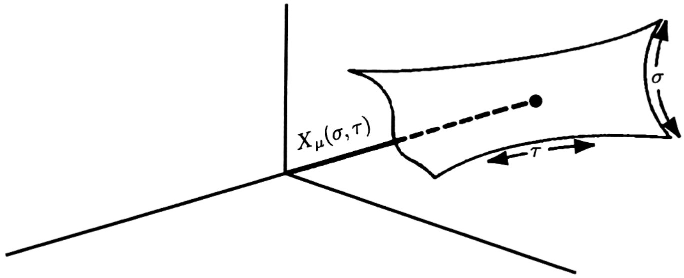


図 2.2：弦が掃く 2 次元世界面．σ で座標づけされた弦が時空を動くとき，それは σ と τ で座標づけされた 2 次元面を掃く．弦の変数 $X_\mu(\sigma,\tau)$ は，原点からこの 2 次元多様体上の点へのびるベクトルである．

議論から生じる非常に重要な物理的違いがある．

まず物理的時空の中で振動する弦の座標を導入して，弦の理論の議論を始めよう．弦にそった点が変数 σ でパラメーターづけされていて，弦が時間とともに伝播しているとする．ベクトル

$$X_\mu(\sigma,\tau) \tag{2.1.3}$$

が，2 つの変数でパラメーターづけされたこの弦の時空の座標を表すとする（図 2.2 を見よ）．弦が動くと 2 次元の面を掃く．これを「世界面」と呼ぶ．この世界面を 2 つの変数 σ と τ でパラメーターづけするのである．面に接するベクトルは，座標の微分で与えられる：

$$\text{接ベクトル} = \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau};\ \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}. \tag{2.1.4}$$

これら 2 つの接ベクトルを縮約して，計量が得られる：

$$g_{ab} = \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu. \tag{2.1.5}$$

ここで 2 つの変数 (τ,σ) を (a,b) の組で置き換え，a,b は 0 か 1 に等しいとした．この面上の無限小面積は，簡単に

$$d(\text{面積}) \sim \sqrt{\det|g_{ab}|}\ d\sigma\ d\tau \tag{2.1.6}$$

と書ける．点粒子の場合には，作用は点が動く長さになっている．それとの類推により，作用をこの世界面の面積であると定義する．したがって，ラグランジアンは [1–4]

$$L = \frac{1}{2\pi\alpha'}\sqrt{\dot{X}_\mu^2 X'^{\mu 2} - (\dot{X}_\mu X'^\mu)^2} \tag{2.1.7}$$

である．ここにプライムは σ 微分を表し，点は τ 微分を表す．（M 理論を議論するとき，同じように任意次元のメンブレインを導入する．この場合世界面上の 2 つの座標のかわりに，世界体積上の $(p+1)$ 個の座標がある．p ブレインの作用は同じで，計量テンソルの行列式の平方根である．作用は単にメンブレインの体積になる．）作用はラグランジアンを世界面上で積分したもので，2 次元面の全面積である：

$$S = \int d\sigma\, d\tau\, L(\sigma, \tau). \tag{2.1.8}$$

これを南部-後藤の作用という.「時刻」τ_a での位置 X_a から,「時刻」τ_b での位置 X_b への弦の伝播のグリーン関数，およびいくつかの相互作用している弦の位相を表す面についての経路積分は，

$$\begin{aligned} K(X_a, X_b) &= \int_{X_a}^{X_b} DX e^{-\int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau \int_0^\pi d\sigma L} \\ Z &= \sum_{\text{位相}} \int d\mu\, DX e^{-(\text{面積})} \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

と表される．ここで $DX = \prod_{\mu,\sigma,\tau} dX_\mu(\sigma,\tau)$ であり，$d\mu$ は外線の場所についての積分の測度を表し，積分が収束するよう τ 変数についてウィック回転 $(\tau \to -i\tau)$ しておいた．

前章で注意深く展開した点粒子の経路積分の形式と，弦の形式の間の対応は注目に値しよう．点粒子の形式のほとんどすべてが，弦の形式に取り入れられることがわかる：

$$\left\{ \begin{array}{c} x_\mu(\tau) \\ \text{長さ} \\ \prod_{\mu,\tau} dx_\mu(\tau) \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} X_\mu(\sigma,\tau) \\ \text{面積} \\ \prod_{\mu,\sigma,\tau} dX_\mu(\sigma,\tau). \end{array} \right\}$$

同様に点粒子と弦理論の経路積分も，驚くほど似ている．N 個の弦の散乱振幅に対する N 点関数も，点粒子の経路積分と似たフーリエ変換として書ける：

$$\left\{ \begin{array}{c} \int_{x_i}^{x_j} Dx\, e^{-\int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x) d\tau} \\ \left\langle \prod_{i=1}^N e^{ik_i x^i} \right\rangle \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \int_{X_i}^{X_j} DX\, e^{-\int_0^\pi d\sigma \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(X) d\tau} \\ \left\langle \prod_{i=1}^N e^{ik_i X^i} \right\rangle. \end{array} \right\}$$

経路積分の言葉で表したとき点粒子と弦理論は非常に似ているが，対象物が動き得る位相を分析してみるとその間に重大な差が現れてくる．点粒子の場合は位相はファインマン図のようなグラフであるのに対し，弦理論に対する位相は**多様体**なのである．

$$\text{グラフ} \longrightarrow \text{多様体}$$

非常に多くの点粒子の作用がある（そして非常に少数の弦の作用しかない）重要な理由の1つは，グラフと多様体の差にある．多様体に課される自明でない制限のために，矛盾のない弦理論の数が厳しく制約されてしまうのである．

点粒子の場合のように，パラメーターづけの選び方は完全に任意である．したがって，作用はパラメーターづけ不変でなければならない．これを見るために，任意の変数変換

$$\begin{aligned} \tilde\sigma &= \tilde\sigma(\sigma,\tau) \\ \tilde\tau &= \tilde\tau(\sigma,\tau) \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

を行おう．このパラメーターつけかえの下で，弦の変数は，

$$\delta X^\mu = X'^\mu \delta\sigma + \dot{X}^\mu \delta\tau \tag{2.1.11}$$

と変化する．面の面積はパラメーターづけによらないので，作用は明白にパラメーターつけかえ不変であることが容易にわかる．

前のように，理論の正準共役量を書き下そう：

$$P_\mu = \frac{\delta L}{\delta \dot{X}^\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{X'^2 \dot{X}_\mu - (\dot{X}_\nu X'^\nu) X'_\mu}{\sqrt{\det |\partial_a X^\nu \partial_b X_\nu|}}.$$

点粒子の場合のように，これらの運動量はすべて独立ではない．実際，正準運動量のみたす 2 つの恒等式があることがわかる：

$$\text{拘束}: \begin{cases} P_\mu^2 + \dfrac{1}{(2\pi\alpha')^2} X'^2_\mu \equiv 0 \\ P_\mu X'^\mu \equiv 0. \end{cases} \tag{2.1.12}$$

したがって正準運動量は，これら 2 つの条件で拘束されている．系のハミルトニアンを計算すると，(1.4.9)のように恒等的に 0 になることがわかる：

$$H = P_\mu \dot{X}^\mu - L \equiv 0. \tag{2.1.13}$$

ハミルトニアンが 0 になり，いろいろな運動量の間に拘束があることは，系が無限の余分さをもつゲージ系であることを示している．系のパラメーターつけかえ不変性が，その余分さの原因である．したがって，点粒子理論と弦理論の拘束の間には密接な対応があるのである：

$$\{p^2 + m^2 = 0\} \to \left\{ \begin{array}{c} P_\mu^2 + \dfrac{1}{(2\pi\alpha')^2} X'^2_\mu = 0 \\ P_\mu X'^\mu = 0 \end{array} \right\}.$$

弦の量子化の詳しい議論を始める前に，この弦の純粋に古典的な運動を調べておくことが有益である．まず古典的にパラメーター τ を時間と等しくしよう．すると，

$$\begin{aligned} \dot{X}_\mu &= (1, v_i) \\ X'_\mu &= (0, X'_i) \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

次に，$X_i'^2$ を(2.1.7)から引き出す：

$$L = -\frac{1}{2\pi\alpha'} |X_i'^2|^{1/2} (1 - \tilde{v}_i^2)^{1/2}. \tag{2.1.15}$$

ここで $\tilde{v}_i$ は，弦に垂直な速度成分である：

$$\tilde{v}_i = v_i - \frac{v_k X'_k}{X_j'^2} X'_i. \tag{2.1.16}$$

このゲージ固定した作用から得られる境界条件には，

$$\tilde{v}_i^2 = 1 \tag{2.1.17}$$

が含まれている．これは古典的弦の端が光の速度で動くことを意味している．

古典的弦のエネルギーを計算することもできる．弦がその角運動量を最大にするような配位になっていると仮定しよう．すなわち単位ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表される軸のまわりに，角運動量 $\boldsymbol{\omega}$ で回転する剛体棒とする．すると弦は，

$$\boldsymbol{X} = \sigma \boldsymbol{r} \tag{2.1.18}$$

とパラメーターづけされることになる．ここで

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega} &= 0 \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

であり，$-l \leq \sigma \leq l$ とする．

系のエネルギーと角運動量を計算するためには，弦に対するローレンツ生成子

$$M^{\mu\nu} = \int d\sigma (P^\nu X^\mu - P^\mu X^\nu) \tag{2.1.20}$$

を書き下さねばならない．ポアッソン括弧式

$$[X_\mu(\sigma), P_\nu(\sigma')] = \eta_{\mu\nu}\delta(\sigma - \sigma') \tag{2.1.21}$$

を課すと，これがローレンツ群の代数を生成することに注意する．これでローレンツ生成子の成分からエネルギーと角運動量を計算できる [5]：

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{-l}^{l} d\sigma (1 - \omega^2\sigma^2)^{-1/2} \sim \frac{l}{2\alpha'} \\ \boldsymbol{J} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{-l}^{l} d\sigma \frac{\sigma^2}{(1 - \omega^2\sigma^2)^{1/2}} [\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})] \\ &= \boldsymbol{\omega}(4\alpha'\omega^3)^{-1} \\ &\sim \boldsymbol{\omega} E^2 \alpha'. \end{aligned} \tag{2.1.22}$$

したがって回転する弦の角運動量は，系のエネルギーの 2 乗に比例していることがわかる：

$$|\boldsymbol{J}| \sim E^2. \tag{2.1.23}$$

エネルギーの 2 乗を x 軸に，角運動量を y 軸に目盛れば，**レッジェ軌跡**と呼ばれる曲線を得る．レッジェ軌跡の傾きは α' で与えられ，線は直線となる．こうして，剛体回転子の古典的運動に対する主要な (leading) レッジェ軌跡が得られる．この本では，規格化として $\alpha' = 1/2$ ととることにする．これは勝手にとってよい約束である．しかし後で見るように，理論を量子化すると共形不変性から，主要な軌跡の切片 α_0 は，1 にしなければならないことがわかる．それで，

$$\alpha' = \frac{1}{2},\ \alpha_0 = 1 \tag{2.1.24}$$

とおく．

系を量子化するとこのような平行なレッジェ軌跡が無限個あるが，それらの y 切片は負へ大きくなっているということがわかる．

すでに強調したように，点粒子と弦の場合では重要な違いがある．それは，弦の系はパラメーターづけのゲージ群を生成するより多くの拘束をもっていることである．そして正準ポアッソン括弧式を導入すると，拘束が代数を生成することを具体的に示すことができる．

この代数を計算するために，X と P を開いた弦の基準モードに分解しよう：

$$X^\mu(\sigma) = x^\mu + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}X_n^\mu\cos n\sigma$$
$$P^\mu(\sigma) = \frac{1}{\pi}\left\{p^\mu + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}P_n^\mu\cos n\sigma\right\}. \tag{2.1.25}$$

X の分解は，完全に余弦(cosine)だけで与えられていることに注意する．これは弦の運動方程式を計算する際に部分積分をしなければならないために，$\sigma=\pi$ と 0 で不必要な表面項が出てくるためである．これらの表面項を除くために，境界で

$$X'_\mu = 0 \tag{2.1.26}$$

を課さねばならない．この境界条件のために弦の正弦(sine)モードがないのである．(これらはノイマン境界条件と呼ばれている．弦の変数の値が定数であるディリクレ境界条件は，両端が時空で固定され静的な超平面で終わるので，非物理的な弦を与えると考えられた．しかしM理論を議論するとき，これらの超平面(Dブレインと呼ばれる)が時空を動きメンブレインのように振動することを見る．これらのDブレインは，弦理論のソリトン的解を理解するのに本質的であることを見るであろう.)

展開のこの形を利用するのが便利なことがときどきある．とくにこの形から，

$$X_\mu(\sigma) = X_\mu(-\sigma)$$
$$X'_\mu(\sigma) = -X'_\mu(-\sigma) \tag{2.1.27}$$

が得られる．同じことが正準共役 P_μ のモードに対し成り立つ．さらに，この弦の σ を $-\sigma$ へ反転させる変換の下での性質を用いて，(2.1.12)の両方の拘束を1つにまとめることができる．弦のパラメーターづけの長さを π とすると，

$$L_f = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma f(\sigma)\left(\sqrt{2\alpha'}\pi P_\mu + \frac{X'_\mu}{\sqrt{2\alpha'}}\right)^2 \tag{2.1.28}$$

と定義できる．ここで，$f(\sigma)$ は，$-\pi$ から π で定義された任意の関数である．この反転対称性のために，両方の拘束が1つの方程式にまとめられたことに注意する．そして(2.1.21)を用いて，これらの生成子が閉じた代数を形成することが示せる：

$$[L_f, L_g] = L_{f\times g}. \tag{2.1.29}$$

ここで

$$f\times g = fg' - gf' \tag{2.1.30}$$

である．この代数がヤコビ恒等式

$$[L_{[f}, [L_g, L_{h]}]] = 0 \tag{2.1.31}$$

をみたすことを示すこともできる．ここで添え字についている括弧は，可能なすべての巡回対称化を表している．この代数は Virasoro 代数［6］と呼ばれ，弦理論を構築する際のもっとも強力な道具であることが後でわかる．

(1.4.11) と同様に，ラグランジュ乗数場 $\lambda(\sigma,\tau)$ と $\rho(\sigma,\tau)$ を用いて，拘束を作用に入れることができる：

$$L = P_\mu \dot{X}^\mu + \pi\alpha'\lambda\left[P_\mu^2 + \frac{X'^2_\mu}{(2\pi\alpha')^2}\right] + \rho P_\mu X'^\mu. \tag{2.1.32}$$

これらのラグランジュ乗数場について汎関数積分すれば，前の拘束の組が得られる．驚くにあたらないが，この新しい作用は η と ε をパラメーターとするそれ自身のパラメーターつけかえの不変性

$$\begin{aligned}
\delta X_\mu &= 2\pi\alpha'\varepsilon P_\mu + \eta X'_\mu \\
\delta P_\mu &= \left[\frac{\varepsilon X'_\mu}{2\pi\alpha'} + \eta P_\mu\right]' \\
\delta\lambda &= -\dot{\varepsilon} + \lambda'\eta - \eta'\lambda + \rho'\varepsilon - \rho\varepsilon' \\
\delta\rho &= -\dot{\eta} + \lambda'\varepsilon - \varepsilon'\lambda + \rho'\eta - \eta'\rho
\end{aligned} \tag{2.1.33}$$

をもっている．この形の作用の長所は，1 次の形になっていてもとの作用の面倒な平方根を含まないことである．点粒子の場合のように，これは補助場を用いて表されるもう 1 つ別の形の作用が存在することを示している．この第 3 の形の作用を見つけるために，新しい独立な場

$$g_{ab}(\sigma,\tau) \tag{2.1.34}$$

を導入しよう．これは 2 次元の面上の計量を表す．前の議論とは異なり，この計量は今は弦の変数とはまったく独立である．ここで作用の Polyakov 形［7］を書き下そう ($g = |\det g_{ab}|$)：

$$L = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\sqrt{g}g^{ab}\partial_a X_\mu \partial_b X^\mu. \tag{2.1.35}$$

これは 2 次の点粒子作用 (1.4.14) の一般化である．Polyakov の作用は，外部の 2 次元重力場と相互作用しているスカラー場の作用と似ていることに注意する．この作用も，明白なパラメーターつけかえ不変性をもっている：

$$\begin{aligned}
\delta X^\mu &= \varepsilon^a \partial_a X^\mu \\
\delta g^{ab} &= \varepsilon^c \partial_c g^{ab} - g^{ac}\partial_c \varepsilon^b - g^{bc}\partial_c \varepsilon^a \\
\delta\sqrt{g} &= \partial_a(\varepsilon^a\sqrt{g}).
\end{aligned} \tag{2.1.36}$$

この作用はワイル変換

$$\delta g^{ab} = \Lambda g^{ab} \tag{2.1.37}$$

の下でも明らかに不変である．古典的レベルでは，Polyakov の作用は前の南部-後藤の作用と完全に同等である．南部-後藤の形式と同様に，この作用に対しても Virasoro

代数を導くことができる．計量テンソルについて変分して，エネルギー運動量テンソルが得られ，それを0とすることができるのである：

$$T_{ab} = -4\pi\alpha' \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta L}{\delta g^{ab}}. \tag{2.1.38}$$

これを具体的に求めると，

$$T_{ab} = \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X_\mu \tag{2.1.39}$$

を得る．エネルギー運動量テンソルのモーメントが，Virasoro 生成子に対応する．こうして新しいが同等なこの形式から，Virasoro 生成子を導く別の方法が得られた．

計量の場 g_{ab} は伝播する場でないことに注意する．計量テンソルに作用している微分が全然ないので，その運動方程式を用いてこれを消去することができる．こうして，

$$\frac{\delta L}{\delta g_{ab}} = 0 \longrightarrow g_{ab} = \frac{2\partial_a X_\mu \partial_b X^\mu}{g^{cd}\partial_c X_\nu \partial_d X^\nu} \tag{2.1.40}$$

を得る．計量テンソルのこの値を作用に再び代入すると，もとの南部-後藤の作用が再現される．したがって，古典的レベルでは2つの作用は同一である．

まとめると，点粒子の場合のように作用を書き下す3つの異なる方法が得られ，そのすべてが古典的に同等である．量子系へ移行するときには，各々が独自の長所と欠点をもっている．これらの弦の方程式は，(1.4.16)に見つけた3つの点粒子のラグランジアンを直接拡張したものである．前のように2次の形式は，弦の変数 X_μ と計量テンソル g_{ab} によって表されている．非線形の形は，X_μ のみで表される．ハミルトニアン形式は，X_μ とその正準共役 P_μ（あるいは $\partial_a X_\mu$ と $P^{a\mu}$ の対）で表される．

$$\begin{aligned}
\text{1次(ハミルトニアン)形: } L &= P_\mu \dot{X}^\mu + \pi\alpha'\lambda \left[P_\mu^2 + \frac{X'^2_\mu}{(2\pi\alpha')^2} \right] + \rho P_\mu X'^\mu \\
&\sim \sqrt{g} P^a_\mu g_{ab} P^{b\mu} + P^{a\mu} \partial_a X_\mu \sqrt{g}/\pi\alpha' \\
\text{2次形： } L &= \frac{-1}{4\pi\alpha'} \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu \\
\text{非線形の形： } L &= \frac{1}{2\pi\alpha'} (\dot{X}^2_\mu X'^2_\nu - (\dot{X}_\mu X'^\mu)^2)^{1/2}
\end{aligned} \tag{2.1.41}$$

最初は，これらの作用は完全に同等であるから1つを取れば他のものを落としてよいと思われる．これは次の2つの微妙な理由により，明らかに正しくない．

1. 第1量子化した理論を取り扱っているので，弦の掃くすべての相互作用の位相について和をとらなければならない．南部-後藤の弦に対しては，これらの位相の正確な性質はあいまいであり，適当に決めなければならない．しかし Polyakov の形の作用では独立な計量テンソルがあり，この不定性の大部分は**すべての共形およびモジュラー非等価な配位について和をとる**と決めれば除くことができる．（これらの術語は後で定義する.） これはループを扱うときの強力な制限となり，汎関数の測度を1通りに決定する．しかし南部-後藤の作用での測度と位相は，うまく定義されていない．（しかし Polyakov の場合でも，この非等価な面についての積分の規

則が自動的にユニタリー性をみたすわけではない．それは実際に確かめねばならないことである.)

2. Polyakov の作用のワイル不変性をゲージ固定することは古典的には自明であるが，量子力学へ移行する場合には問題を生じる．注意深く量子化の手続きをやってみるとアノーマリーが現れる．実はこの共形アノーマリーは，26 次元においてのみ消える．

さて，弦の作用の量子化を議論しよう．自由理論を量子化して物理的ヒルベルト空間を得るための戦略は，まず作用の対称性を引き出し，次にカレント，次にこの対称性の生成子が形成する代数を求めることである．(弦に対しては，対称性はパラメーターつけかえ不変性であり，代数は Virasoro 代数である.)　そしてヒルベルト空間に拘束条件を課してゴーストを消去し，ユニタリーな理論を作らねばならない．弦の量子化を始める際に，この戦略を心に留めておくことが重要である．

作用 ⟶ 対称性 ⟶ カレント ⟶ 代数 ⟶ 拘束 ⟶ ユニタリー性

点粒子の場合のように，量子化のプログラムは数通りに行える．理論のゲージを固定するには3つの形式がある．(1) グプタ-ブロイラー(共形ゲージ)形式，(2) 光錐ゲージ形式，(3) BRST 形式である．各々の長所と欠点は次の通りである．

1. グプタ-ブロイラー形式は，多分3つの形式のうちもっとも簡単なものである．作用にゴーストが現れるのを許しており，明白なローレンツ不変性が保たれている．しかし払わなければならない代償として，ヒルベルト空間にゴーストを消す条件を課さねばならない．すべての伝播関数に射影演算子を挿入しなければならない．樹木図ではこれは自明である．しかし高次ループでは，これは大変困難である．

2. 光錐ゲージ形式の長所は，作用にもヒルベルト空間にも明らかにゴーストが存在しないことである．ループへ行くときには何も問題はない．しかしこの形式は大変不便なもので，ローレンツ不変性を各段階で確かめねばならない．

3. BRST 形式は，前の2つの形式の良い特徴を組み合わせている．これはグプタ-ブロイラー形式のように明白に共変的であり，負計量のゴーストが Faddeev-Popov のゴーストと相殺するので，光錐形式のようにユニタリーである．

ここで，各量子化を別々に議論しよう．

2.2　グプタ-ブロイラー量子化

グプタ-ブロイラー形式は，理論の状態ベクトルに Virasoro 条件

$$\langle\phi|L_f|\psi\rangle = 0 \tag{2.2.1}$$

を課すことによりゴーストを消す．ここで $\langle\phi|$ と $|\psi\rangle$ は理論の状態を表す．この条件が状態ベクトルの中のゴーストを消去し，作用の中の非物理的な負計量ゴーストをそ

のままにしておいてもよいようにしてくれるのである．

古典的には，計量テンソルはゲージ変換で除ける 3 つの自由度をもっている．そのうち 2 つはパラメーターつけかえ不変性，1 つはワイル不変性からくるものである．計量テンソルは 3 つの自由度をもつので，その成分をすべてゲージ変換で除ける：

$$g_{ab} = \eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.2.2}$$

これを**共形ゲージ**(conformal gauge)という[1]．（すでに述べたように，量子論と高次ループに対して共形ゲージをとることには実は問題がある．） 作用は，

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_0^\pi d\sigma \int d\tau(\dot{X}_\mu^2 - X'^2_\mu) \tag{2.2.3}$$

となる．この作用は連成のない自由弦に対応しており，非常に簡単である．この作用から，自由運動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right) X_\mu(\sigma,\tau) = 0 \tag{2.2.4}$$

と境界条件

$$X'_\mu(0,\tau) = X'_\mu(\pi,\tau) = 0 \tag{2.2.5}$$

が得られる．後者は，部分積分をして表面項を落とすときに必要となる．運動方程式の解は，$\sigma+\tau$ と $\sigma-\tau$ の任意関数となる：

$$X^\mu(\sigma,\tau) = X_1^\mu(\sigma+\tau) + X_2^\mu(\sigma-\tau). \tag{2.2.6}$$

正準交換関係は，

$$[P_\mu(\sigma), X_\nu(\sigma')] = -i\eta_{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma') \tag{2.2.7}$$

となる．ただし，

$$\delta(\sigma-\sigma') = \frac{1}{\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^\infty \cos n\sigma \cos n\sigma'\right). \tag{2.2.8}$$

もちろん，経路積分の表現には無限個の可能性がある．しかし点粒子の場合のように，もっとも簡単な調和振動子の基底 [8] をいつでもとることができる．この場合ハミルトニアンが対角化される．しかし点粒子の場合と違って，今は各基準モードに 1 組ずつ，全体では無限個の振動子がある：

$$\begin{aligned} X_n^\mu &= \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'}(a_n^\mu - a_n^{\mu\dagger}) \\ P_n^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}(a_n^\mu + a_n^{\mu\dagger}). \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

ここで，

$$[a_{n\mu}, a_{m\nu}^\dagger] = \delta_{nm}\eta_{\mu\nu} \tag{2.2.10}$$

---

[1] 正確には，共形ゲージは g_{ab} が η_{ab} に比例する形にするだけで，成分を 1 に規格化はしない．しかし，古典的には残る自由度は作用に現れないので，以下の議論には影響しない．

とおけば，正準交換関係がみたされる．また通常同等な振動子の集合

$$\alpha_m^\mu = \sqrt{m}\, a_m^\mu; \quad m > 0$$
$$\alpha_{-m}^\mu = \sqrt{m}\, a_m^{\mu\dagger}; \quad m > 0$$
$$X^\mu(\sigma,\tau) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n\neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \cos n\sigma \tag{2.2.11}$$

を導入する．この基底で書けばハミルトニアンは，とくに簡単な形((1.3.37)を見よ)

$$\begin{aligned} H &= \int_0^\pi d\sigma (P_\mu \dot{X}^\mu - L) \\ &= \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma \left(P_\mu^2 + \frac{1}{(2\pi\alpha')^2} X'^2_\mu \right) \\ &= \sum_{n=1}^\infty n a_{n\mu}^\dagger a_n^\mu + \alpha' p_\mu^2; \quad \alpha_{0\mu} = \sqrt{2\alpha'} p_\mu \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

になる．ここで零点エネルギーについて無限大の量を落とした．この無限大のずらしのために最低の質量の粒子ははっきりわからないが，後でこの最低の粒子が実はタキオンであることを示す．模型の切片が1になることを示すのである．

各振動子モードが，基本的には他の振動子モードと結合していないことに注意する．実際，調和振動子の励起のフォック空間では，ハミルトニアンは対角的である．無限にある表示の仕方のうち弦の関数のこの特定の表示では，ハミルトニアンの許される固有状態が，すべての可能な調和振動子のフォック空間の単なる積になるので大変便利である：

$$固有状態： \quad \prod_{n,\mu} \left\{ a_{n,\mu}^\dagger \right\} |0\rangle. \tag{2.2.13}$$

ここで，真空は

$$a_{n\mu}|0\rangle = 0; \quad n \geq 0 \tag{2.2.14}$$

により定義されている．低い状態のスペクトルは，次のように分類できる(図2.3を見よ)：

$$\begin{aligned} タキオン &\longrightarrow |0\rangle \\ 質量0のベクトル &\longrightarrow a_1^{\mu\dagger}|0\rangle \\ 質量0のスカラー &\longrightarrow k_\mu a_1^{\mu\dagger}|0\rangle \\ 有質量スピン2 &\longrightarrow a_1^{\mu\dagger} a_1^{\nu\dagger}|0\rangle \\ 有質量ベクトル &\longrightarrow a_2^{\mu\dagger}|0\rangle. \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

(弦理論がこれほど量子化しやすい理由は，ハミルトニアンが弦の変数で2次であることに起因する．これはそれが無限個の自由粒子に分解することを意味する．非常にたくさんの弦理論の真空解が構成できるが，その理由は本質的に弦理論が自由理論だからである．しかしM理論を解析するときにはこんなに簡単ではない．ハミルトニアンは4次であり量子化ができない．弦理論の単純さに反して，自由メンブレインを量

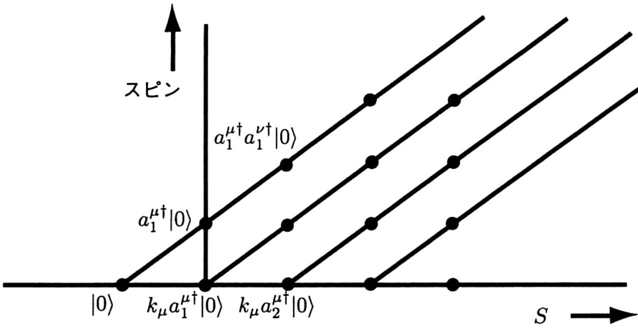


図 2.3：開いた弦のレッジェ軌跡．x 軸はエネルギー 2 乗に，y 軸はスピンに対応する．もっとも左の粒子はタキオンで，フォック空間の真空に対応する．質量 0 のスピン 1 の粒子は，マクスウェルまたは Yang-Mills 場で，1 つの生成演算子が真空に作用しているのに対応する．無限個のレッジェ軌跡があり，それらは相対論的弦の無限個の励起状態，すなわちフォック空間の無限個の状態に対応している．

子化する満足のいく方法はない.)

予期したように，前に古典的議論から得た主要なレッジェ軌跡と，負に大きくなる y 切片をもつ無限個の娘軌跡が得られる．このゲージでは，伝播関数またはグリーン関数は簡単な形となる：

$$K(a,b) = \langle X_a|e^{-H\delta\tau}|X_b\rangle$$
$$= \int_{x_a}^{x_b} DX\, \exp\left[-\int d\sigma\, d\tau \left\{\frac{1}{4\pi\alpha'}(\dot{X}_\mu^2 - X'^2_\mu)\right\}\right]. \tag{2.2.16}$$

ただし，

$$DX = \prod_\mu \prod_\sigma dX^\mu(\sigma) = \prod_{\mu,n} dX_n^\mu \tag{2.2.17}$$

である．

DX についての汎関数積分は，弦上の各点あるいは弦の各フーリエモードについての積分の無限個の積であることに注意しなければならない．

幸運なことに，この積分は具体的に実行できる．弦が $\tau=0$ から $\tau=\infty$ へ動くとしよう．調和振動子の空間ではハミルトニアンが対角的なので，τ についての積分を正確に実行でき，

$$\langle X_a|\int_0^\infty d\tau\, e^{-H\tau}|X_b\rangle = \langle X_a|\frac{1}{L_0-1}|X_b\rangle \tag{2.2.18}$$

を得る．ここで L_0 は，Virasoro 生成子(2.1.28)の第 0 フーリエ成分である．言い換えると，自由理論の伝播関数は，

$$D \equiv \frac{1}{L_0-1} \tag{2.2.19}$$

を弦の状態ではさんだものである．しかし恒等式

$$|X\rangle \int DX \langle X| = 1 \tag{2.2.20}$$

があるので，始状態と終状態の間にある各中間点での経路積分は除くことができる．実は N 点関数も簡単なので，弦状態についてのすべての汎関数積分を除くことができ，調和振動子のみで表せる．ここで調和振動子の形式は，経路積分の特定の表示にすぎないことをもう1度強調しておくのが重要であろう．これが簡単なのは，調和振動子のフォック空間でハミルトニアンが対角的であることの結果である．

ほとんど同様にして，閉じた弦も調和振動子で書ける．閉じた弦には $X' = 0$ の境界条件はなく，その基準モードを分解するのに正弦と余弦関数の両方を用いることができる．したがって閉じた弦では，振動子の数が2倍になる．そして振動子による分解は，

$$
\begin{aligned}
X_\mu(\sigma) &= x_\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (a_n e^{-in\sigma} + \tilde{a}_n e^{in\sigma} + a_n^\dagger e^{in\sigma} + \tilde{a}_n^\dagger e^{-in\sigma})_\mu \\
P_\mu(\sigma) &= \frac{p_\mu}{2\pi} + \frac{1}{2\pi\sqrt{2\alpha'}} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} (-ia_n e^{-in\sigma} - i\tilde{a}_n e^{in\sigma} + ia_n^\dagger e^{in\sigma} + i\tilde{a}_n^\dagger e^{-in\sigma})_\mu
\end{aligned}
\tag{2.2.21}
$$

で与えられる．閉じた弦のハミルトニアンは，

$$
\begin{aligned}
H &= \pi \int_0^{2\pi} d\sigma \left(\alpha' P_\mu^2 + \frac{X'^2_\mu}{4\pi^2 \alpha'} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (n a_n^\dagger a_n + n \tilde{a}_n^\dagger \tilde{a}_n) + \alpha' p_\mu^2
\end{aligned}
\tag{2.2.22}
$$

再びフォック空間は調和振動子で作られたすべての要素からなるが，今度は開いた弦にはなかった余分の条件

$$
(L_0 - \tilde{L}_0)|\phi\rangle = 0 \tag{2.2.23}
$$

がある．(この条件は，閉じた弦が σ 座標の原点に依存してはならないことと解釈できる．たとえば，演算子 $\int d\sigma e^{i\sigma(L_0 - \tilde{L}_0)}$ は2通りに解釈できる．第1は，これは σ 空間の中の回転を生成するので，σ 空間での 2π 回転について平均をとることに対応する．第2は，積分を実行すると $\delta(L_0 - \tilde{L}_0)$ となり，ヒルベルト空間に作用したとき条件(2.2.23)となる．この条件には後ほどたち返る．)

フォック空間は(図2.4を見よ)

$$
\begin{aligned}
\text{タキオン} &\longrightarrow |0\rangle \\
\text{質量 0 スピン 2} &\longrightarrow a_1^{\mu\dagger} \tilde{a}_1^{\nu\dagger} |0\rangle \\
\text{質量 0 スカラー} &\longrightarrow k_\mu k_\nu a_1^{\mu\dagger} \tilde{a}_1^{\nu\dagger} |0\rangle
\end{aligned}
\tag{2.2.24}
$$

からなる．閉じた弦のスペクトラムには，質量0のスピン2の粒子があることに注意する．弦理論をハドロンの模型として解釈していた頃には，このグラビトンのようなスピン2の粒子が存在することは大きな問題であった．それで粒子を，S 行列理論で発見されたポメロンの軌跡にあてはめる試みがなされていた．ところが樹木図とループへ拡張したとき，この質量0でスピン2の粒子が，アインシュタインの理論のグラ

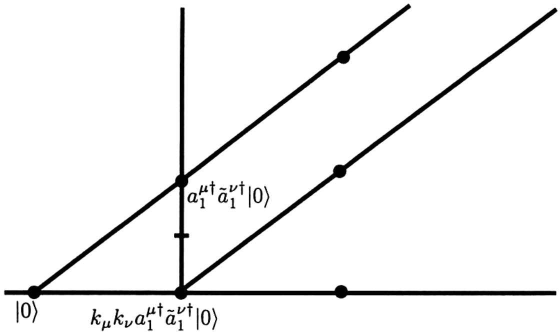


図 2.4：閉じた弦のレッジェ軌跡．フォック空間は 2 種の交換する調和振動子からなる．質量 0 でスピン 2 の粒子はグラビトンであり，真空に両方の演算子の積を作用させたものに対応する．

ビトンと同等なゲージ不変性をもつことが示せる．そこで弦理論をハドロンの模型とする以前の解釈を捨てて，このグラビトンのようなものをグラビトンそのものとする自然な解釈が得られることになった．

まとめると，共形ゲージでのグプタ-ブロイラーの形式は，主にゴーストが作用に現れることを許しているために簡単で美しいものとなっている．理論は可能なかぎり簡単な弦理論，すなわち自由な伝播する弦に帰着した．

しかしこのように簡単になっているために，フォック空間に条件を課さねばならないという代償が必要である．Virasoro 生成子は次のように書ける［6］：

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{\pi}{4}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{in\sigma}\left[P_\mu + \frac{X'_\mu}{2\pi\alpha'}\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha_{n-m,\mu}\alpha_m^\mu \\ L_0 &= \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{-n\mu}\alpha_n^\mu + \frac{1}{2}\alpha_0^2. \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

したがって，理論の**物理的状態**は

$$\begin{aligned} L_n|\phi\rangle &= 0; \quad n > 0 \\ (L_0 - 1)|\phi\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

をみたさなければならない．これらの演算子の生成する代数は，

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{D}{12}(n^3 - n)\delta_{n,-m} \tag{2.2.27}$$

である．ここに D は時空の次元である．この式に c 数の中心項(central term)が現れるということは最初は驚くべきことに思われるが，次の簡単な交換子の真空期待値を計算することにより，具体的に計算できるのである：

$$\langle 0|[L_2, L_{-2}]|0\rangle = \frac{D}{2}. \tag{2.2.28}$$

この中心項の起源は，生成子 L_0 が有限の行列要素をもつように**正規順序**をとったこと

にある．この正規順序づけは点粒子の場合にも(1.8.7)であったが，今はエネルギーのずれが無限大である点が異なる．こうして**有限の行列要素を得るためにわれわれが支払わなければならない代償として，σ についての局所性が失なわれてしまう**．正規順序づけのために，生成子 L_f がもともと σ の局所的関数であったということがこわれてしまうのである．つまり量子化の過程では，必然的に Virasoro 生成子の変数 σ についての局所性がこわれてしまい，したがって c 数の中心項が現れる．このように，この模型から有限の情報を引き出すために用いられる量子化と正規化の方法は，実は共形不変性と矛盾してしまうのである．ところが幸運なことに，時空の次元を 26 に決めればこの矛盾をなくすことができる．

理論にゴーストがあることは，調和振動子の第 0 成分が負の計量をもっていることに由来する：

$$\text{ゴースト} = \left\{a_{n,0}^{\dagger}\right\}|0\rangle. \tag{2.2.29}$$

このためグリーン関数の係数に負の符号が現れるからである．この他に考慮しなければならないゼロノルムの状態と負ノルムの状態が存在する．

スペクトラムを分析するために，**偽状態**(spurious state) $|S\rangle$ をすべての物理的実状態 $|R\rangle$ に直交している状態として定義しよう．偽状態は，ある整数 n とある状態 $|\chi\rangle$ を用いて

$$|S\rangle = L_{-n}|\chi\rangle; \quad n > 0$$
$$\langle R|S\rangle = 0$$

と書ける．(L_n が物理的状態を消すので，この状態と物理的状態との行列要素はいつも 0 になる.)　そこで，次の形の偽状態を作ろう：

$$|\psi\rangle = [L_{-2} + aL_{-1}^2]|\chi\rangle. \tag{2.2.30}$$

この状態が，物理的ヒルベルト空間の一部であってはいけない．けれども，これがどのような条件の下なら，物理的スペクトラムの一部であり得るかを調べてみよう．そこで，

$$L_1|\psi\rangle = L_2|\psi\rangle = 0 \tag{2.2.31}$$

とおいてみる．すると($L_n|\chi\rangle = 0$ を用いて)[2]

$$3 - 2a = 0; \quad \frac{1}{2}D - 4 - 6a = 0 \tag{2.2.32}$$

が得られ，さらに

$$D = 26; \quad a = \frac{3}{2} \tag{2.2.33}$$

と決まる．こうすると偽状態が(2.2.26)をみたし，したがって物理的フォック空間の一部となる．一見これは悲惨なことのように思われる．物理的ヒルベルト空間にはゴーストがないようにしたかったからである．ところが 26 次元では，この状態はゼロノルムをもつ(負ノルムでない)ことに注意しよう．$|\phi\rangle$ は任意であったから，同時に偽であり物理的である無限個の状態 $|\psi\rangle$ を作ったことになる．この高次の状態のノルムをと

[2] $|\psi\rangle$ が物理的状態であるためには，(2.2.26) に与えられているように $L_n|\psi\rangle = 0$, $(n > 0)$ だけではなく，質量殻条件 $(L_0 - 1)|\psi\rangle = 0$ も満たさなければならない．そのためには $(L_0 + 1)|\chi\rangle = 0$ が必要である(確かめよ)．この条件も使わなければ式(2.2.32) は出ない．

ると 26 次元で 0 になることがわかり，ゼロノルムの偽状態であることになる．この状態はノルムが負でないので許される．こうして 26 次元では，このような状態の集合は許容されるスペクトラムとなっている．

理論の状態ベクトルを同じように分析してみると，D が 26 よりも大きいと，物理的状態 $|\theta\rangle$ として実は負のノルムをもつものが構成できることがわかる：

$$|\theta\rangle = (a\alpha_{-1}^2 + bk\cdot\alpha_{-2} + c(k\cdot\alpha_{-1})^2)|0\rangle.$$

$L_1|\theta\rangle = L_2|\theta\rangle = 0$ を課すと，$b = a(D-1)/5$ と $c = a(D+4)/10$ が得られる．状態のノルムは，

$$\langle\theta|\theta\rangle = \frac{2}{25}a^2(D-1)(26-D)$$

となる．したがって時空の次元は 26 を越えられないか，そうでなければ物理的状態の一部に負ノルムの状態が存在することになる．一般に時空の次元が 26 より小さいか等しい場合に，スペクトラムにゴーストがないことがわかる：

$$\text{ゴーストなし}\left\{\begin{array}{ll} a=1, & D=26 \\ a\le 1, & D\le 25 \end{array}\right\}. \tag{2.2.34}$$

この分析は，フォック空間のほんの一部にしか行っていない．弦模型のすべての次数でゴーストは除けるのだろうか？ この章の終わりで，グプタ-ブロイラー形式におけるゴーストの除去という難しい問題に立ち返り，そこで物理的ヒルベルト空間を実際に構成し，それが 26 次元では負ノルム状態を含まないことを示すことにしよう．

2.3 光錐量子化

弦理論では 2 つのゲージ自由度があり，したがって 2 つのゲージ固定条件を経路積分に入れることができるので，すべての非物理的自由度が最初から陽に除かれている光錐ゲージをとることができる．これらのゲージ固定条件の 1 つとして，クーロンゲージのようにヒルベルト空間から非物理的モードを除くものがとれる．こうすれば，グプタ-ブロイラー形式では非常に複雑であるゴースト状態の除去(このことはこの章の終わりで示す)が光錐ゲージでは自明なことになる．

ここで

$$X^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}[X^0 \pm X^{D-1}] \tag{2.3.1}$$

としよう．すると，

$$A_\mu B^\mu = A_i B_i - A^+B^- - A^-B^+ \tag{2.3.2}$$

となる．(2.1.41)のどの作用を用いるかにより，異なるゲージ条件を課すことになる．たとえば，もとの南部-後藤の作用から出発すれば，経路積分のゲージ条件は

$$Z = \int DXM\Delta_{\mathrm{FP}}\prod_\sigma \delta(X^+(\sigma) - p^+\tau)\delta(\dot{X}_\mu^2 + X'^2_\mu - 2\dot{X}_\mu X'^\mu)e^{-S} \tag{2.3.3}$$

となる．ただし，M はユニタリーな理論にするために付け加えなければならない測度

の項で，2つのデルタ関数はゲージ固定条件を表す．第2の条件の良い点は，非常に非線形な平方根を含む南部-後藤の作用が完全に線形化することである［12］：

$$\sqrt{\dot{X}_\mu^2 X'^2_\nu - (\dot{X}_\mu X'^\mu)^2} \sim \frac{1}{2}(\dot{X}_\mu^2 - X'^2_\mu). \tag{2.3.4}$$

（光錐ゲージの作用はもはや平方根でないので，正準量子化できる性質のよい作用が得られたわけである．）

条件 $X^+ = p^+\tau$ は，X^+ の中の σ 依存性が完全に消えており，「時間」τ が X^+ と同期していることを意味している．次に第2の条件を用いて，X^- のモードを消すことができ，したがってすべての縦モードを完全に消せる．こうして，作用は完全に横波のモードだけで表せる．

次に，(2.1.41)の中の第1の作用において条件を解いてみる．作用のハミルトニアン形の中のラグランジュ乗数場 ρ と λ について積分して，ゲージ固定条件を課そう：

$$Z = \int DX\, DP \prod_\sigma \delta(X^+(\sigma) - p^+\tau)\delta\left(P^+(\sigma) - \frac{p^+}{\pi}\right)\delta\left(P_\mu^2 + \frac{X'^2_\mu}{\pi^2}\right)\delta(P_\mu X'^\mu)e^{-S}. \tag{2.3.5}$$

共変なハミルトニアン(2.1.13)は0なので，ラグランジアンの中の唯一の項は $P_\mu \dot{X}^\mu$ である（X^- の項は落ちる）：

$$L = \int_0^\pi d\sigma P_\mu \dot{X}^\mu = \int_0^\pi d\sigma (P_i \dot{X}^i - p^+ P^-(\sigma)). \tag{2.3.6}$$

この形式にはいくつかのすばらしい特徴がある．第1に，ヒルベルト空間に4つの条件を課すことができる（2つはゲージ固定から，もう2つは λ と ρ について積分して得られる）．第2に，共変なハミルトニアンは0なので作用は $P_\mu \dot{X}^\mu$ だけからなり，光錐ゲージでのハミルトニアンは(2.3.6)の分解から得られる：

$$H = p^+ \int_0^\pi d\sigma\, P^-(\sigma). \tag{2.3.7}$$

他方，P^- に対する条件は解けて，

$$P^-(\sigma) = \frac{\pi}{2p^+}\left(P_i^2 + \frac{X'^2_i}{\pi^2}\right) \tag{2.3.8}$$

を得る．光錐ゲージのハミルトニアンの定義(2.3.7)に P^- の値を入れて，

$$H = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi d\sigma \left(P_i^2 + \frac{X'^2_i}{\pi^2}\right) \tag{2.3.9}$$

を得る．これはちょうど，物理的横波状態について定義されたハミルトニアン(2.2.12)である．

同様にもう1つの条件

$$P_\mu X'^\mu = 0 \tag{2.3.10}$$

を解いて，X^- のモードを消去することができる．これを X^- について解くと，

$$X^-(\sigma) = \int_0^\sigma d\sigma' \frac{\pi}{p^+}[P_i X'_i] \tag{2.3.11}$$

を得る．以上をまとめれば，われわれの汎関数は

$$Z = \int DX_i \, DP_i \, e^{i \int d\tau \int d\sigma (P_i \dot{X}_i - H)} \tag{2.3.12}$$

となる．ここに H は光錐ゲージのハミルトニアン密度である．光錐ゲージの大きな利点は，Virasoro 条件が具体的に解かれており，それを状態に課す必要がないということである．すべての + モードは最初からゲージで除かれており，− モードは(2.3.8)と(2.3.11)により Virasoro 条件が厳密に解かれているために，横波状態によって表されている．Virasoro 条件をヒルベルト空間に課すかわりに，それを厳密に解き，− モードを消去しているのである．

しかしこの形式の大きな欠点として，計算の各段階でローレンツ不変性を確かめねばならないということがある．ふつうローレンツ群の生成子は

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} &= \int_0^\pi d\sigma [X^\mu P^\nu - X^\nu P^\mu] \\ &= x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu] \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

で与えられる．(2.2.7)から，これがローレンツ群に対する正しい交換関係

$$[M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}] = i\eta^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} + \cdots \tag{2.3.14}$$

をみたすことは容易に確められる．しかし，今はすべてのゴーストモードを陽に消去したという事実のために，もう 1 度ローレンツ不変性を確かめる必要がある．大部分の交換子は線形であるので，容易に確かめられる．問題なのは X^- から来る高度に非線形な項で，それは

$$X^- = x^- + p^- \tau + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma \tag{2.3.15}$$

となっている．ただし，

$$\alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\, : \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i : -2a\delta_{n,0}] \tag{2.3.16}$$

ここで a は切片と呼ばれる．X^- を含まない交換子はすべて容易に計算できる．X^- を含む交換子の計算は長くまた注意深く行わなければならないが，最終的な答は

$$[M^{-i}, M^{-j}] = \frac{-1}{p^{+2}} \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_{-n}^i \alpha_n^j - \alpha_{-n}^j \alpha_n^i] \Delta_n \tag{2.3.17}$$

となる．ここに，

$$\Delta_n = \frac{n}{12}(26 - D) + \frac{1}{n} \left[\frac{D - 26}{12} + 2 - 2a \right] \tag{2.3.18}$$

である．この交換子が 0 であるためには，

$$D = 26; \quad a = 1 \tag{2.3.19}$$

でなければならない．これでこの模型の時空の次元 D と切片 a が両方とも決まるのである．

2.4 BRST 量子化

点粒子の場合のように，BRST 量子化の方法は，Faddeev-Popov 量子化の処法から出発し新しいべき零の対称性演算子を求める．作用はパラメーターつけかえ(2.1.36)の下で不変である：

$$\begin{aligned}\delta g_{ab} &= g_{ac}\partial_b\delta\nu^c + \partial_a\delta\nu^c g_{cb} - g_{ab}\partial_c\delta\nu^c \\ &= \nabla_a\delta\nu_b + \nabla_b\delta\nu_a. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

(第2行は共変的に書いてあり，2次元の Christoffel 記号を含む．付録を見よ.）これにより，ゲージ条件

$$g_{ab} = \eta_{ab} \tag{2.4.2}$$

を課すことができる．これから Faddeev-Popov の行列式が出る：

$$\Delta_{\mathrm{FP}} = \det(\nabla_a) = \det(\nabla_z)\det(\nabla_{\bar{z}}). \tag{2.4.3}$$

この行列式は指数化して作用に加えることができる．これを行うためには，反交換するゴースト場 b と c を導入しなければならない((1.6.22)を見よ)．前のようにこれらのゴースト場により，微分の行列式を指数にのせることができる．$z=\tau+i\sigma$ と定義しよう．すると，

$$L = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\partial_z X_\mu \partial_{\bar{z}} X^\mu + b\partial_{\bar{z}}c + \bar{b}\partial_z\bar{c}\right) \tag{2.4.4}$$

となる．この作用は，

$$\begin{aligned}\delta X_\mu &= 2\varepsilon[c\partial_z X_\mu + \bar{c}\partial_{\bar{z}}X_\mu] \\ \delta c &= \varepsilon[c\partial_z c] \\ \delta\bar{c} &= \varepsilon[\bar{c}\partial_{\bar{z}}\bar{c}] \\ \delta b &= \varepsilon[c\partial_z b + 2\partial_z c\, b - \frac{1}{2}\partial_z X_\mu\partial_z X^\mu] \\ \delta\bar{b} &= \varepsilon[\bar{c}\partial_{\bar{z}}\bar{b} + 2\partial_{\bar{z}}\bar{c}\bar{b} - \frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}X_\mu\partial_{\bar{z}}X^\mu] \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

の下で不変である．

この変分と(1.9.8)より，べき零の BRST 演算子を求めることができる．しかし一般に，交換関係 $[\lambda_m,\lambda_n]=f^p_{mn}\lambda_p$ をもつどんなリー代数に対しても，反交換する演算子 c_n と b_n を用いてべき零の演算子 Q を構成することができる [10] ことに注意しておくのが重要であろう：

$$Q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}\left[\lambda_n - \frac{1}{2}f^{nmp}c_{-m}b_p\right]. \tag{2.4.6}$$

ここで，

$$\{c_n, b_m\} = \delta_{n,-m} \tag{2.4.7}$$

である．したがって，べき零の BRST 演算子は，

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} : c_{-n}\left(L_n^X + \frac{1}{2}L_n^{\mathrm{gh}} - a\delta_{n,0}\right) : \\ &= c_0(L_0^X - a) + \sum_{n=1}^{\infty}[c_{-n}L_n^X + L_{-n}^X c_n] - \frac{1}{2}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(m-n) : c_{-m}c_{-n}b_{n+m} : \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

という形に書ける．ここで，L_n^X は X に依存した Virasoro 生成子で，L_n^{gh} はその生成子へのゴーストの寄与である．ここで上の式には 2 つの決まっていないパラメーター，すなわち切片の値 a と時空の次元が含まれていることに注意する．Q の 2 乗を計算すると

$$Q^2 = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{D}{12}(m^3 - m) + \frac{1}{6}(m - 13m^3) + 2am\right)c_m c_{-m} \tag{2.4.9}$$

を得る．これは 0 でなければならない．そのためには時空の次元を 26 とし，切片を 1 に等しくしなければならないことがわかる．

点粒子の場合のように，理論の物理的状態は

$$Q|\mathrm{phys}\rangle = 0 \tag{2.4.10}$$

をみたさなければならない．モードを分離すると，基底状態は前のように

$$\begin{aligned} (L_0 - 1)|\phi\rangle &= 0 \\ L_n|\phi\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

をみたすことがわかる．

2.5　樹木

今までは自由な弦のみを量子化した．弦の相互作用は，汎関数の方法か，調和振動子の方法のどちらかで決定できる．2 つのうちで汎関数の方法の方がはるかに強力である．実際調和振動子の方法は，汎関数の方法の 1 つの特別な表示と見なすことができるのである．樹木と 1 ループでは，振動子の方法は振幅を計算する速くて便利な方法を与えてくれるが，高次ループに対しては振動子の方法は急速に実用的でなくなる．汎関数の方法は適用範囲が広く，樹木と 1 ループに対する振動子の方法を導くのにもすべてのループを導出するのにも，いつでも使うことができる．

歴史的には双対模型は，タキオンの散乱に対する量子振幅として偶然に発見されたものである．これらの振幅は**双対性**(duality) と呼ばれる見事な性質をもっており，それらは s チャンネルの極または t チャンネルの極で因子化できる．(この s と t チャン

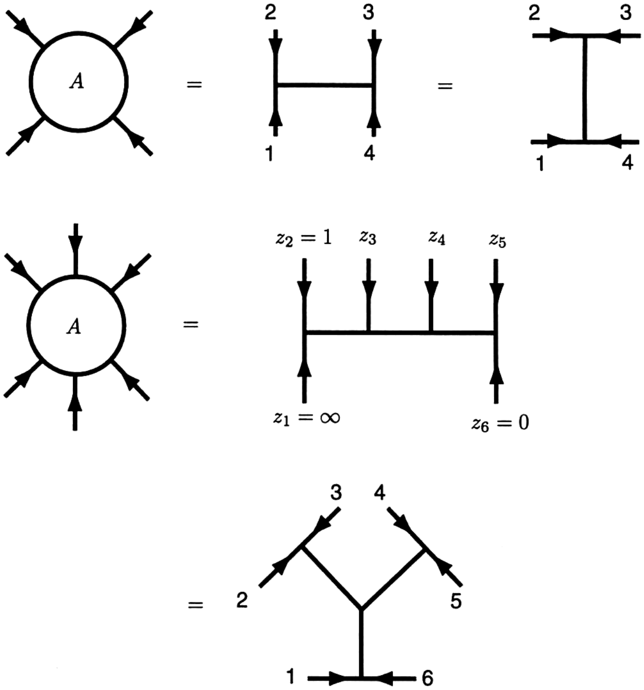


図 2.5：Veneziano 模型の双対性．4 点振幅は，s チャンネルまたは t チャンネルの極に分解できる．これは s と t チャンネルの極の両方の和をとる通常の点粒子の場の理論と異なる．この双対性の性質は，N 点関数にまで拡張される．この理由により，かつて弦の場の理論は不可能だと考えられた．弦の場の理論は，とくに高次において数えすぎの問題があると思われたのである．

ネルの間の双対性は，M 理論で見出すデュアリティーとはまったく違うものである.）ふつう点粒子の理論では，ファインマン図に s と t チャンネルの極を別々に加えるが（図 2.5 を見よ），双対振幅はすでに両方のチャンネルの極を同時にもっているので，s と t チャンネルの極を双対振幅に別々に入れると重複になってしまう．もっと複雑な図では，同じ N 点振幅が何通りにも因子化できることがわかる．これらの図の勘定はふつうのファインマン図の勘定と違うので，長年の間双対模型の真の場の理論的解釈は不可能であると間違って信じられていた．

点粒子の場合との類推により，タキオンの散乱に対する N 点散乱振幅を定義する [11–13]：

$$
\begin{aligned}
A_N(k_1, k_2, \ldots, k_N) &= \sum_{\text{位相}} \int d\mu_N \int Dg_{ab} \int DX \\
&\quad \times \Delta_{\mathrm{FP}} \exp\left[i \int L \, d\sigma \, d\tau\right] \left\{\prod_{i=1}^{N} \sqrt{g} \exp\left(ik_{i,\mu} X^{\mu i}\right)\right\} \\
&= \sum_{\text{位相}} \int Dg_{ab} \int d\mu \left\langle \prod_{i=1}^{N} \sqrt{g} \exp\left(ik_{i,\mu} X^{\mu i}\right)\right\rangle . \qquad (2.5.1)
\end{aligned}
$$

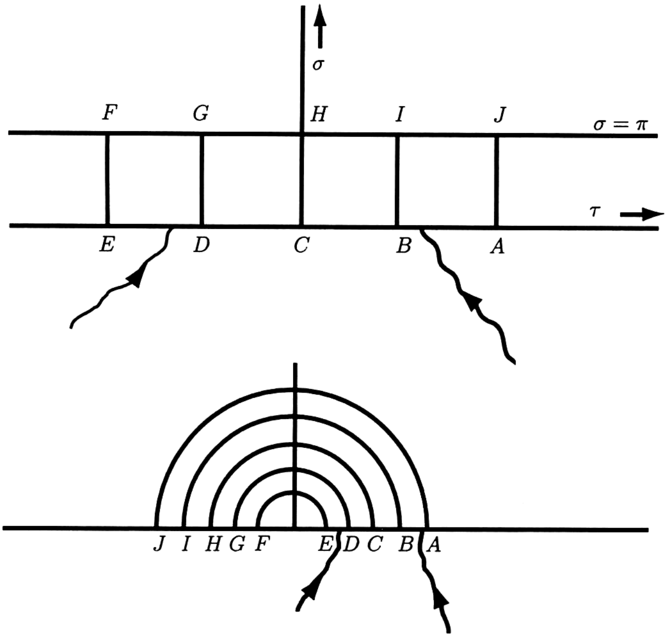


図 2.6：開いた弦の伝播に対する共形面．ρ 平面では，弦が伝播する面は幅 π の水平な帯である．下の波線は「ゼロ幅」の弦すなわち外線のタキオンに対応する．z 平面では，面は複素上半平面となる．1 つの面からもう 1 つの面への写像は指数関数で与えられる．

この式が相互作用する弦の理論を導き出す基本的な経路積分である．**第 1 量子化した定式化で，これがもっとも重要な公式**である．

この式で i 番目のタキオンからの運動量 k_i は，点 z_i にある面の境界へ流入している．弦の変数 $X^{\mu i}$ は，運動量 k_i が図に流れこむ境界上のその i 番目の点 z_i で定義されているのである．積分の測定 $d\mu$ はいろいろな z_i についての積分で，後で決める．

共形ゲージをとると，この式は非常に簡単になる．とくに，

$$
\begin{aligned}
A_N &= \int d\mu \int DX \exp\left\{ \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int (\partial_z X_\mu \partial_{\bar{z}} X^\mu) d^2 z + i \sum_{i=1}^{N} k_{i\mu} X^\mu \right\} \\
&= \sum_{\text{位相}} \int d\mu \left\langle \prod_{i=1}^{N} e^{ik_i \cdot X} \right\rangle
\end{aligned}
\tag{2.5.2}
$$

図 2.6 に，どのようにして弦の相互作用の図を簡単化するか示した．外線のタキオンに対し弦の相互作用の長さが 0 になるようにすると，弦の相互作用の面が複素平面の $\sigma = 0$ から $\sigma = \pi$ と $\tau = \pm\infty$ に拡がる無限の水平な帯に帰着されることがわかる．

$g_{ab} = \eta_{ab}$ と固定したので，作用はパラメーターつけかえ不変ではないが，まだ共形不変である（4.1 節を参照せよ）ことに注意する．したがって共形的に同等な面の数えすぎをさけるために，和をとるべき位相の集合を**共形的に同等でない** 2 次元複素面のすべての集合とする．

N 点樹木の世界面を，複素平面で水平に拡がる幅 π の水平な帯であるとする．x 軸

が τ に対応し，y 軸が σ に対応する．ここで，座標を複素変数

$$z = e^{\tau + i\sigma} \tag{2.5.3}$$

に変えよう．この写像により，(幅が 0 のタキオンと)相互作用する弦の世界面を記述する無限の帯は複素平面の上半面に写される．

幸いなことに汎関数はガウス型であり，前の章に与えた等式を用いて評価できる．$X_{\rm cl}$ を古典的運動方程式

$$\nabla^2 X_{\mu,{\rm cl}} = -2\pi i\alpha' J_\mu \tag{2.5.4}$$

の解としよう．ここに，

$$J_\mu(z) = \sum_{i=1}^{N} k_{i\mu}\delta^2(z - z_i) \tag{2.5.5}$$

で，z_i は弦と相互作用している外線の幅 0 のタキオンに対応する複素平面の実軸上の点である．τ 変数をウィック回転してやると，これはちょうど静電気のポアッソン方程式である．これを解くには，グリーン関数

$$\nabla^2 G(z, z') = 2\pi\delta^2(z - z') \tag{2.5.6}$$

が必要である．

上半平面に対し，ノイマン境界条件をみたすグリーン関数を計算しなければならない．これを計算するもっともやさしい方法は，静電気の理論で知られているトリック，すなわち鏡像法(method of images)を用いることである．上半平面の点 z' に点電荷をおこう．そして，x 軸に関して対称に移した点 $\bar{z}'$ にあるもう 1 つの点電荷を考える．$\bar{z}'$ は下半平面にある．上半平面の点 z に対して，その点でのポテンシャルは，

$$G(z, z') = \ln|z - z'| + \ln|z - \bar{z}'| \tag{2.5.7}$$

に比例する．

もし z が x 軸上にいて実であれば，x 軸に垂直なグリーン関数の微分は 0 であることに注意しよう．この境界条件はまさにわれわれが求めていたものになっており，したがって(唯一性の定理によって)これが上半平面のグリーン関数である．

このグリーン関数を，積分に再び代入する．(2.5.4)の解となっている X の古典値は

$$X_{\rm cl} = -i\alpha' \int G(z, z') J(z') d^2 z' \tag{2.5.8}$$

である．そこで，積分変数を

$$X_\mu \longrightarrow X_{\mu,{\rm cl}} + X_\mu \tag{2.5.9}$$

とずらそう．こうすれば，汎関数積分が(1.7.10)を用いて実行できることがわかる：

$$\int DX \, \exp\left\{-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int \partial_z X_\mu \partial_{\bar{z}} X^\mu d^2 z + i\int J_\mu X^\mu d^2 z\right\}$$
$$= \exp\left\{\frac{\alpha'}{2}\int J_\mu(z) G(z,z') J^\mu(z') d^2 z \, d^2 z'\right\}$$
$$= \prod_{i\neq j} \exp\left\{\alpha' k_i \cdot k_j \ln|z_i - z_j|\right\}$$
$$= \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{2\alpha' k_i \cdot k_j}. \tag{2.5.10}$$

ここに，

$$J^\mu(z) = \sum_j \delta^2(z - z_j) k_j^\mu$$

である．以上を(2.5.2)に代入して，

$$A_N = \int d\mu \prod_{1\le i<j\le N} |z_i - z_j|^{2\alpha' k_i \cdot k_j} \tag{2.5.11}$$

を得る．(発散する $i=j$ の「自己エネルギー」を除いたことに注意せよ．積分を有限にして，なおかつ理論の共形的性質を保つことができるのである．調和振動子の方法でも，この有限化をしなければならないことを見るであろう．)

さて，最後のステップとして，測度 $d\mu$ を決めなければならない．

予想として，振幅を z_i で表したときに測度は単に 1 であるとしてみる．これは，共形不変性と矛盾しない正しい取り方である．これを証明するために，**すべての共形的に同等でない面**について和をとらねばならないと前に述べたことを思い起こそう．実軸を実軸自身に写像するように，上半平面をそれ自身に写像する共形変換の集合を考える．一般に，お互いに写像される実軸上の点は，共形変換の部分集合，すなわち**射影**(projective)またはメビウス変換

$$y' = \frac{ay+b}{cy+d} \tag{2.5.12}$$

で変換する．ここで a,b,c,d は実で $ad-bc=1$ である．この 4 パラメーターの集合は，行列式が 1 の実行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{2.5.13}$$

を与える．一般に行列式が 1 のすべての実 2×2 行列の集合で定義される群は，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ となる(付録を見よ)．この変換群は，変換

$$\begin{cases} y \to y+b \\ y \to ay \\ y \to \frac{1}{y} \end{cases} \tag{2.5.14}$$

を次々に行って生成できることに注意しよう．このように振幅が測度の寄与も含めて，射影不変でなければならない．

被積分関数に射影変換を行って，それがどのように変換するか調べよう：

$$\prod_{i<j}(z_i - z_j)^{2\alpha' k_i \cdot k_j} = \prod_{i<j}(z'_i - z'_j)^{2\alpha' k_i \cdot k_j} \prod_k (a - cz'_k)^2. \tag{2.5.15}$$

この式で，不変でない項が測度と相殺するようにしたい．それには測度を数1として，積分領域を $z_i \geq z_{i+1}$ にとればよい．だがまだもう1つ問題がある．射影変換に対してさらに「ゲージを固定する」ことが必要で，そうしないと数えすぎになってしまうのである．z_i 変数について，射影変換で異なる各配位について必ず1度，しかも1度だけ積分しなければならないからである．もし外線運動量が z_i で与えられる点で上半平面に流れこむのであれば，射影変換に含まれる3つのパラメーターに対応して，これらの点のうち3つを任意に固定してもよい．このことは射影不変性を「ゲージ固定する」ことに対応しており，射影変換で同等でない配位のみを取り出していることになる．こうして最終的な結果は，

$$d\mu = \frac{\theta(z_i - z_{i+1})}{dV_{abc}} \prod_{i=1}^{N} dz_i \tag{2.5.16}$$

となる．ここで，3つの点 z_a, z_b, z_c からの寄与

$$dV_{abc} = dz_a\, dz_b\, dz_c (z_a - z_b)^{-1} (z_b - z_c)^{-1} (z_c - z_a)^{-1} \tag{2.5.17}$$

をあからさまに除いてある．z_a, z_b, z_c は，実軸上で勝手に取ってよい3つの点である．3つの変数を固定しているので，射影変換で同等でない配位のみ積分していることに注意しよう．(これらの3つの変数について積分すれば，積分領域のとりすぎになる．無限個の同じ量を積分していることになるのである．)

3つの固定点として，もつとも簡単なものは，

$$z_1 = \infty; \quad z_2 = 1; \quad z_N = 0 \tag{2.5.18}$$

である．この配位では，N 点振幅の最終的な形は

$$A_N = \int \prod_{i=3}^{N-1} dz_i \prod_{2\leq i<j\leq N} (z_i - z_j)^{2\alpha' k_i \cdot k_j} \tag{2.5.19}$$

となる [14–19]．積分領域は，

$$\infty = z_1 \geq z_2 = 1 \geq z_3 \cdots z_{N-1} \geq z_N = 0 \tag{2.5.20}$$

である．

これが N 点振幅の最終的な結果で，汎関数の手法のみを用いて導出した．

ここで行ったことをまとめてみよう．

1. 外線のタキオンの弦の長さを0にしたので，N 点振幅の世界面は幅 π をもつ複素平面内の水平な帯となった．外線のタキオンからの運動量は，実軸上の z_i という点でこの帯に流入する(図2.6を見よ)．

2. 帯から複素上半平面へ共形変換をすることにより，静電気でのトリック，鏡像法を用いてノイマン関数を具体的に求めた．

3. 射影不変性により，積分の測度が数 1 に決まった．外線の点を $z_i \geq z_{i+1}$ と順序づけした．

4. 射影変換で残された「ゲージを固定」した．すなわち，被積分関数の N 点のうち 3 つを固定した．

N 点振幅の前の表式(2.5.19)は，外線のタキオンが世界面の境界の特定の点に入る場合だけを考えている．原理的には，境界に任意のスピンの粒子があり得る．高いスピンの場合には，フーリエ変換の部分を表す同じ因子 $e^{ik\cdot X}$ に高スピンの偏極テンソルがかかっている．したがって $e^{ik\cdot X}$ はタキオンの頂点関数ではなく，実はフーリエ変換の一部であって，すべてのスピンに共通なものである．タキオンの本当の頂点関数は実は単なる数 1 なのである．

スピン 2 の頂点は，

$$V = \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\mu X^\mu} \tag{2.5.21}$$

で，$\varepsilon_{\mu\nu}$ は偏極テンソルである．一般の場合は，

$$V = \sqrt{g} g^{([a_1 a_2 \cdots} g^{a_{2m-1} a_{2m}])} \partial_{a_1} X^{\mu_1} \cdots \partial_{a_{2m}} X^{\mu_{2m}} \varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_{2m}} e^{ik_\mu X^\mu} \tag{2.5.22}$$

で与えられる．

2.6 経路積分から演算子へ

前節では，汎関数の方法を用いて N 点散乱振幅を計算した．計算の中で唯一自明でなかった点は，共形的に同等でない 2 次元複素面についての積分であり，それが振幅の積分の測度を決定した．

同じ計算は調和振動子の形式を用いても実行できるが，すでに強調したように，それはハミルトニアンを対角化した経路積分の特別な表示にほかならない．樹木と 1 ループに対しては，ハミルトニアンが調和振動子のフォック空間上で対角なので，調和振動子の方法は大変簡単である．しかし高次ループに対してはこれは成り立たない．調和振動子の方法は，どんどん難しく非実用的になるのである．したがって経路積分の方法が，比較的容易に高次ループ振幅を分析する唯一の系統的方法を与えてくれる．(しかしアノーマリーの計算は，調和振動子の形式の方が容易で，そこでは整数の添字 n が理論の切断を与えてくれる．第 5 章で見るように，経路積分の形式では点分離(point-splitting)の手法や他の正則化法を用いなければならない.)

汎関数形式では，自由な弦の伝播は，

$$\langle X_a | \int_0^\infty d\tau \, e^{-\tau H} | X_b \rangle = \langle X_a | \frac{1}{L_0 - 1} | X_b \rangle \tag{2.6.1}$$

で与えられることがわかっている．

同様に経路積分の中に中間状態の完全系を入れることにより，i 番目のタキオンの頂点関数が

$$\langle X_a | e^{ik_{i\mu} X_i^\mu} | X_b \rangle \tag{2.6.2}$$

で与えられることも知っている．ここで，

$$X^i_\mu = X_\mu(\sigma = 0, \tau = \tau_i) \tag{2.6.3}$$

である．そして恒等式

$$|X\rangle \int DX \langle X| = 1$$

を用いれば，N 点関数からすべての経路積分を除き，経路積分形式から調和振動子形式へ移ることができる．たとえば N 点タキオン振幅の経路積分の表式から出発し，調和振動子へ移ってみよう：

$$\begin{aligned}
A_N &= \int DX\, d\mu\, e^{-S} \prod_{i=1}^{N} e^{ik_i X(\tau_i)} \\
&= \int d\mu\, e^{-S} \left\{ \cdots e^{ik_j X(\tau_j)} |X_j\rangle \int DX_j \langle X_j| e^{ik_{j+1} X(\tau_{j+1})} \cdots \right\} \\
&= \int d\mu \left\{ \cdots e^{ik_j X(0)} |X_j\rangle \int DX_j \langle X_j| e^{-(\tau_{j+1}-\tau_j)H} e^{ik_{j+1} X(0)} \cdots \right\} \\
&= \int \prod_i d\bar{\tau}_i \langle 0, k_1| e^{ik_2 X(0)} e^{-\bar{\tau}_1 H} e^{ik_3 X(0)} \cdots |0, k_N\rangle \\
&= \langle 0, k_1| V(k_2) D V(k_3) \cdots V(k_{N-1}) |0, k_N\rangle.
\end{aligned}$$

この導出でいくつかの点を説明しなければならない．第1に，経路積分形式では，(2.5.10)の被積分関数で $i = j$ の寄与を除かなければならなかった．同様に，調和振動子形式でもそれを除かねばならない．調和振動子へ変換すると，頂点関数の表式(2.6.2)は形式的には無限大となる．たとえば指数の真空期待値を単純にとると，発散する和が得られる．われわれの欲しいのは正規順序づけされた表式で，有限の行列要素をもつものである．(2.2.11)を指数にしてみよう：

$$\begin{aligned}
&: \exp\, ik_{i\mu} X^{\mu i}(\sigma = 0, \tau_i) : \\
&= \exp\left\{ k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{-n}}{n} e^{in\tau_i} \right\} e^{ik\cdot x(\tau_i)} \exp\left\{ -k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} e^{-in\tau_i} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.6.4}$$

(正規順序は，すべての生成(消滅)演算子を左(右)へ移すことであり，それにより得られる演算子が有限の行列要素をもつ.)

第2に，経路積分から演算子へ移る際に，ハミルトニアンが τ のずらしの生成子であることを用いた．表式 $L_0 - 1$ が，複素平面での水平なずらしの有効ハミルトニアンとして作用する．任意の関数 f に対し，次の公式

$$y^{L_0} f(\alpha_n) y^{-L_0} = f(\alpha_n y^{-n}) \tag{2.6.5}$$

が役に立つことがわかる．そこで，

$$y^{L_0} V_0(k_i) y^{-L_0} = V(k_i, y_i = e^{-\tau_i}) \tag{2.6.6}$$

となる．経路積分から調和振動子へ移るときに，この表式を用いて τ_i での頂点関数を

原点での頂点関数へ変換した．

第3に，調和振動子の形式を導出する際に真空状態 $|0\,;\,k\rangle$ を導入した．汎関数積分では，複素平面の幅 π の無限の水平な帯になっている，相互作用している弦の世界面を考えたことに注意しよう．外線は実軸にそっておかれていた．したがって負(正)の無限大から入ってくる弦の効果は，半無限の帯についての汎関数積分に対応する．したがって真空の状態 $|0\rangle$ は，半無限の帯についての弦理論の汎関数積分である．運動量 k をもつタキオンの真空は，

$$|0;k\rangle = e^{ik\cdot x}|0;0\rangle \tag{2.6.7}$$

と表すことができる．ここで，

$$\alpha_n|0;0\rangle = 0; \quad n \geq 0 \tag{2.6.8}$$

以上をまとめれば，経路積分を調和振動子の形

$$\begin{aligned} A_N &= \int d\mu \int DX\, e^{-S} \prod_{i=3}^{N-1} dz_i \exp\left[ik_i X^{\mu i}(\sigma=0;\tau_i)\right] \\ &= \langle 0;k_1|V_0(k_2)DV_0(k_3)D\cdots DV_0(k_{N-1})|0;k_N\rangle \end{aligned} \tag{2.6.9}$$

に直すことができる．この調和振動子の表式は，汎関数形式の直接の帰結であることを認識しておくことが大事である．

幸いなことにこの振幅は容易に計算できる．練習としてまず4点関数を具体的に計算してみよう：

$$\begin{aligned} A_4 &= \langle 0;k_1|V(k_2)DV(k_3)|0;k_4\rangle \\ &= \int_0^1 dx\, x^{k_3\cdot k_4-1}\langle 0|\exp\left\{-k_2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\right\}x^R \exp\left\{k_3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_{-n}}{n}\right\}|0\rangle \\ &= \int_0^1 dx x^{-\frac{1}{2}s-2}(1-x)^{-\frac{1}{2}t-2} \\ &= \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s)-\alpha(t))} \\ &= B(-\alpha(s),-\alpha(t)). \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

ここで，

$$\begin{aligned} &\alpha(s) = 1 + \frac{1}{2}s \\ &s = -(k_1+k_2)^2; \quad t = -(k_2+k_3)^2; \quad u = -(k_1+k_3)^2 \end{aligned} \tag{2.6.11}$$

は Mandelstam 変数で，R は数演算子 $R=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{\dagger} a_n$ である．このように4点散乱振幅は，きれいな形をしている．実はそれはオイラーのベータ関数で表せる．このベータ関数は，1960年代後半の高エネルギー理論家たちの想像を最初かきたてた魅力的な物理的性質をもっている．それは G. Veneziano と鈴木(M. Suzuki)が，ハドロンの S 行列の有限エネルギー和則をみたす方法を探しているときにまったくの偶然で見

つけたものである．当時理論家たちは，次の S 行列のみたすべき G. Chew の基準をもつ散乱振幅を構成したいと考えていたのである．

1. ユニタリー性

2. ローレンツ対称性

3. CPT 不変性

4. 解析性

5. 交叉対称性

この表に，理論家はときどき

6. レッジェ的振る舞い，すなわち大きな s と固定した t に対し，

$$A(s,t) \sim s^{\alpha(t)} \tag{2.6.12}$$

　となること，および

7. 双対性，すなわち

$$A(s,t) = \sum_J \frac{c_J(t)}{s - M_J^2} = \sum_J \frac{c_J(s)}{t - M_J^2} \tag{2.6.13}$$

を付け加える．

　ハドロンの S 行列に対する「公理」はこんなに多いので，物理学者はそれがすべてみたされることはないだろうと悲観していた．そして，数学の本をめくっているうちにオイラーのベータ関数を偶然発見したとき，この2人の若い物理学者はこの解析関数がこれらの公理のうち1つを除いて他はすべてみたすことに驚いたのである．たとえばレッジェ的振る舞いは，Γ 関数のスターリングの近似

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi}\frac{x^x}{\sqrt{x}}e^{-x} \tag{2.6.14}$$

を用いて示すことができる．双対性も積分の限界 $x=0$ と $x=1$ に近いところでの被積分関数の極を評価して，示すことができる：

$$A(s,t) \sim \frac{1}{n!}\frac{(\alpha(t)+1)(\alpha(t)+2)\cdots(\alpha(t)+n)}{\alpha(s)-n}. \tag{2.6.15}$$

t チャンネルの極に対しても，同様の表式が存在する．実際，最初のユニタリー性を除くすべての仮定がみたされていることがわかる．(振幅の解析的構造が s と t 平面での一連の極であるという単純な理由のためにユニタリー性は破れている．第5章で見るように，本当のユニタリーな振幅は，極のかわりに虚数部と実軸にそったカットももっていなければならないからである.)

演算子の方法を用いて，今度は N 点関数について解くことができる．N 点振幅は（図 2.7 を見よ）

$$\begin{aligned} A_N &= \langle 0; k_1|V(k_2)D\cdots V(k_{N-1})|0; k_N\rangle \\ &= \int_0^1 \prod_{i=3}^{N-1} \frac{dx_i}{x_i} \langle 0; k_1|V(k_2,1)V(k_3,y_3)V(k_4,y_4)\cdots V(k_{N-1},y_{N-1})|0; k_N\rangle \end{aligned} \tag{2.6.16}$$

と書ける．ここで

$$\prod_{i=3}^{N-1} \frac{dx_i}{x_i} = \prod_{i=3}^{N-1} \frac{dy_i}{y_i} \tag{2.6.17}$$

$$y_i = x_3 x_4 \cdots x_i$$

である．（x^R の因子を交換して右へもっていき，真空で消滅させたことに注意せよ．）

コヒーレント状態の形式を用いると，この表式はもっとも容易に簡単化できる．フォック空間の任意の状態を，

$$|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}(a^\dagger)^n|0\rangle = e^{\lambda a^\dagger}|0\rangle \tag{2.6.18}$$

と表す．すると，

$$\begin{aligned} \langle \mu|\lambda\rangle &= e^{\mu^* \lambda} \\ x^{a^\dagger a}|\lambda\rangle &= |x\lambda\rangle \\ e^{\mu a^\dagger}|\lambda\rangle &= |\lambda+\mu\rangle \end{aligned} \tag{2.6.19}$$

を得る．これらの恒等式を次々に用いて，

$$\langle 0; k_1| \prod_{i=2}^{N-1} \frac{V(k_i,y_i)}{y_i}|0; k_N\rangle = \prod_{i<j}(y_i - y_j)^{2\alpha' k_i\cdot k_j} \tag{2.6.20}$$

を得る．こうして，汎関数を用いて導いた N 点関数(2.5.19)と同じ表式

$$A_N = \int \prod_{i=3}^{N-1} dy_i \prod_{2\le i<j\le N} (y_i - y_j)^{2\alpha' k_i\cdot k_j} \tag{2.6.21}$$

を得る．ここで y は，前のように実軸にそって順番に並べてあるが，実軸上の 3 つの点の値を 0，1 と ∞ にすでに固定しておいたことに注意しよう．

振動子の方法を用いれば，N 点関数が巡回対称であることが示せる．これは，振幅を $VDVDVDVDV$ のつながりで書いているときには明らかではない．それを示すには，2 つの頂点が互いにすれちがうときどうなるかを表す次の恒等式を用いる：

$$V(k_1,y_1)V(k_2,y_2) = V(k_2,y_2)V(k_1,y_1)\exp[2\alpha'\pi i k_i\cdot k_j \varepsilon(y_1-y_2)]. \tag{2.6.22}$$

ここで $x>0$ なら $\varepsilon(x)=1$，$x<0$ なら $\varepsilon(x)=-1$ である．

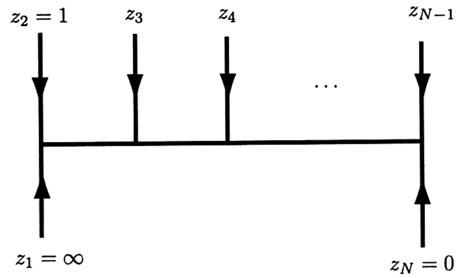


図 2.7：N 点関数．射影不変性により，N 変数のうち 3 つを固定することができる．もっとも便利なのは，第 1 の変数を無限大，第 2 の変数を 1，最後の変数を 0 にして，他のすべての変数を 1 と 0 の間に順番に並べておくやり方である．

また，真空 $|0;k_N\rangle$ を他の頂点と似た形に書き換えて，頂点の巡回並べかえの下での振幅の性質を計算できるようにしなければならない．次の恒等式

$$\lim_{y\to 0}\frac{V(k,y)}{y}|0;0\rangle = |0;k\rangle$$
$$\lim_{y\to\infty}\langle 0;0|yV(k,y) = \langle k;0| \tag{2.6.23}$$

を用いる．このように書けば，一番右と左にあるタキオンの状態はもはや他の状態と非対称ではない．右の頂点は 0 で定義されており，左の頂点は ∞ で定義されており，他のすべての頂点はその間に入っているだけである．

そこで，N 番目の頂点を振幅の中で完全に左へ移してしまうと，

$$\langle V(k_1,y_1)\cdots V(k_N,y_N)\rangle$$
$$= \langle V(k_N,y_N)V(k_1,y_1)\cdots V(k_{N-1},y_{N-1})\rangle \exp\left[2\alpha'\pi i k_N\cdot\sum_{i=1}^{N-1}k_i\varepsilon\right] \tag{2.6.24}$$

を得る．運動量の保存則

$$\sum_{i=1}^{N}k_i = 0 \tag{2.6.25}$$

と質量殻の条件 $\alpha' k_N^2 = 1$ を用いれば，最後の因子は落ちることに注意しよう．こうして**質量殻条件がみたされている場合のみ**，巡回対称な振幅が得られていることがわかる．(歴史的にはこれが，物理学者が弦の場の理論が多分可能でないと信じたもう 1 つの理由であった．定義により場の理論とは，質量殻条件のない定式化であるのに対し，Veneziano 模型のすばらしい特徴は質量殻条件をみたす場合にのみあるからである.)

2.7　射影不変性とトゥイスト

巡回対称性以外に，N 点関数の被積分関数はメビウス不変でもある．すなわち，次の変数変換をしても関数は同じになる：

$$y' = \frac{ay+b}{cy+d}. \tag{2.7.1}$$

ここで，

$$ad - bc = 1 \tag{2.7.2}$$

である．このメビウス不変性は前に汎関数の形式で示した．ここでは調和振動子の行列要素に直接メビウス変換をやってみよう：

$$\begin{aligned}&\langle 0;0|\frac{V(k_1,y_1)}{y_1}\cdots\frac{V(k_N,y_N)}{y_N}|0;0\rangle\\ &= \langle 0;0|\frac{V(k_1,y'_1)}{y'_1}\cdots\frac{V(k_N,y'_N)}{y'_N}|0;0\rangle\prod_{i=1}^{N}(a-cy'_i)^2.\end{aligned} \tag{2.7.3}$$

すでに見たように，この最後の因子は測度の変換

$$d\mu \to d\mu\prod_i(a-cy'_i)^{-2} \tag{2.7.4}$$

で相殺できる．実は頂点関数に対するこれらの無限小の変換の生成子は，実際に計算できる．当然ながら，これらのメビウス変換の生成子は Virasoro 生成子である．つまり，

$$\begin{aligned}T &= 1-\varepsilon\sum_n \alpha_n L_n\\ z &= z' + \varepsilon\sum_n \alpha_n z^{n+1}\end{aligned} \tag{2.7.5}$$

と定義しよう．すると，

$$\begin{aligned}TV(k_i,z_i)T^{-1} &= (1-\varepsilon\alpha' k_i^2\sum_n n\alpha_n z^n)V(k_i,z'_i)\\ [L_n, V(k_i,z_i)] &= z^n\left[z\frac{d}{dz}+n\alpha' k_i^2\right]V(k_i,z_i)\end{aligned} \tag{2.7.6}$$

である．この場合頂点 V が共形ウェイト (conformal weight) $\alpha' k_i^2$ をもつと言う．(弦模型にゴーストがないことの証明で，共形ウェイトは重要な役割りを演ずる．第 4 章で共形ウェイトの起源を説明し，それが Virasoro L_n によって生成される共形群の既約表現を表すことを示す．頂点関数が正しく定義されているためには，それが質量殻条件をみたすときウェイト 1 をもたねばならず，タキオンに対してはこれが成立している.)

明らかに L_n は頂点関数に作用するとき，共形変換を生成する．実際 Virasoro 代数の共形場に対する表現として，

$$L_n = -z^{n+1}\partial_z$$

をとれることが示せる．この表現は (2.2.27) の共形代数の定義 (から中心項を引いたもの) をみたし，複素変数 z の関数に共形変換を生じるものであることが示せる．

われわれは上半平面をそれ自身に，実軸をそれ自身に写像するような共形変換の部分

群，すなわち射影部分群に興味がある．この部分群は SL$(2,\mathbb{R})$ を生成する L_1, L_{-1}, L_0 によって生成される：

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}):\begin{cases}[L_1,L_0]=L_1\\ [L_{-1},L_0]=-L_{-1}\\ [L_1,L_{-1}]=2L_0.\end{cases} \tag{2.7.7}$$

これらの生成子が生じる頂点関数の変換は，容易に計算することができる：

$$\begin{aligned} e^{aL_1}V(y)e^{-aL_1}&=V[y(1-ay)^{-1}]\\ e^{bL_0}V(y)e^{-bL_0}&=V[e^by]\\ e^{cL_{-1}}V(y)e^{-cL_{-1}}&=V(y+c).\end{aligned} \tag{2.7.8}$$

もし U が SL$(2,\mathbb{R})$ の要素ならば，

$$U|0;0\rangle=|0;0\rangle \tag{2.7.9}$$

も成り立つ．(物理的状態は，正の n の L_n のみで消滅されることがわかっているので，これは最初驚くべきように思われるかもしれない．しかし，$|0;0\rangle$ は物理的状態ではない．それは $\alpha_0|0;0\rangle=0$ なので，

$$L_{-1}|0;0\rangle\sim\alpha_0\cdot\alpha_{-1}|0;0\rangle=0 \tag{2.7.10}$$

により，L_{-1} でも消滅されるのである．このように，$|0;0\rangle$ は SL$(2,\mathbb{R})$ 群の本当の真空に対応しているのであって，理論の物理的状態ではない．$|0;0\rangle$ に e^{ikx} をかけると，(x は α_0 と 0 でない変換関係をもつので)物理的状態となり，正の n に対し L_n で消滅される.)

以上をまとめれば，

$$\begin{aligned}&\langle 0;0|U^{-1}U\frac{V(k_1,y_1)}{y_1}\cdots\frac{V(k_N,y_N)}{y_N}U^{-1}U|0;0\rangle\\ &\quad=\langle 0;0|\frac{V(k_1,y_1')}{y_1'}\cdots\frac{V(k_N,y_N')}{y_N'}|0;0\rangle\prod_{i=1}^{N}(a-cy_i')^2\end{aligned} \tag{2.7.11}$$

が得られ，(2.7.3)を再現する．

Virasoro ゲージ群の他に，点粒子の場合にはまったくない弦理論の特徴がもう1つ別にある．それは「トゥイスト」の演算子である．弦は単に1つの線ではなく，2次元の世界面を掃くことを思い出そう．したがって世界面をトゥイストすると，位相的に同等でない世界面が掃かれる．たとえば1ループのレベルでは，これが穴のあいた円板とメビウスの帯の決定的な位相的な差である．

実軸上におかれた頂点関数が帯の頂上にある頂点関数に変換されねばならないことから，トゥイスト演算子 Ω の簡単な表式 [20] が導出できる：

$$\Omega V(\sigma=\pi)\Omega^{-1}=V(\sigma=0). \tag{2.7.12}$$

この変換の下での頂点関数の唯一の変化は，n 番目のレベルでの全振動子に $(-1)^n$ が

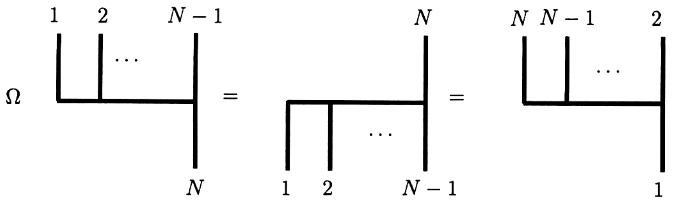


図 2.8：トゥイスト演算子の作用．トゥイスト演算子は因子化した足をねじり，全体の図を上下にひっくり返す．しかし双対性により，いつでも（外線の足の番号をつけかえた）もとの配位に書き直すことができる．

かかっていることである．したがって，トゥイスト演算子は，

$$\Omega = (-1)^{N+1} \tag{2.7.13}$$

でなければならない．ここで，

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n\mu} \alpha_n^{\mu} \tag{2.7.14}$$

である．当然そうであるべきように，これは

$$\Omega^2 = 1 \tag{2.7.15}$$

をみたすことに注意しよう．これでトゥイスト演算子が，全体の符号を除いて決まる．さらに N が偶の状態は荷電共役 C も偶であり，N が奇の状態は C の下で奇であることから，表式に選んだ Ω の値を決めてある．

トゥイスト演算子の形を得る同等な方法がもう 1 つ存在する．トゥイスト演算子の樹木への作用は，外線の方向を逆向きにすることである（図 2.8 を見よ）：

$$\Omega V_0(k_1) D V_0(k_2) \cdots V_0(k_{N-1}) |0; k_N\rangle = V_0(k_N) D V_0(k_{N-1}) \cdots V_0(k_2) |0; k_1\rangle. \tag{2.7.16}$$

樹木の順序が，トゥイスト演算子によって逆になることに注意しよう．この反転を起こす演算子を求めるために，まずこの表式を y 変数で書こう：

$$\Omega \int \prod_{i=2}^{N-1} dy_i V_0(k_1, y_1) \cdots V_0(k_N, y_N) |0; 0\rangle. \tag{2.7.17}$$

ここで，$y_1 \to 1$ と $y_N \to 0$ の極限をとる．

このように書いたとき変数変換

$$y_i' = 1 - y_i$$

によって振幅の巡回順序を反転し，y_1 と y_N を変換できることがわかる．ここで，この変数変換を起こす演算子を書きたい．前に頂点関数に射影変換を起こす $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ の生成子を書いておいた．この変数変換を調べてみると，トゥイスト演算子は

$$\Omega = (-1)^R e^{-L_{-1}} \tag{2.7.18}$$

でなければならないことが容易にわかる．

トゥイスト演算子のこの 2 つの形はまったく違うように思えるが，実はこれらは質量殻条件がみたされれば同等である．Veneziano 振幅は厳密に質量殻条件をみたしているので，トゥイスト演算子のどちらの形をとってもよいのである．

2.8 閉じた弦

今まで議論は開いた弦に限られており，外線のタキオンは弦の掃く共形帯の端点についていた．帯の端についている 2 つの点 z_i と z_j が近づくとき，Veneziano 模型に極が現れる．ここでは Shapiro-Virasoro 模型を分析しよう．これは開いた弦のかわりに閉じた弦に基づいており，経路積分を閉じた弦が掃く筒(または球面)上にとったものに対応する．この模型の極の構造は，もとの Veneziano 関数よりもずっと大きい．なぜなら筒の面が時空を動くにつれ，外線の状態はそのどこにでもくっつき得るからである：

$$A(s,t,u) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\alpha(s)\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\alpha(t)\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}(u)\right)}{\Gamma\left[-\frac{1}{2}(\alpha(t)+\alpha(u))\right]\Gamma\left[-\frac{1}{2}(\alpha(u)+\alpha(s))\right]\Gamma\left[-\frac{1}{2}(\alpha(s)+\alpha(t))\right]}. \tag{2.8.1}$$

この関数は，前の Veneziano 関数と違って，2 つのチャンネルだけでなく 3 つのチャンネルすべてに同時に極をもつ．これはただちに N 点関数

$$A_N = \int d\mu \prod_{2\le i<j\le N} |z_i - z_j|^{\frac{1}{2}k_i\cdot k_j} \tag{2.8.2}$$

に一般化された．ここで，

$$d\mu = |z_a - z_b|^2 |z_b - z_c|^2 |z_c - z_a|^2 \frac{\prod_{i=1}^N d^2 z_i}{d^2 z_a d^2 z_b d^2 z_c} \tag{2.8.3}$$

である．Veneziano 関数の場合のように，2 つの変数 z_i と z_j が近づいたときにこの振幅の極は現れる．ただし今は，単に実軸上のみではなく，複素平面のどこにでも極が現れるようになっている．

閉じた弦の量子化のためのわれわれの出発点は(2.2.21)であり，そこでは弦 $X_\mu(\sigma)$ とその共役量を基準モードに分解した．正準交換関係は(2.2.7)と同じであり，ハミルトニアンは(2.2.22)で与えられる．開いた弦の場合と同様に，調和振動子の形式では振幅も頂点と伝播関数の積に書くことができるが，今度は次のいくつかの重要な違いがある．

1. 今は，開いた弦の場合のように 1 組だけではなく，互いに交換する調和振動子 α_n と $\tilde{\alpha}_n$ の 2 つの集合について和をとらなければならない．

2. Virasoro 条件も共形生成子 L_n と $\tilde{L}_n$ の 2 つの集合が，物理的状態に作用するという条件に拡張される：

$$\begin{aligned} L_n|\phi\rangle &= \tilde{L}_n|\phi\rangle = 0 \\ (L_0-1)|\phi\rangle &= (\tilde{L}_0-1)|\phi\rangle = 0. \end{aligned} \tag{2.8.4}$$

3. 閉じた弦の状態は σ 座標の原点をどこにとるかによらないので，σ のすべてのずらしについて積分しなければならない．

4. 振幅は単に頂点と伝播関数の積ではない．外線が複素平面のどこにでもあり得るので，外線のすべての異なる順序について和をとらなければならない．

5. 頂点関数がウェイト 1 をもちアノーマリーが相殺する条件から，閉じた弦の切片は 2 で $\alpha' k^2 = 2$ となる．したがって，理論に必然的にグラビトンがあることになる．実際一般相対論の一般共変ゲージ対称性を線形化したものが，最低次の Virasoro ゲージ対称性として簡単に出てくる(第 7 章でこれを詳しく説明する)．

伝播関数の議論を始めよう：

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{1}{2\pi} \int_{|z| \le 1} z^{L_0 - 2} \bar{z}^{\tilde{L}_0 - 2} d^2 z \\
&= \frac{\sin \pi (L_0 - \tilde{L}_0)}{\pi (L_0 - \tilde{L}_0)} \frac{1}{L_0 + \tilde{L}_0 - 2}.
\end{aligned}
\tag{2.8.5}
$$

実はこれは単純な物理的解釈ができる．L の逆数因子は閉じた弦のふつうの伝播関数であることに注意しよう．一方正弦関数を含む関数は，

$$
L_0 = \tilde{L}_0 \tag{2.8.6}
$$

でなければ 0 になる[3]．この意味を理解するために，この関数が，

$$
\int d\sigma \, \exp \left[2\pi i \sigma (L_0 - \tilde{L}_0) \right] \tag{2.8.7}
$$

と表せることに注意する．この演算子は 2 通りの解釈ができる．積分を実際に遂行すれば演算子 $\delta(L_0 - \tilde{L}_0)$ を得るが，これは $(L_0 - \tilde{L}_0)|\phi\rangle = 0$ をみたさない状態 $|\phi\rangle$ を除くような，全体のヒルベルト空間に作用する射影演算子である．第 2 は，この演算子は 1 つの完全な周期の σ 回転の生成子なので，閉じた弦が動くとともにこの演算子を 1 つの完全な周期について積分しなければならないことを表している．このために閉じた弦の振幅は，どこに σ の座標づけの原点をとるかによらなくなる．(この条件は，後の章で閉じた弦のコンパクト化とヘテロティック弦を議論する際に重要な結果をもたらす.)

図 2.9 に世界面が，もともと幅が 2π の複素平面内の水平な帯で，上と下の側が互いに同一視されて(長い水平の管を作って)いるものからなることを示した．外線のタキオンはこの管の内部に入り得る．これらの座標を指数化して，この水平な管を全複素平面に変換することができる．そうすると外線は，平面内のすべての点に結合できることになる．

前と同じように，頂点関数は $: e^{ikX} :$ で与えられる．ここで弦 X は外線の運動量が入っている複素平面内の点にあるとする．2 組の調和振動子は交換するので，頂点関数

---

[3] $L_0 - \tilde{L}_0$ は，一般には整数になることと，分母に $L_0 - \tilde{L}_0$ の因子があるため．

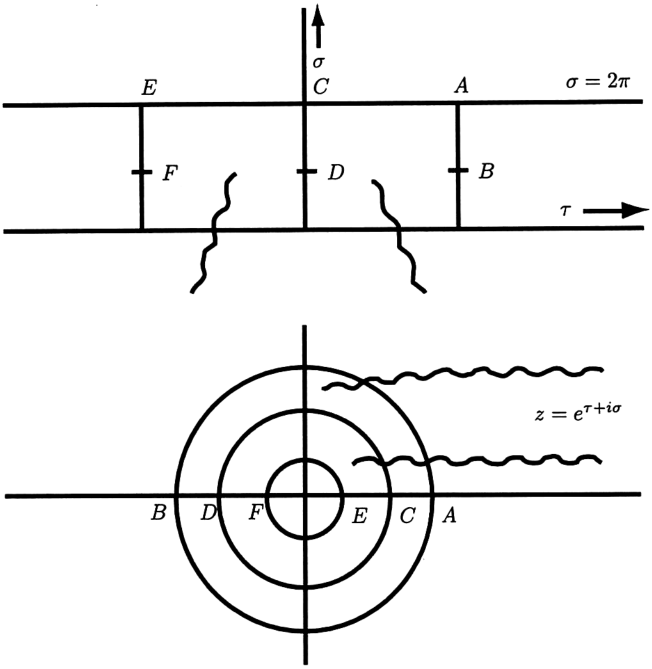


図 2.9：閉じた弦の伝播の共形面．ρ 平面では，弦は幅 2π の水平な帯で上と下の水平な線が互いに同一視されていて，位相的には管と同等なものを伝播する．開いた弦の場合と違い，外線は境界ではなく面の内部にくっつく．z 平面では，この面は指数写像により全複素平面に写像される．

は 2 つの開いた弦の頂点関数の積になる．タキオンの N 点散乱振幅の最終的表式は，

$$A_N = \sum_{\text{置換}} \langle 0; k_1 | V(k_2) D \cdots V(k_{N-1}) | 0; k_N \rangle \tag{2.8.8}$$

で与えられる [22, 23]．外線の順序のすべての可能な置換についての和をとってあるので，変数は複素平面を自由に動くことができることが保証されている．

2.9　ゴーストの除去

以上では，グプタ-ブロイラー量子化を用いて調和振動子形式を展開した．共形ゲージでは理論は明白な共変性を保ち，実は自由場に基づいた理論となっている．これが，樹木レベルの理論を書き下すのが容易である理由である．

しかしこの簡単さとひきかえに払わねばならぬ代償として，ゴーストを除くためにヒルベルト空間に直接 Virasoro 条件を課さねばならない．

一般にゴースト状態が樹木図に結合しないことの証明は，非常に簡単である．(この証明はループでは成り立たないので，正しくゴースト状態を除去するように非常に注意しなければならない.)　実物理的状態を，グプタ-ブロイラーの条件

$$\begin{aligned} L_n |R\rangle &= 0; \quad n > 0 \\ [L_0 - 1] |R\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{2.9.1}$$

をみたすものとして定義しよう．偽状態を，実状態に結合しないものとして定義しよう：

$$\langle S|R\rangle = 0. \tag{2.9.2}$$

このような状態は，うまい具合にある χ に対し

$$|S\rangle = L_{-n}|\chi\rangle \tag{2.9.3}$$

と表せる．そこで，偽状態が樹木に結合しないことが示せるとよい．すなわち，

$$\langle S|\mathrm{Tree}\rangle = 0 \tag{2.9.4}$$

これを示すには，さらに 2 つの恒等式

$$\begin{aligned}[L_n - L_0 - n + 1]V_0 &= V_0[L_n - L_0 + 1]\\ [L_n - L_0 + 1]\frac{1}{L_0 - 1} &= \frac{1}{L_0 + n - 1}[L_n - L_0 - n + 1]\end{aligned} \tag{2.9.5}$$

が必要である．（これは (2.7.6) から容易に証明できるが，それは外線のタキオンが $\alpha' k^2 = 1$ をみたし，頂点関数が共形ウェイト 1 をもつことに依存している．したがって頂点の共形ウェイトに対する制限が，理論のすべてのゴーストを除去するのに重要である.）

これら 2 つの恒等式から容易に

$$[L_n - L_0 - n + 1]V_0 D V_0 D \cdots V_0|0\rangle = 0 \tag{2.9.6}$$

を示すことができる．これが求めていた結果である．これにより L_n を右に押しやって，最後に真空で消えるようにできることがわかるからである[4]．

まとめると，偽状態は樹木に結合しないことを示した：

$$L_n|\mathrm{Tree}\rangle = 0 \to \langle S|\mathrm{Tree}\rangle = 0. \tag{2.9.7}$$

このことは，ゴーストがあっても樹木振幅の汎関数で特別な変更をしなくてもよいことを意味する．樹木振幅の中を伝播するゴースト状態は，自動的に自分たちで相殺してしまうのである．しかしループ関数は，内部を伝播するゴーストの問題をもっている．これは，

$$\langle S|\mathrm{Tree}|S\rangle \neq 0 \tag{2.9.8}$$

のためである．ループを得るために単純に樹木のトレースをとると，うっかりゴーストを含めることになるので，それを割り出しておかなければならない：

$$A_{\mathrm{loop}} = \sum_n \langle n|\mathrm{Tree}|n\rangle. \tag{2.9.9}$$

$|n\rangle$ についての和は，明らかにゴースト状態を含んでいるのである．

---

[4] $D_n = \frac{dz}{2\pi i z} z^{L_0+n-1}$ とすると，$D_0 = D$，$L_n D = D_n L_n$，$D_n(L_0 + n - 1) = 0$ となることも用いれば，$L_n D V_0 D V_0 \cdots V_0|0\rangle = 0$ が証明できる（第 1 章文献［7］を参照のこと）．

ゴーストが樹木からは分離するがループ図だけに寄与するというのは，まさにYang-Millsの場合に起こっていることである．Yang-Mills場へのFaddeev-Popovのゴーストの寄与は，理論の樹木にはないがループには寄与する．Faddeev-Popovのゴーストの寄与は((1.9.3)を見よ)

$$\bar{c}\partial_\mu D^\mu(A)c \tag{2.9.10}$$

であった．これは，ゲージ場Aとゴースト場cの次のような相互作用を生じることに注意しよう：

$$L_1 \sim \bar{c}Ac. \tag{2.9.11}$$

この結合は，ゴースト1つだけではゲージ場からなる樹木図に結合できないことを意味している．c場が内部だけでまわり得るループにだけ，それらは寄与し得るのである．それでループにおいて，Faddeev-Popovのゴーストが負計量の状態と相殺することを保証するように，特別の注意を払わなければならない．

しかしVirasoro条件がすべての可能なゴースト状態を完全に除去することの証明は，極めて複雑な問題である．原理的には光錐ゲージにいけるということが，理論にゴーストがないことを証明するのにふつうは十分である．しかしながら量子論でこれが破れるようなアノーマリーが絶対に生じないとは保証できない．したがってグプタ-ブロイラー形式で，フォック空間にゴーストがないことを，はっきり確かめておくのは重要なことである．この定理にはBrowerとThornとGoddardによる2つの独立な証明［24, 25］があるが，どちらもあまり簡単ではないので，読者は以下の議論はとばしてもよい．

いろいろ細かい点があるので，まずゴーストを除去するための戦術をスケッチしておこう．われわれの目的は，物理的演算子V_m^iと$\bar{V}_m^-$の集合で次のようなものを構成することである．

1. V_m^iと$\bar{V}_m^-$は，Virasoro生成子と交換する：

$$\begin{aligned}[L_n, V_m^i] &= 0\\ [L_n, \bar{V}_m^-] &= 0.\end{aligned} \tag{2.9.12}$$

2. V_n^iと$\bar{V}_n^-$が，物理的ヒルベルト空間を生成する：

$$|\text{phys}\rangle = V_{-n_1}^{i_1} V_{-n_2}^{i_2} \cdots V_{-n_N}^{i_n} \bar{V}_{-m_1}^- \cdots \bar{V}_{-m_p}^- |0;\, p_0\rangle. \tag{2.9.13}$$

そしてこの状態が正か0のノルムをもち，決して負ノルムをもたないようになっている．

D次元調和振動子のもとのフォック空間は，これらの$(D-2)$次元の横波演算子と$-$成分の演算子，およびもとのVirasoro演算子

$$\left\{V_{-n}^i, \bar{V}_{-n}^-, L_{-n}\right\} \tag{2.9.14}$$

で生成される状態の集合と同等である．L_{-n}はゴースト状態を生成するので，V_{-n}^iと

V_{-n}^{-} の状態だけをとることにより，ゴーストのない望ましい状態を生成する．これがわれわれの証明したいゴーストがないという結果である．

まず，

$$A_n^i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V^i(nk_0, \tau)d\tau \tag{2.9.15}$$

を定義しよう．ここで，

$$V^i(nk_0, \tau) = \dot{X}^i e^{ink_{0\mu}X^\mu(\tau)} \tag{2.9.16}$$

で，k_0 はヌルベクトル

$$\begin{cases} k_0^2 = 0 \\ k_0^- = -1 \\ k_0^+ = k_0^i = 0 \end{cases} \tag{2.9.17}$$

である．この頂点演算子は，質量 0 のベクトル粒子を挿入する頂点と見なすことができる．この特別な頂点関数を選んだのは，次の理由による．k_0 がヌルベクトルなので，Virasoro 生成子はこの頂点演算子と次の交換関係をもっていることに注意する：

$$[L_m, V(\tau)] = -i\frac{d}{d\tau}(e^{im\tau}V(\tau)). \tag{2.9.18}$$

これが全微分であることに注意しよう．円周について積分すると，これからただちに

$$[L_m, A_n^i] = 0 \tag{2.9.19}$$

が得られる．このようにこの頂点の形は，第 1 の条件がみたされるように選んである．すなわち，A は Virasoro 生成子と交換する．今の所 k_0 には，それがヌルベクトルであるという以外の条件はない．第 2 の条件をみたすためには，もっと制限をつける必要がある．

運動量 p_0 の基底状態ベクトルを考えることにし，p_0 と k_0 が

$$\alpha' p_0^2 = 1, \quad k_0 \cdot p_0 = 1 \tag{2.9.20}$$

をみたすとしよう．ここで，頂点演算子 A_n^i を状態ベクトル $|0; p_0\rangle$ に作用させよう．得られる状態は運動量 $p_0 + nk_0$ をもっている．この状態も質量殻条件をみたしてほしいので，

$$\alpha' M^2 = -\frac{1}{2}(p_0 + nk_0)^2 = -1 - n \tag{2.9.21}$$

を要求する．こうして，運動量ベクトル k_0 がヌル状態になるように制限することにより，頂点演算子が Virasoro 生成子と交換するようにし，基底状態に作用させたとき横波質量固有状態を生成するように，$k_0 \cdot p_0 = 1$ を要請したのである．

さて最後の条件，すなわちこれらの演算子が実際に物理的状態の全空間を生成することを，取り入れなければならない．ここで少々問題がある．最初は − のモードは，単に k_0 の値を共変にして作れると思うかもしれない．ふつう演算子の積の共形スピンは単にもとの値の和なので，これが正しいと期待される．ところが，正規順序づけの

ためにこれが成り立たない．実際 − 成分は，Virasoro 生成子と交換しないことがわかる：

$$[L_m, :\dot{X}^- e^{inX^+}:] = e^{im\tau}\left(-i\frac{d}{d\tau}+m\right) :\dot{X}^- e^{inX^+}: + \frac{1}{2}nm^2 e^{im\tau+inX^+}. \tag{2.9.22}$$

この困難を解決するためには，定義に余分の項を付け加えなければならない．完全な定義は，

$$V^\mu(k,\tau) =: \dot{X}^\mu e^{ik\cdot X}: + \frac{1}{2}ik^\mu \frac{d}{d\tau}(\log k\cdot\dot{X})e^{ik\cdot X} \tag{2.9.23}$$

である．この組み合わせは共形スピン1をもち，横波成分に制限したときその積分が前の表式にもどることが示せる．

次に，これらの場の間の交換子をとろう：

$$[V_m^\mu, V_n^\nu] = nk_0^\mu V_{m+n}^\nu - mk_0^\nu V_{m+n}^\mu + C_m^{\mu\nu}\delta_{m,-n}. \tag{2.9.24}$$

ここで，

$$C_m^{\mu\nu} = 2m^3 k_0^\mu k_0^\nu + m\eta^{\mu\nu} \tag{2.9.25}$$

である．これにより，

$$\begin{aligned} V_m^+ &= \delta_{m,0} \\ [V_m^i, V_n^j] &= m\delta_{ij}\delta_{m,-n} \\ [V_m^-, V_n^i] &= -nV_{m+n}^i \\ [V_m^-, V_n^-] &= (m-n)V_{m+n}^- + 2m^3\delta_{m,-n} \end{aligned} \tag{2.9.26}$$

と書ける．+ 成分は自明なものであり，横波演算子の交換関係はふつうの調和振動子と完全に同じであることに注意しよう．さて，− のモードをもう1度再定義しよう：

$$\bar{V}_n^- = V_n^- - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{D-2} :V_m^i V_{n-m}^i: . \tag{2.9.27}$$

以上をまとめれば，最終的な交換関係は，

$$\begin{aligned} [V_m^i, V_n^j] &= m\delta^{ij}\delta_{m,-n} \\ [V_n^-, V_n^i] &= 0 \\ [\bar{V}_m^-, \bar{V}_n^-] &= (m-n)\bar{V}_{m+n}^- + \frac{26-D}{12}m^3\delta_{m,-n} \\ [L_n, \bar{V}_m^-] &= [L_n, V_m^i] = 0 \end{aligned} \tag{2.9.28}$$

となる．これが最終的な交換関係の集合である．新しい $\bar{V}_m^-$ 演算子はもとの V_m^i 演算

子と交換し，どららも Virasoro 生成子と交換することに注意せよ．こうして，もとのフォック空間と置き換えることのできる，線形に独立な演算子の新しいヒルベルト空間を作ったのである：

$$\left\{a^{\mu}_{-n}\right\} \longrightarrow \left\{V^{i}_{-n}, \bar{V}^{-}_{-n}, L_{-n}\right\}. \tag{2.9.29}$$

物理的ヒルベルト空間は演算子 $\left\{V^{i}_{-n}, \bar{V}^{-}_{-n}\right\}$ で生成され，それらは光錐ゲージで物理的空間を生成する DDF 演算子［26］と同等である．さらに，次の状態

$$\bar{V}^{-}_{-n_1}\bar{V}^{-}_{-n_2}\cdots\bar{V}^{-}_{-n_N}|0\rangle \tag{2.9.30}$$

はゼロノルムである[5]．これは状態のノルムをとり $\bar{V}^{-}_{n}$ の交換関係を用いて，具体的に確かめられる．こうしてわれわれは，

$$\left\{V^{i}_{-n}, \bar{V}^{-}_{-n}\right\} \tag{2.9.31}$$

によって生成される状態の集合が，正かゼロのノルムをもち決して負のノルムをもたないという最後の結果を得る．これで Virasoro 条件がヒルベルト空間からゴーストを完全に除くという証明が完結した．

2.10 まとめ

弦の第 1 量子化した理論は，世界面のパラメーターつけかえ不変性を表すゲージ対称性という重要な点を除いては，点粒子の理論と非常に似通っている．点粒子の場合のように((1.4.16)を見よ)，弦には 3 つの同等な作用がある：

$$\begin{aligned}
\text{1 次 (ハミルトニアン) 形：}\quad L &= p_{\mu}\dot{X}^{\mu} + \pi\alpha'\lambda\left[p_{\mu}^{2} + \frac{X'^{2}}{(2\pi\alpha')^{2}}\right] + \rho P_{\mu}X'^{\mu} \\
&\sim \sqrt{g}P^{a}_{\mu}g_{ab}P^{b\mu} + P^{a\mu}\partial_a X_{\mu}\sqrt{g}/\pi\alpha' \\
\text{2 次形：}\quad L &= \frac{-1}{4\pi\alpha'}\sqrt{g}g^{ab}\partial_a X_{\mu}\partial_b X^{\mu} \\
\text{非線形の形：}\quad L &= \frac{1}{2\pi\alpha'}(\dot{X}^{2}_{\mu}X'^{2}_{\nu} - (\dot{X}_{\mu}X'^{\mu})^{2})^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.10.1}$$

経路積分の言葉で表したとき，点粒子の場合と弦理論に見つかった類似性をまとめてみよう：

---

[5] $D = 26$ に対して．

$$
\begin{aligned}
x_\mu(\tau) &\longrightarrow X_\mu(\sigma,\tau)\\
\text{長さ} &\longrightarrow \text{面積}\\
Dx = \prod_{\mu,\tau} dx_\mu(\tau) &\longrightarrow DX = \prod_{\mu,\tau,\sigma} dX_\mu(\sigma,\tau)\\
\int_{x_i}^{x_j} Dx\, e^{i\int L(x)d\tau} &\longrightarrow \int_{X_i}^{X_j} DX\, e^{i\int L(X)d\sigma d\tau}\\
\left\langle \prod_{i=1} e^{ik_i x^i} \right\rangle &\longrightarrow \left\langle \prod_{i=1}^{N} e^{ik_i X^i} \right\rangle\\
\text{グラフ} &\longrightarrow \text{多様体}\\
p^2 + m^2 = 0 &\longrightarrow \left(P_\mu + \frac{X'_\mu}{2\pi\alpha'} \right)^2 = 0.
\end{aligned}
$$

弦の作用を量子化するわれわれの戦術は，理論の対称性を書き下し，この対称性からカレントを引き出し，これらのカレントのみたす代数を計算し，ゴーストを消すためにこれらのカレントをヒルベルト空間に作用させることである．この本を通じて用いる戦術は，

作用 ⟶ 対称性 ⟶ カレント ⟶ 代数 ⟶ 拘束 ⟶ ユニタリー性

である．

これら3つの作用はどれもパラメーターつけかえ対称性をもっており，Virasoro代数が生成される：

$$
L_n = \frac{\pi}{4} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\, e^{in\sigma} \left[P_\mu + \frac{X'_\mu}{2\pi\alpha'} \right]^2 . \tag{2.10.2}
$$

これらの演算子の生成する代数は，

$$
[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{D}{12}(n^3 - n)\delta_{n,-m} \tag{2.10.3}
$$

である．

点粒子の場合のように，理論を量子化するには3つの方法がある．

グプタ-ブロイラー量子化

グプタ-ブロイラー形式では，ゲージを

$$
g_{ab} = \eta_{ab} \tag{2.10.4}
$$

に固定する．その結果作用はパラメーターつけかえ不変性を破るが，部分群の共形変換は保っている：

$$
L = \frac{1}{2\pi}(\dot{X}_\mu^2 - X'^2_\mu). \tag{2.10.5}
$$

もちろんこのラグランジアンには，X の時間的モードにある負計量のゴーストが含まれている．これを消すためにグプタ-ブロイラー量子化では，理論の状態ベクトルが

$$L_n|\phi\rangle = 0; \quad n > 0$$
$$(L_0 - 1)|\phi\rangle = 0 \tag{2.10.6}$$

をみたさねばならないとする．これにより拘束条件が，ヒルベルト空間で 0 になるように構成されている．

この形式の作用は非常に美しいが，払わねばならない代価として，状態ベクトルからゴーストを除くことがとくにループにおいて大変難しい．実際このゲージですべてのゴーストが除けることを示すためには，大変な数学的道具が必要である．

光錐量子化

光錐量子化のプログラムでは，

$$X^+ = 2\alpha' p^+ \tau \tag{2.10.7}$$

とおく．このアプローチの長所は，理論の余分なゴーストモードを最初からすべて，横波成分で表すことにより除いていることである．欠点は，この形式が扱いにくく，各段階でローレンツ対称性を確かめねばならないことである．驚くべきことに，破れた理論のローレンツ生成子の代数は 26 次元でのみ閉じる．とくに，交換子

$$[M^{-i}, M^{-j}] = \frac{-1}{p^{+2}} \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha^i_{-n}\alpha^j_n - \alpha^j_{-n}\alpha^i_n]\Delta_n \tag{2.10.8}$$

で問題が生じる．ここで，

$$\Delta_n = \frac{n}{12}(26 - D) + \frac{1}{n}\left[\frac{D-26}{12} + 2 - 2a\right] \tag{2.10.9}$$

である．この交換子が 0 になるためには，

$$D = 26; \quad a = 1 \tag{2.10.10}$$

でなければならない．

BRST 量子化

BRST の方法は，両方のアプローチの良い特徴を組み合わせている．作用のローレンツ不変性を保っているが，Faddeev-Popov 行列式のために，負ノルムの状態は理論の中にあるゴーストと相殺する．Faddeev-Popov の行列を指数化するとき，2 つの反交換するゴースト場 b と c を導入しなければならない．その結果得られる作用は，BRST チャージ

$$Q = c_0(L_0 - a) + \sum_{n=1}^{\infty}[c_{-n}L_n + L_{-n}c_n] - \frac{1}{2}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(m-n) : c_{-m}c_{-n}b_{n+m} : \tag{2.10.11}$$

で生成される対称性をもつ．そして，

$$Q^2 = 0 \tag{2.10.12}$$

を要求すると，切片が1で，時空の次元が26に決まる．理論の物理的状態は，

$$Q|\text{phys}\rangle = 0 \tag{2.10.13}$$

で定義される．

点粒子の理論と同様に，経路積分で異なる位相的な配位について和をとることにより相互作用が導入される．本章全体の基礎となっている相互作用する理論の基本的汎関数方程式は，

$$\begin{aligned} A_N = (k_1, k_2, \ldots, k_N) &= \sum_{\text{位相}} \int d\mu_N \int Dg_{ab} \int DX \\ &\quad \times \Delta_{\text{FP}} \exp\left[i \int L\, d\sigma\, d\tau \right] \left\{ \prod_{i=1}^{N} \sqrt{g} \exp\left(ik_{i,\mu} X^{\mu i} \right) \right\} \\ &= \sum_{\text{位相}} \int Dg_{ab} \int d\mu \left\langle \prod_{i=1}^{N} \sqrt{g} \exp(ik_{i,\mu} X^{\mu i}) \right\rangle \end{aligned} \tag{2.10.14}$$

である．共形ゲージでは，恒等式

$$\begin{aligned} &\int DX\ \exp\left\{ -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int \partial_z X_\mu \partial_{\bar{z}} X^\mu d^2z + i \int J_\mu X^\mu d^2 z \right\} \\ &= \exp\left\{ \frac{\alpha'}{2} \int J_\mu(z) G(z, z') J^\mu(z') d^2 z d^2 z' \right\} \\ &= \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{2\alpha' k_i \cdot k_j} \end{aligned} \tag{2.10.15}$$

を用いて，この振幅は厳密に計算できる．

共形ゲージでは，位相についての和はすべての**共形に同等**でない配位についての和で与えられる．上半平面をそれ自身に，実軸をそれ自身に写像する共形変換を考えれば，実軸上の点は射影変換 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

$$y' = \frac{ay + b}{cy + d} \tag{2.10.16}$$

によって変換する．ここで係数は実で $ad - bc = 1$ をみたす．これにより測度 $d\mu$ が決まり，N 点関数の公式は，

$$A_N = \int \prod_{i=3}^{N-1} dz_i \prod_{2 \le i < j \le N} (z_i - z_j)^{2\alpha' k_i \cdot k_j} \tag{2.10.17}$$

となる．ここで z は実軸にそって順番に並んでいるとしている．

共形ゲージでは，ハミルトニアンが振動子のモードのフォック空間上で対角なので，極めて容易に調和振動子の形式へ移れる．配位 X_a から X_b への伝播関数は，

$$\left\langle X_a \left| \int_0^\infty e^{-\tau H} d\tau \right| X_b \right\rangle = \left\langle X_a \left| \frac{1}{L_0 - 1} \right| X_b \right\rangle \tag{2.10.18}$$

となる．頂点は，

$$\langle X_c | e^{ik_{i\mu} X^{\mu i}(0,\tau_i)} | X_d \rangle \tag{2.10.19}$$

に等しい．

$$|X\rangle \int DX \langle X| = 1 \tag{2.10.20}$$

なので，すべての弦の固有状態を取り除くことができる．こうして，N 点関数は，

$$A_N = \langle 0; k_1 | V_0(k_2) D V_0(k_3) \cdots V_0(k_{N-1}) | 0; k_N \rangle \tag{2.10.21}$$

に等しくなる．

演算子の形式では，演算子 $L_{\pm 1}$ が射影群 SL(2, $\mathbb{R}$) を生成するということを用いて，射影不変性を確かめることができる．実際任意の共形変換の下で，頂点は次のように変換する：

$$TV(k_i, z_i)T^{-1} = (1 - \varepsilon \alpha' k_i^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n z^n) V(k_i, z_i'). \tag{2.10.22}$$

すなわち，

$$[L_n, V(k_i, z_i)] = z_i^n \left[z_i \frac{d}{dz_i} + n\alpha' k_i^2 \right] V(k_i, z_i) \tag{2.10.23}$$

頂点 V は，$\alpha' k_i^2 = 1$ の共形ウェイトをもっているという．

ゼロまたは正のノルムをもつ物理的状態だけを生成する演算子を具体的に構成することができる．前の恒等式によると，共形スピンが 1 の演算子は自動的に Virasoro 生成子と交換する．これにより，質量 0 のスピン 1 の粒子の頂点に基づいた演算子で，物理的空間を生成するものが作れる．互いに交換する演算子の 3 つの集合で，合わせて調和振動子の全体のフォック空間を生成するものを構成できるのである：

$$\left\{ V_{-n}^i, \bar{V}_{-n}^-, L_{-n} \right\} |0\rangle. \tag{2.10.24}$$

V_{-n}^i と $\bar{V}_{-n}^-$ から作られる状態のみをとって，L_{-n} を落とすことにより，正とゼロのノルムをもつ状態だけを含む新しいフォック空間が得られる．こうして，

$$L_n |\phi\rangle = 0$$
$$(L_0 - 1)|\phi\rangle = 0$$

をみたす状態の集合は，26 次元で負ノルム状態をもたないことが結論される．

最後に，弦理論のハミルトニアンは弦の変数について 2 次なので，量子化が容易であることに注意する．単純な調和振動子を用いて理論を量子化することができる．しかし M 理論では，メンブレインのハミルトニアンが 4 次なので，そんなに単純ではない．今のところ，メンブレインを満足のいくように量子化する方法はない．

参考文献

[1] Y. Nambu, Lectures at the Copenhagen Summer Symposium (1970).
[2] T. Goto, *Prog. Theor. Phys.* **46**, 1560 (1971).
[3] 初期の定式化については次も見よ：H. B. Nielsen, 15*thInternational Conference of High Energy Physics* (Kiev), 1970.
[4] L. Susskind, *Nuovo Cim.* **69A**, 457 (1970).
[5] C. B. Thorn, in *Unified String Theory* (edited by M. B. Greenand D. Gross), World Scientific, Singapore, 1985 を参照.
[6] M. A. Virasoro, *Phys. Rev.* **D1**, 2933 (1970).
[7] A. M. Polyakov, *Phys. Lett.* **103B**, 207, 211 (1981).
[8] S. Fubini, D. Gordon, and G. Veneziano, *Phys. Lett.* **29B**, 679 (1969).
[9] P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi, and C. B. Thorn, *Nucl. Phys.* **B56**, 109 (1973).
[10] M. Kato and K. Ogawa, *Nucl. Phys.* **B212**, 443 (1983).
[11] C. S. Hsue, B. Sakita, and M. A. Virasoro, *Phys. Rev.* **D2**, 2857 (1970).
[12] J. L. Gervais and B. Sakita, *Nucl. Phys.* **B34**, 632 (1971); *Phys. Rev.* **D4**, 2291 (1971);*Phys. Rev. Lett.* **30**, 716 (1971).
[13] D. B. Fairlie and H. B. Nielsen, *Nucl. Phys.* **B20**, 637 (1970).
[14] K. Bardakçi and H. Ruegg, *Phys. Rev.* **181**, 1884 (1969).
[15] M. A. Virasoro, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 37 (1969).
[16] C. J. Goebel and B. Sakita, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 257 (1969).
[17] H. M. Chan, *Phys. Lett.* **28B**, 425 (1969).
[18] H. M. Chan and S. T. Tsou, *Phys. Lett.* **28B**, 485 (1969).
[19] Z. J. Koba and H. B. Nielsen, *Nucl. Phys.* **B12**, 517 (1969); **B10**, 633 (1969).
[20] I. Caneschi, A. Schwimmer, and G. Veneziano, *Phys. Lett.* **30B**, 351 (1969).
[21] M. A. Virasoro, *Phys. Rev.* **177**, 2309 (1969).
[22] J. Shapiro, *Phys. Lett.* **33B**, 361 (1970).
[23] M. Yoshimura, *Phys. Lett.* **34B**, 79 (1971).
[24] P. Goddard and C. B. Thorn, *Phys. Lett.* **40B**, 235 (1972).
[25] R. C. Brower and K. A. Friedman, *Phys. Rev.* **D7**, 535 (1973).
[26] E. Del Giudice, P. Di Vecchia, and S. Fubini, *Ann. Phys.* **70**, 378 (1972).

第3章
超弦理論

3.1 超対称点粒子

超対称性はすべての対称性の中でもっとも美しいものの１つであり，ボソンとフェルミオンを１つの多重項にまとめる．

$$\text{フェルミオン} \leftrightarrow \text{ボソン}$$

異なる統計の場を統一することにより，超対称性と超群はまったく新しい数学の分野も切りひらいている．

しかし皮肉なことに，それを支持する実験的証拠は，ただのひとかけらさえも見つかっていない．たとえば物理学者は電子とニュートリノを超対称的な多重項にあてはめようとしたが，これらのレプトンのスカラーの相棒は見つかっていないのである．実際現在知られている粒子のどれ１つとして，超対称の相手はない．批評家には，超対称性を「問題を探している解答」と呼ぶ人もいる．

超対称性の概念を支持する実験データはまったくないが，超対称性がはかりしれない有望さをもつ非常に望ましい理論的機構を豊富に与えてくれることは否定できない．超対称性は単に素粒子を美的に満足のいく多重項にまとめるきれいな方法というだけではない．場の量子論に対して，次のようなはっきりした実用的応用ができるのである．

1. 超対称性は，ふつうは発散する多くのファインマン図を相殺する超ウォード-高橋恒等式を与える．たとえばループの中をボソンとフェルミオンがまわっているファインマンのループ図は，-1 の因子だけ違う．そのため超対称性により，ボソンのループがフェルミオンのループを相殺してずっとゆるやかな発散が残る．したがって超対称性をもつ Yang-Mills 理論は，ふつうのゲージ理論よりくりこみの性質が良いことがわかる．実際ある「非くりこみ定理」が，摂動論の全次数で証明できるのである．

2. 超対称性は，ふつうの大統一理論(GUTs)にある「階層性の問題」を解決するかもしれない．GUTs には２つのかけ離れたエネルギースケール，すなわち 10 億電子ボルトのふつうの粒子物理のエネルギースケールと，10^{16} 億電子ボルト程度の GUTs のエネルギースケールがある．これら２つのエネルギースケールの間には，新しい現象は何もない広大な「砂漠」があることになっている．しかしくりこみの効果を

計算すると，この2つのエネルギースケールは必然的に混ざり合い始める．たとえばクォーク質量に対するループの補正が，エネルギースケールをGUTsのスケールまで押し上げることもある．原理的には，結合定数と質量を手で「微調整」しておけば階層性の問題は解決できるが，これは大変不自然で人工的である．幸い超対称性のウォード-高橋恒等式は大変強力なので，摂動論の全次数で「非くりこみ定理」を保証してくれる．このように超対称性は，摂動論で2つの質量スケールを安定にし混ざらなくするために必要である．

3. 超対称性は「宇宙定数」の問題の解明に役立つかもしれない．経験的にはアインシュタイン-ヒルベルトの作用への補正である宇宙定数の項 $\lambda\sqrt{-g}$ は，天文学的スケールで極めて小さい．今の問題は，宇宙定数がほとんど0であることを「微調整」なしに説明することである．超対称性はおそらく十分強力なので，摂動論の全次数で宇宙定数を0にするであろう(この項は超対称性を破るからである)．しかし，これで宇宙定数の問題が完全に解決したわけではない．というのは，ふつうのエネルギーに達するためにはどうしても超対称性を破らねばならないからである．(したがって問題は，超対称性が破れた後に宇宙定数が0になることを説明することである.)

4. 超対称性は多くの望ましくない粒子を除いてくれる．たとえばボソン弦模型に現れるタキオンは，超対称性を破るので除かれる．これらの粒子を除くことにより，超対称性は高次ループ図の発散も落とす．第5章で，超弦理論にあり得る発散は，軟タキオンとディラトンの放出によるということを示す．したがってこれらの粒子を除くことは，同時に発散のもとになり得るものも除くことになるのである．

5. 最後に超対称性を局所的ゲージ理論にまで拡張すると，自然に量子重力の発散が落ちる．これは局所的超対称性が，グラビトンがある場合だけ定義できるためである(付録を見よ)．このように局所的超対称性は，一般相対論と密接に結びついている．実際局所的超対称性は，超重力の低いループの発散を除くのに成功しているのである．しかし超重力理論のうち最大のO(8)超重力は多分7次ループのレベルで発散をもっており，したがって超重力を満足のいく場の量子論にはできそうにない．局所的超対称性と弦理論の共形不変性を組み合わせた場合にだけ，量子重力のすべての発散を除くのに十分大きなゲージ群が得られそうである．

作用の不変性としての超対称性は，弦理論で最初に発見された．ふつうのボソン的作用を拡張したものがボソンをフェルミオンに変える対称性をもつことをGervaisと崎田(Sakita) [1] が示したのである．残念ながら，初期の弦模型の超対称性は世界面上の2次元の超対称性なので，何年もの間注目されていなかった．比較的最近になって初めて，弦模型が2次元と10次元時空の超対称性の**両方**をもつことが最終的に証明された．

もっとも簡単なスピンをもつ点粒子を考えよう．点粒子の場所を与える変数 x_μ に加えて，D 次元のディラックスピノール θ^A (A は任意)とディラック行列 Γ^μ を導入

する．一般に D 次元のディラックスピノールは，$2^{D/2}$ 複素成分をもつ．点粒子の作用は，

$$S = \frac{1}{2}\int e^{-1}(\dot{x}_\mu - i\bar{\theta}^A\Gamma_\mu\dot{\theta}^A)^2 d\tau \tag{3.1.1}$$

と書くことができる [2, 3]．これは，

$$\begin{cases} \delta\theta^A = \varepsilon^A \\ \delta\bar{\theta}^A = \bar{\varepsilon}^A \\ \delta x^\mu = i\bar{\varepsilon}^A\Gamma^\mu\theta^A \\ \delta e = 0 \end{cases} \tag{3.1.2}$$

の下で不変である．ここで，

$$\Pi^\mu = \dot{x}^\mu - i\bar{\theta}^A\Gamma^\mu\dot{\theta}^A \tag{3.1.3}$$

の組み合わせは，それ自身この変換の下で不変であることに注意しよう．したがってこの組み合わせを含むいかなる表式も，この対称性の下で不変である．この作用の奇妙な特徴として，フェルミオン場の成分の半分が作用の中で消えていることに注意しておく．

e, x_μ, θ の場で変分して，数個の運動方程式

$$\Pi^2 = 0; \quad \dot{\Pi}^\mu = 0; \quad \Gamma\cdot\Pi\dot{\theta} = 0 \tag{3.1.4}$$

を得る．また，

$$(\Gamma\cdot\Pi)^2 = -\Pi^2 = 0 \tag{3.1.5}$$

である．したがって行列 $\Gamma\cdot\Pi$ の固有値の半分は 0 である．しかし θ は常に $\bar{\theta}^A\Pi_\mu\Pi^\mu\theta^A$ の組み合わせで現れるので，ディラックスピノールの成分の半分は実は作用に入っていない．したがって θ は独立なスピノールではなく，その成分を半分にするような拘束条件をみたす．

θ の半分がない理由は，作用がもう 1 つ別の局所的対称性

$$\begin{aligned} \delta\theta^A &= i\Gamma\cdot\Pi\kappa^A \\ \delta x^\mu &= i\bar{\theta}^A\Gamma^\mu\delta\theta^A \\ \delta e &= 4e\dot{\bar{\theta}}^A\kappa^A \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

の下で不変であるためである [2]．さらに，作用のボソン的不変性

$$\begin{aligned} \delta\theta &= \lambda\dot{\theta}^A \\ \delta x^\mu &= i\bar{\theta}^A\Gamma^\mu\delta\theta^A \\ \delta e &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

もある．(3.1.6) に与えられる 2 つの超対称性の演算子を交換させようとすると，運動方程式を用いなければ代数が閉じないことがわかる：

$$[\delta_1, \delta_2]\theta^A = (2i\Gamma_\mu\kappa_2^A\dot{\bar{\theta}}^B\Gamma\cdot\Pi\Gamma^\mu\kappa_1^B + 4i\Gamma\cdot\Pi\kappa_2^A\dot{\bar{\theta}}^B\kappa_1^B) - (1\leftrightarrow 2). \tag{3.1.8}$$

(実は，これは超対称な作用にはよくあることである．運動方程式を用いなければ，x_μ と θ^A の成分の数が必ずしも一致しないことに注意しよう．このことは，代数を閉じさせるには一般に補助場が必要なことを意味している．)

最後に，座標の正準共役を計算すると，

$$\pi_\theta^A = \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}^A} = i\Gamma^\mu \Pi_\mu \theta^A \tag{3.1.9}$$

を得る．これは共変的量子化に大きな困難を生じる．正準共役量が陽に x に依存しているので量子化関係が非線形になって，解くのが極めて困難になるからである．さらに悪いことに，$\Gamma^\mu \Pi_\mu$ が理論の中の射影演算子になっており，変換の逆をとって θ^A について解けないことがわかる．言い換えると，スピンをもつ点粒子を単純に量子化することはまったくできないように思える．これは，超対称な弦が超 Yang-Mills や超重力理論ほど簡単ではないことを警告している．そこでまず，より簡単な2次元世界面で超対称な Neveu-Schwarz-Ramond 模型を議論して，その次により複雑な10次元時空超対称な Green-Schwarz 模型を調べることにする．

3.2　2次元超対称性

超対称性にまつわる問題(共変的量子化ができないとか，運動方程式を使わずに閉じる代数がないことなど)があるので，一時的に時空の超対称性をあきらめて，自由弦と自由フェルミオンを含むもっとも簡単な作用の2次元世界面の対称性を議論しよう．作用は共形ゲージにゲージ固定しておくが，2次元超対称性の本質的特徴をすべて明らかにするためにはそれで十分である．このゲージ固定した形式で，フォック空間にゲージ条件を手で課すことにする．後で完全な作用を与えるが，そこでは局所的に対称な作用から出発してこれらの条件を出すことがわかる．

共形ゲージでは，ラグランジアンは

$$L = -\frac{1}{2\pi}(\partial_a X_\mu \partial^a X^\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^a \partial_a \psi_\mu) \tag{3.2.1}$$

である [1]．ここで $a = 1, 2$ は2次元のベクトルの足であり，μ は時空の添字である．

ψ は2次元では反交換するマヨラナスピノールであり，実時空ではベクトルであるという変なものであることに注意しよう．

$$\begin{gathered}\psi^\mu = \begin{pmatrix}\psi_0^\mu \\ \psi_1^\mu\end{pmatrix}; \quad \bar{\psi}^\mu = \psi^\mu \rho^0 \\ \rho^0 = \begin{pmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}; \quad \rho^1 = \begin{pmatrix}0 & i \\ i & 0\end{pmatrix} \\ \{\rho^a, \rho^b\} = -2\eta^{ab}.\end{gathered} \tag{3.2.2}$$

と定義しよう．これを成分で具体的に書くと，

$$L = \frac{1}{2\pi}(\dot{X}\cdot\dot{X} - X'\cdot X' + i\psi_0(\partial_\tau + \partial_\sigma)\psi_0 + i\psi_1(\partial_\tau - \partial_\sigma)\psi_1) \tag{3.2.3}$$

を得る．このラグランジアンはゲージ固定してあるにもかかわらず，大域的変換

$$\delta X^\mu = \bar{\varepsilon}\psi^\mu$$
$$\delta\psi^\mu = -i\rho^a\partial_a X^\mu\varepsilon \tag{3.2.4}$$

のもとで不変である．このように一時的に本当の時空のスピノールをもつ弦の理論を作ることをあきらめることにより，自由ボソンと反交換する場を含む極めて簡単な 2 次元超対称な理論が得られたのである．

歴史的には，この NS-R 理論［4–6］が双対模型にスピンを入れるのに初めて成功したものであった．これはまた，線形超対称な作用の最初の例［1］でもあり，ただちに 4 次元超対称な点粒子の作用が考えられることになった［7, 8］．

これで 2 次元超対称な作用を書き下したので，系を解くために前の章で用いたステップをくり返そう．次のステップは，これらの対称性に付随したカレントを求め，そしてこれらのカレントの作る代数を決め，最後にこれらの条件をヒルベルト空間に適用することである．この節で以下行うことは，前章で展開したこの手順を単純に拡張したものである：

$$\text{作用} \to \text{対称性} \to \text{カレント} \to \text{代数} \to \text{拘束条件} \to \text{ユニタリー性}. \tag{3.2.5}$$

この戦術に従い，この対称性に付随した超対称性カレントを計算しよう．前章で見たように，共形対称性の存在により保存カレントが得られる．(1.9.8)で，この保存カレントが

$$J^a_\alpha = \frac{\delta L}{\delta(\partial_a\phi)}\frac{\delta\phi}{\delta\bar{\varepsilon}^\alpha} \tag{3.2.6}$$

と書けることを見た．(3.2.4)を(3.2.6)に代入して，

$$J_a = \frac{1}{2}\rho^b\rho_a\psi^\mu\partial_b X_\mu \tag{3.2.7}$$

を得る．これが保存されることを確かめるためにはまず系の運動方程式を書き下さねばならないが，系が自由な作用をもっているのでこれは大変容易である：

$$[\partial_\tau + \partial_\sigma]\psi_0^\mu = 0$$
$$[\partial_\tau - \partial_\sigma]\psi_1^\mu = 0. \tag{3.2.8}$$

さて容易に，

$$\partial_a J^a = 0 \tag{3.2.9}$$

を示すことができる．成分で書くと，このカレントは

$$J_- \equiv -\frac{1}{2}(J_0 - J_1) = \frac{1}{2}\psi_0^\mu(\partial_\tau - \partial_\sigma)X_\mu$$
$$J_+ \equiv -\frac{1}{2}(J_0 + J_1) = \frac{1}{2}\psi_1^\mu(\partial_\tau + \partial_\sigma)X_\mu \tag{3.2.10}$$

に等しい．運動方程式を用いて，

$$(\partial_\tau + \partial_\sigma)J_- = 0$$
$$(\partial_\tau - \partial_\sigma)J_+ = 0 \tag{3.2.11}$$

を示すことができる．(この 2 式の和が(3.2.9)になっている.)

超対称性カレントの他にエネルギー運動量テンソルもあり，それはすでに(1.9.17)で見たように，

$$T^\mu_\nu = \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu \phi)}\partial_\nu \phi - L\delta^\mu_\nu \tag{3.2.12}$$

と書ける．これは容易にわれわれの目的に使える．(3.2.1)を(3.2.12)に代入して，

$$\begin{aligned} T_{ab} &= \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu + \frac{i}{4}\bar{\psi}^\mu \rho_a \partial_b \psi_\mu + \frac{i}{4}\bar{\psi}^\mu \rho_b \partial_a \psi_\mu - (\text{トレース}) \\ \partial_a T^{ab} &= 0 \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

を得る．ここで T_{ab} はトレースを引いておいたので，そのトレースは0になっている．具体的に書くと，

$$\begin{aligned} T_{00} &= T_{11} \\ &= \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + X'^2) - \frac{i}{4}\psi^\mu_0(\partial_\tau - \partial_\sigma)\psi_{0\mu} - \frac{i}{4}\psi^\mu_1(\partial_\tau + \partial_\sigma)\psi_{1\mu} \\ T_{01} &= T_{10} \\ &= \dot{X}\cdot X' + \frac{i}{4}\psi^\mu_0(\partial_\tau - \partial_\sigma)\psi_{0\mu} - \frac{i}{4}\psi^\mu_1(\partial_\tau + \partial_\sigma)\psi_{1\mu} \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

となる．われわれの基本的戦略(3.2.5)では，これらのカレントを用いてフォック空間を制限し，すべてのゴーストを除くことになっている：

$$\begin{aligned} \langle T_{ab}\rangle &= 0 \\ \langle J_a \rangle &= 0. \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

(しかし，この条件はフォック空間に人為的に課しているということを，再び強調しておく．作用が局所的に超対称でないので，この条件を第1原理から導くことができていないのである．後で完全に対称な作用を与えたときに，局所的対称性のためにこれらの条件が出ることを示す.)

ボソン的弦の場合と違って，実は ψ_0 と ψ_1 場には，周期的または反周期的のどちらかの2つの異なる境界条件を課すことができる．$\sigma=0$ では常に $\psi_0=\psi_1$ ととることができる．しかし，$\sigma=\pi$ では2つの異なる境界条件を選べるのである．場が周期的(反周期的)の場合を，Ramond (Neveu-Schwarz)境界条件と呼ぶ [4, 5]：

$$\begin{cases} \text{Ramond (R)} & \psi_0(\pi,\tau) = \psi_1(\pi,\tau) \\ \text{Neveu-Schwarz (NS)} & \psi_0(\pi,\tau) = -\psi_1(\pi,\tau). \end{cases} \tag{3.2.16}$$

スピノールに異なる2種類の境界条件を与えると，自然に2つの場を整数(半整数)モードのフーリエ成分で級数展開することになる [9, 10]：

$$\text{R:}\begin{cases}\psi_0^\mu(\sigma,\tau)=2^{-1/2}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}\\ \psi_1^\mu(\sigma,\tau)=2^{-1/2}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}\end{cases} \tag{3.2.17}$$

$$\text{NS:}\begin{cases}\psi_0^\mu(\sigma,\tau)=2^{-1/2}\displaystyle\sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2}b_r^\mu e^{-ir(\tau-\sigma)}\\ \psi_1^\mu(\sigma,\tau)=2^{-1/2}\displaystyle\sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2}b_r^\mu e^{-ir(\tau+\sigma)}.\end{cases} \tag{3.2.18}$$

われわれの手順(3.2.5)の次のステップは，これらのカレントの生成する代数を分離することである．前の章でこの対称性がエネルギー運動量テンソルを生じ，それが Virasoro すなわち共形代数を生成することを見た．NS-R の作用に対しては，超共形代数が生成されることを示す．

場のこの分解を用いて，カレント T_{ab} のモーメント L_n は

$$L_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\sigma\left\{e^{in\sigma}(T_{00}+T_{01})+e^{-in\sigma}(T_{00}-T_{01})\right\} \tag{3.2.19}$$

と書ける．共形生成子の定義が，今は反交換する部分の寄与も含むことに注意しよう．

超対称カレントに対しても，このフーリエ展開をくり返すことができる．R 部分に対しては，

$$F_n=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi d\sigma\left\{e^{in\sigma}J_++e^{-in\sigma}J_-\right\} \tag{3.2.20}$$

となる．NS 部分に対しては，

$$G_r=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi d\sigma\left\{e^{ir\sigma}J_++e^{-ir\sigma}J_-\right\} \tag{3.2.21}$$

となる．これらのカレントのモーメントから代数を出すには，場の正準共役量を構成する必要がある．そこで，

$$\pi_A^\mu=\frac{\delta L}{\delta\psi_{A,\mu}} \tag{3.2.22}$$

と定義すると，フェルミオン場は自己共役(self-conjugate)であることがわかる．そこで，

$$\{\psi_A^\mu(\sigma,\tau),\psi_B^\nu(\sigma',\tau)\}=\pi\delta_{AB}\delta(\sigma-\sigma')\eta^{\mu\nu} \tag{3.2.23}$$

を課す．したがって，(3.2.17)と(3.2.18)の中の振動子は，

$$\begin{cases}\text{R:}\quad \{d_n^\mu,d_m^\nu\}=\eta^{\mu\nu}\delta_{n,-m}\\ \text{NS:}\quad \{b_r^\mu,b_s^\nu\}=\eta^{\mu\nu}\delta_{r,-s}\end{cases} \tag{3.2.24}$$

をみたすことになる．

R 部分の 0 成分は，ディラックのガンマ行列に比例しているのに注意することが大事である：

$$\{d_0^\mu,d_0^\nu\}=\eta^{\mu\nu}. \tag{3.2.25}$$

これから，R 部分はフェルミオン部分に対応し，NS 部分は反交換する演算子を含んでいるにもかかわらず，ボソン部分になっていることに見当がつく．理論のフェルミオンとボソン部分を与えるのに，(3.2.16)のような境界条件がこのように重要な役割りを果たすということは新しいことであり，明らかに弦理論のみで起こることである．(この一見あいまいな事実が，穴のあいた面上で定義される多重ループ振幅を議論するときに重要な役割りを果たす．その場合，これらの境界条件が多様体のいわゆる「スピン構造」を決定するのである．)

交換関係がいったん決まれば，これらのテンソルが生成する代数を構成できる．前のように，これらのカレントのモーメントが閉じた代数を作るのである．NS 部分の代数は，

$$
\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{8}(m^3 - m)\delta_{m,-n} \\
[L_m, G_r] &= \left(\frac{1}{2}m - r\right) G_{m+r} \\
\{G_r, G_s\} &= 2L_{r+s} + \frac{1}{2}D\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r,-s}
\end{aligned}
\tag{3.2.26}
$$

となる．具体的に，NS 部分の振動子で書けば，

$$
\begin{aligned}
L_m &= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} :\alpha_{-n}\alpha_{m+n}: + \frac{1}{2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left(r + \frac{1}{2}m\right) :b_{-r}b_{m+r}; \\
G_r &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n}b_{r+n}
\end{aligned}
\tag{3.2.27}
$$

となる．R 部分で同じことをやると，

$$
\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{8}m^3\delta_{m,-n} \\
[L_m, F_n] &= \left(\frac{1}{2}m - n\right) F_{m+n} \\
\{F_m, F_n\} &= 2L_{m+n} + \frac{1}{2}Dm^2\delta_{m,-n}
\end{aligned}
\tag{3.2.28}
$$

を得る．具体的に書けば，

$$
\begin{aligned}
L_m &= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} :\alpha_{-n}\alpha_{m+n}: + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(n + \frac{1}{2}m\right) :d_{-n}d_{m+n}: \\
F_m &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n}d_{m+n}
\end{aligned}
\tag{3.2.29}
$$

となる．

次に，エネルギー運動量テンソルの成分から直接ハミルトニアンを読みとることができる．共形ゲージでは，NS 部分のハミルトニアンは，

$$
H = \sum_{n=1}^{\infty} n a_{-n}^{\mu} a_{n\mu} + \sum_{r=1/2}^{\infty} r b_{-r}^{\mu} b_{r\mu} + \alpha' p_0^2 \tag{3.2.30}
$$

R 成分に対しては，

$$H=\sum_{n=1}^{\infty} n a_{-n}^{\mu} a_{n\mu}+\sum_{m=1}^{\infty} m d_{-m}^{\mu} d_{m\mu}+\alpha' p_0^2 \tag{3.2.31}$$

このハミルトニアンは，調和振動子のフォック空間上で対角であることに注意しよう．これは経路積分から調和振動子の形式へ容易に移れることを意味するので，極めて重要である．つまり理論の伝播関数が指数関数の単純な積分となり，その積分は容易に実行できるのである．

ボソン部分と同じように，理論の状態は単にこれらの振動子の積のフォック空間で与えられる：

$$\text{NS 固有状態：}\quad \prod_{n,\mu}\prod_{m,\nu}\left\{a_{n,\mu}^{\dagger}\right\}\left\{b_{m,\nu}^{\dagger}\right\}|0\rangle \tag{3.2.32}$$

$$\text{R 固有状態：}\quad \prod_{n,\mu}\prod_{m,\nu}\left\{a_{n,\mu}^{\dagger}\right\}\left\{d_{m,\nu}^{\dagger}\right\}|0\rangle u_{\alpha}. \tag{3.2.33}$$

ここで u_α は任意のスピノールであり，まだ何の制限もついていない．NS 部分の低いレベルの状態のいくつかのものは，次のようになる(図 3.1 を見よ)：

$$\text{NS 状態：}\begin{cases}\text{真空} & |0\rangle;\quad k^2=2\\ \text{タキオン} & k_\mu b_{-1/2}^{\mu}|0\rangle;\quad k^2=1\\ \text{質量 0 ベクトル} & a_{-1}^{\mu}|0\rangle.\end{cases} \tag{3.2.34}$$

$$\text{R 状態：}\begin{cases}\text{スピン}\tfrac{1}{2}\text{フェルミオン} & |0\rangle u_\alpha\\ \text{スピン}\tfrac{3}{2}\text{フェルミオン} & d_{-1}^{\mu}|0\rangle u_\alpha\\ \text{スピン}\tfrac{3}{2}\text{フェルミオン} & a_{-1}^{\mu}|0\rangle u_\alpha.\end{cases} \tag{3.2.35}$$

まとめれば，NS-R 模型ともとのボソン的弦の間には，著しい類似性があることがわかった．それぞれの作用から出発し，対称性を定義し，対称性からそのカレントを生成し，カレントから代数を構成し，そしてヒルベルト空間に拘束条件を適用する．主な違いは超カレントが余分にあることであり，それは超共形代数(3.2.26)と(3.2.28)を生成する．

戦術の最後のステップは，この超共形代数を NS-R 模型のヒルベルト空間に適用することである．ゴーストを消す条件は，正の n と r に対し

$$F_n \text{ または } G_r|\phi\rangle=0 \tag{3.2.36}$$

である．しかしながら質量殻の条件を出すには，NS-R 模型の樹木振幅を調べなければならない．

3.3 樹木

再び相互作用する弦に対するわれわれの出発点は，汎関数積分である．残念ながら，直観以外には相互作用する理論を構成するための指導原理はない．予想として，ふつ

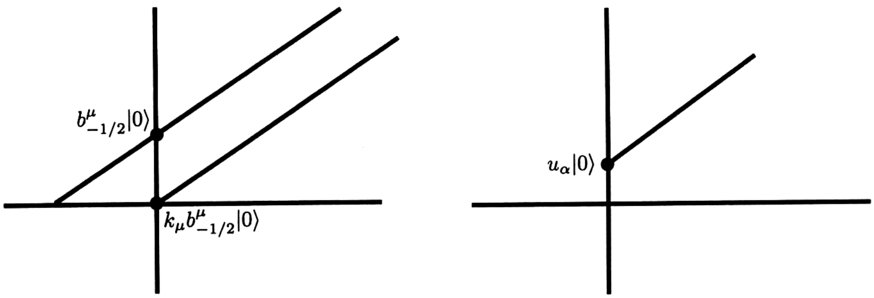


図 3.1：開いた弦の NS-R 模型のレッジェ軌跡．ボソン状態は，$a^\dagger$ と $b^\dagger$ の調和振動子のすべての可能な積が真空に作用することにより生成されるフォック空間に対応する．フェルミオン状態は，$a^\dagger$ と $d^\dagger$ の振動子のすべての可能な積を，時空のスピノールである真空に作用させることにより生成されるフォック空間に対応する．左では質量 0 のスピン 1 粒子は，マクスウェルまたは Yang-Mills 場に対応する（真空を含めてすべてのタキオン状態は，GSO 射影を課すと除ける）．右では質量 0 のスピン $\frac{1}{2}$ のフェルミオンは，質量 0 ベクトル場の超対称な相棒である．

うの頂点項 V_0 にスピン 0 の粒子が入ってくる点での因子 $k_\mu\psi^\mu$ をかけてみよう．そうすると，このスカラー粒子の N 点散乱振幅は(2.5.2)を拡張したものであって

$$A(1,2,3,\ldots,N) = \sum_{\text{位相}} \int d\mu\, DX\, D\psi e^{iS} \prod_{i=1}^{N} k_{i\mu}\psi^{i\mu} e^{ik_{i\mu}\cdot X^{i\mu}}$$
$$= \sum_{\text{位相}} \int d\mu \left\langle \prod_{i=1}^{N} k_{i\mu}\psi^{i\mu} e^{ik_{i\mu}\cdot X^{i\mu}} \right\rangle \tag{3.3.1}$$

で与えられると仮定するのが妥当であろう．ここで，

$$D\psi = \prod_{\mu}\prod_{\sigma,\tau} d\psi_\mu(\sigma,\tau) \tag{3.3.2}$$

であり，無限個のグラスマン変数について汎関数積分することになる（付録を見よ）．

ボソンの汎関数積分の場合のように，ハミルトニアンがこの空間で対角なので，弦の面にそった各中間点での汎関数積分を除くことができる．各中間点で，

$$1 = |X\rangle|\psi\rangle \int DX\, D\psi \langle\psi|\langle X| \tag{3.3.3}$$

を用いてすべての汎関数積分を実行し，調和振動子だけを残す形にできるわけである．こうして再び汎関数積分により調和振動子の形式を導くことができ，それは汎関数積分の単なる 1 つの表示と見なせるのである．

振動子の言葉では，運動量 k_μ をもつスカラー粒子の放出の頂点は，

$$V = k_\mu\psi^\mu V_0 \tag{3.3.4}$$

となる．これを取る理由は，ゴーストを消す条件(2.9.5)を保つために頂点関数が共形ウェイト 1 をもたねばならないという規則のためである．(3.2.27)と(3.2.29)から L_n と ψ_μ の交換子を計算でき，ψ_μ が共形ウェイト $\frac{1}{2}$ もつことがわかる．V_0 が共形ウェ

イト $\alpha' k^2$ をもち ψ がウェイト $\frac{1}{2}$ をもつので，V のウェイトはこの 2 つの和となる：

$$\alpha' k^2 + \frac{1}{2} = 1 \longrightarrow k^2 = \frac{1}{2\alpha'}. \tag{3.3.5}$$

ここで α' は $\frac{1}{2}$ に等しい．この頂点関数は，タキオンの放出または吸収に対応しているのであるが，(3.3.5) により正しいゴーストを消す条件をみたすことが保証される．

伝播関数も容易に計算できる．調和振動子の空間でハミルトニアンは対角であるから，調和振動子の基準モードに基づいた具体的な表式を用いることにする．そうすると，

$$D = \int_0^\infty e^{-\tau(L_0-1)} d\tau = \frac{1}{L_0 - 1} \tag{3.3.6}$$

を得る．

タキオンの N 点関数

$$\langle 0; k_1 | k_1 \cdot b_{1/2} V(k_2) D \cdots V(k_{N-1}) k_N \cdot b_{-1/2} | 0; k_N \rangle \tag{3.3.7}$$

を構成しよう．ここでタキオンの状態を，すべての頂点と伝播関数の左と右においた．この形式ではボソン的弦に対して示したのと同様にして，巡回対称性を証明することができる．まず，

$$\begin{aligned} &\lim_{y \to 0} \frac{V(k,y)}{y} |0;0\rangle = k \cdot b_{-1/2} |0;k\rangle \\ &\lim_{y \to 0} \langle 0;0| y V(k,y) = \langle 0; -k| k \cdot b_{1/2} \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

に注意する．これにより，すべての外線のタキオンを同等に取り扱うことができるようになる．一番右の頂点を左へ交換していくことにより，(2.6.24) で調べたボソンの場合と同様に振幅が巡回対称であることが示せる．

しかしここで問題が生じる．今構成したタキオン状態は，$k_\mu b^\mu_{-1/2} |0;\ k\rangle$ に対応し，

$$[L_0 - 1] k_\mu b^\mu_{-1/2} |0;k\rangle = 0 \longrightarrow \alpha' k^2 = \frac{1}{2} \tag{3.3.9}$$

をみたす．ところがこのことは，真空状態 $|0;k\rangle$ が次の条件をみたすために，さらに低い質量をもつことを意味するのである：

$$[L_0 - 1] |0;k\rangle = 0 \longrightarrow \alpha' k^2 = 1. \tag{3.3.10}$$

したがって，理論の本当の真空 (3.3.10) が，今構成したタキオン (3.3.9) に対応しないという異常な問題が生じる．言い換えると，ヒルベルト空間が大きすぎるように見えるのである．真空が不必要な状態になっている．そして 2 つの最低状態があるように見える．

この問題の答は，真空状態というのが余分の状態で理論から取り除けることにある．この手続きは，理論のヒルベルト空間を再定義することにより遂行できる．

今まで用いてきた形式は F_1 形式と呼ばれるものであるが，あまり便利なものではない．理論の真空はタキオンではなく，したがってフォック空間が必要以上に大きいのである．この形式では巡回対称性は容易に証明できるが，もっと能率的な形式を導

入する方が望ましい．これは F_2 形式と呼ばれ［10］，$k^2=1/\alpha'$ の真空状態を除いてフォック空間を小さくしている．

これを行うために，タキオン状態を

$$k_\mu b^\mu_{-1/2}|0;k\rangle = G_{-1/2}|0;k\rangle \tag{3.3.11}$$

$$\langle 0;k|k_\mu b^\mu_{1/2} = \langle 0;k|G_{1/2} \tag{3.3.12}$$

と書き換えよう．そして，これらを用いて N 点タキオン散乱振幅(3.3.7)を書き換える：

$$A_N = \langle 0;k_1|G_{1/2}V(k_2)D\cdots V(k_{N-1})G_{-1/2}|0;k_N\rangle. \tag{3.3.13}$$

ここで重要なステップが来る．いろいろな頂点と伝播関数を次々と交換して，$G_{1/2}$ を右へもっていくことにする．そのために，公式

$$\begin{aligned}&\{G_r,V\}=[L_{2r},V_0]=(L_0+r-1)V_0-V_0(L_0-1)\\&G_{1/2}\frac{1}{L_0-1}=\frac{1}{L_0-\frac{1}{2}}G_{1/2}\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

が必要となる．$G_{1/2}$ を右へ押しやるとき，伝播関数の切片が次のように変わるが，

$$\frac{1}{L_0-1}\to\frac{1}{L_0-\frac{1}{2}} \tag{3.3.15}$$

L_0 を含む他のすべての項は，ボソンの場合のように 0 になることが重要である．最後に $G_{1/2}$ を一番右までもっていくと，そこでタキオン状態に作用して 0 になる：

$$G_{1/2}G_{-1/2}|0\rangle = (2L_0 - G_{-1/2}G_{1/2})|0\rangle = 0. \tag{3.3.16}$$

こうして，すべての項をまとめると，最終的に

$$\begin{aligned}A_N &= \langle 0;k_1|k_1\cdot b_{1/2}V(k_2)\frac{1}{L_0-1}\cdots V(k_{N-1})k_N\cdot b_{-1/2}|0;k_N\rangle\\&=\langle 0;k_1|V(k_2)\frac{1}{L_0-\frac{1}{2}}\cdots V(k_{N-1})|0;k_N\rangle\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

を得る．驚くべきことに，もとの振幅が完全に書き換えられて共鳴の集合が前のものからずれている．とくに，$\alpha'k^2=1$ にあった F_1 形式の古い真空状態がヒルベルト空間から消えている．それは F_2 と呼ばれる新しい形式［10］から完全に分離しているのである．そのかわりに $|0;k\rangle$ で表されるタキオン状態があって，今はそれが $\alpha'k^2=\frac{1}{2}$ で $\left[L_0-\frac{1}{2}\right]|0;\ k\rangle=0$ という新しい条件をみたすようになっている．

これはとてもすばらしい．前は $\alpha'k^2=1$ の真空状態を表していた状態 $|0;\ k\rangle$ が，今は $\alpha'k^2=\frac{1}{2}$ のタキオン状態へ変換されている．このように F_2 形式では，タキオン状態と新しい真空は同じ状態になっている．(同じ記号 $|0;\ k\rangle$ が，F_1 形式での古い真空または F_2 形式でのタキオンのどちらかを表すことに注意しなければならない.)

ヒルベルト空間のこのずらしは，点粒子の場の理論にはなかった新しい特徴である．実際次の章で共形場の理論を議論するときに，超共形群の既約表現を構成する場合にはいつでもこの奇妙な「描像変換」(picture changing)の現象が生じることを見る．し

たがってこれは単なるトリックではなく，群論の本質的特徴である．（またこの模型を時空で超対称にするときには，タキオンも消えることも述べておかねばならない．したがって本当の超弦のヒルベルト空間からタキオンは除かれていて，ユニタリーな理論になっているのである．）

これらの 2 つの形式の差異をまとめておこう：

$$F_1 : \begin{cases} \text{頂点} = V \\ \text{伝播関数} = (L_0 - 1)^{-1} \\ \text{タキオン } k_\mu b^\mu_{-1/2}|0;k\rangle \quad \left(\alpha' k^2 = \frac{1}{2}\right) \\ \text{真空 } |0;k\rangle \quad (\alpha' k^2 = 1). \end{cases} \tag{3.3.18}$$

$$F_2 : \begin{cases} \text{頂点} = V \\ \text{伝播関数} = \left(L_0 - \frac{1}{2}\right)^{-1} \\ \text{タキオン} = \text{真空 } |0;k\rangle \quad \left(\alpha' k^2 = \frac{1}{2}\right). \end{cases} \tag{3.3.19}$$

2 つの形式の長所と欠点は，次の通りである．

1. F_1 形式では明白な巡回対称性がずっと容易に証明できる．しかし，理論から完全に分離してしまう真空状態という余分なものがある．

2. F_2 形式では巡回対称性は明白ではないが，ゴーストの消去とゲージ変換は容易に実行できる．その長所は，こちらではより小さなフォック空間を扱っていることである．

F_2 形式を用いて，容易に 4 点関数を厳密に計算することができる：

$$\langle 0, -k_1 | V(k_2) \frac{1}{L_0 - \frac{1}{2}} V(k_3) | 0; k_4 \rangle = \frac{\Gamma(1-\alpha(s))\Gamma(1-\alpha(t))}{\Gamma(1-\alpha(s)-\alpha(t))}. \tag{3.3.20}$$

ここで $\alpha(s) = 1 + \alpha' s$ である．

N 点関数への拡張も容易である．N 点関数は，

$$A_N = \int d\mu_N \langle 0;0 \left| \frac{V(k_1, y_1)}{y_1} \cdots \frac{V(k_N, y_N)}{y_N} \right| 0;0 \rangle \tag{3.3.21}$$

と表される．一般に，この表式には求めるのが面倒な多くの因子が入っている．簡単に完全な結果を得るには，関係式

$$\frac{V(y)}{\sqrt{y}} = \int d\theta \exp\left\{ik \cdot X + \theta k \cdot \psi / \sqrt{y}\right\} \tag{3.3.22}$$

を用いればよい．指数をべき展開すれば 1 次の項だけが θ 積分で残り，頂点に対する前の表式が得られることに注意しよう．ここまでのところは，われわれは何もしていない．ここで，2 つの恒等式

$$\begin{aligned} \langle 0 \left| \frac{\psi^\mu(y_1)}{\sqrt{y_1}} \frac{\psi^\nu(y_2)}{\sqrt{y_2}} \right| 0 \rangle &= \frac{\eta^{\mu\nu}}{y_1 - y_2} \\ \langle 0 \left| \frac{V(y_1)}{\sqrt{y_1}} \frac{V(y_2)}{\sqrt{y_2}} \right| 0 \rangle &= \int d\theta_1 d\theta_2 \exp[k_1 \cdot k_2 \ln(y_1 - y_2 - \theta_1\theta_2)] \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

を用いよう．上の関係式は，N 点タキオン振幅に容易に拡張できる：

$$\langle 0|\prod_{i=1}^{N}\frac{V(k_i,y_i)}{y_i}|0\rangle=\int\prod\frac{d\theta_i}{\sqrt{y_i}}\prod_{i<j}(y_i-y_j-\theta_i\theta_j)^{k_i\cdot k_j}. \tag{3.3.24}$$

この表式の便利な点は，指数を次々にべき展開してグラスマン変数について積分することにより，公式に現れるいろいろな項を読みとれることである．

タキオン・タキオン散乱振幅以外に，質量0のベクトル粒子(マクスウェルと Yang-Mills 粒子に対応する)の散乱も計算できる．質量0のベクトル粒子の頂点関数のとり方は，それが共形ウェイト1と正しいスピンをもつということにより制限されている．この頂点として自然なものは，

$$V(\zeta,k)=\left\{G_r,\zeta\cdot\psi e^{ik\cdot X}\right\}=(\zeta\cdot\dot{X}-\zeta\cdot\psi k\cdot\psi)e^{ik\cdot X}$$

である．ここで ζ はベクトル粒子の偏極ベクトルであり，$k^2=\zeta\cdot k=0$ をみたす．この頂点の共形ウェイトは，個々の因子の共形ウェイトの和に等しい．ψ は共形ウェイト $\frac{1}{2}$ をもち $e^{ik\cdot X}$ は共形ウェイト $\alpha' k^2$ をもつので，この頂点の共形ウェイトは

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=1$$

で与えられることになり，望ましいウェイトになる．したがって，この頂点は G と L のゴーストを消す条件をみたすことが保証されるわけである．タキオンに対して展開したのと同じ形式を用いて，この質量0のゲージ粒子の N 点散乱振幅を計算するのも難しくない．たとえば，4つの質量0のゲージ粒子の散乱振幅は，

$$A_4=K\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}t\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t\right)}$$

で与えられる．ここで，運動学的因子 K は，

$$\begin{aligned}K=&-\frac{1}{4}(st\zeta_{13;24}+su\zeta_{23;14}+tu\zeta_{12;34})\\&+\frac{1}{2}s(k_{14}k_{32}\zeta_{24}+k_{23}k_{41}\zeta_{13}+k_{13}k_{42}\zeta_{23}+k_{24}k_{31}\zeta_{14})\\&+\frac{1}{2}t(k_{21}k_{43}\zeta_{31}+k_{34}k_{12}\zeta_{24}+k_{24}k_{13}\zeta_{34}+k_{31}k_{42}\zeta_{12})\\&+\frac{1}{2}u(k_{12}k_{43}\zeta_{32}+k_{34}k_{21}\zeta_{14}+k_{14}k_{23}\zeta_{34}+k_{32}k_{41}\zeta_{12})\end{aligned}$$

で与えられ，

$$k_{ij}=\zeta_i\cdot k_j;\quad \zeta_{ij}=\zeta_i\cdot\zeta_j;\quad \zeta_{ij;kl}=\zeta_{ij}\zeta_{kl}$$

である．(フェルミオンを含む散乱も計算できる．それらも基本的な形をしているが，運動学的因子は外線のスピノールに依存する．)

F_2 形式を使う別の利点は，振幅が次の下で不変であることを具体的に示すことができることであることも付け加えておかねばならない：

$$\begin{aligned}\delta y_i&=\theta_i\varepsilon\\\delta\theta_i&=\varepsilon.\end{aligned} \tag{3.3.25}$$

これは群 Osp(1/2) (付録を見よ)を生成する．それは射影群 $SL(2,\mathbb{R})$ を超対称に拡張したものである．またこの群は，

$$G_{\pm 1/2}, L_{\pm 1}, L_0 \tag{3.3.26}$$

の組がなす代数によって生成される．Ω を群 Osp(1/2) の要素とする．すると，超射影不変性は

$$\Omega|0;0\rangle = |0;0\rangle \tag{3.3.27}$$

に注意すれば証明できる．(ボソンの場合のように，真空状態 $|0;0\rangle$ は物理的状態でないことに注意しよう．したがって Ω は一般に物理的状態を消さないが，真空状態を消すことはできるのである.) 頂点は，

$$\Omega V(y,\theta)\Omega^{-1} = V(y',\theta') \tag{3.3.28}$$

と変換する．ここで，$V(y,\theta)$ は θ について積分する前の頂点関数である．

これで N-S 形式での 3 ボソン頂点関数の性質がわかったので，R 模型に対する(外線にボソンをもつ)フェルミオン・フェルミオン・ボソンの結合も計算できる．頂点を

$$V(k) = \Gamma : e^{ik\cdot X} : \tag{3.3.29}$$

ととる．ここで，

$$\Gamma = \gamma_{11}(-1)^{\sum_n d_{-n}\cdot d_n} \tag{3.3.30}$$

であり，γ_{11} はディラック行列の積である．この頂点関数以外に，伝播関数

$$D = \frac{1}{F_0} = \frac{F_0}{L_0} \tag{3.3.31}$$

も必要である．ここで F_0 は(3.2.20)に与えられているものであり，切片は 0 と選んだ(これは後で見るように，共形不変性を保証するための正しい取り方である．しかし今の初期の段階では，切片を 0 と取ることはまだ説明できない)．

最後に真空状態はスピン $\frac{1}{2}$ のフェルミオンであり，

$$\sum_\alpha |0;q\rangle_\alpha u_\alpha \tag{3.3.32}$$

で与えられる．ここでは，スピノール u_α のスピノール添字 α について和をとっている．こうして，いくつかのボソンと相互作用している 1 つのフェルミオンの散乱振幅は，

$$\bar{u}(q_1)\langle 0;q_1|V(k_2)D\cdots DV(k_{N-1})|0;q_N\rangle u(q_N) \tag{3.3.33}$$

で与えられることになる．

今まで 2 つのフェルミオンの外線をもつ振幅だけを考えてきた．驚くべきことに，今までは単純な直観に基づいたわれわれの最初の予想がすべて成功した．共形ゲージでの作用は自由な理論のものだったので，NS-R 模型は極めて簡単であったからである．しかしながら，これには払わなければならない代償がある．

原則として，弦模型は任意のチャンネルで因子化できるので，R 模型をボソンのチャ

ンネルで因子化して NS 模型を再導出したり，多重フェルミオン頂点関数を求めることができるはずである．しかし実際にはこれは非常に難しい．とくに(外線のフェルミオンの足が内線のボソンとフェルミオンに結合している)フェルミオン頂点関数は，扱うのが極めて困難なしろものである．このために，NS-R 形式で多重フェルミオン振幅を計算するのは難しい．

R 模型はいろいろなチャンネルで因子化できて NS 模型を出すことが示せるが，多重フェルミオン振幅を計算するときには，NS-R 形式は実用上極めて不便なものである．それで次の章で共形場の理論の手法により，多重フェルミオン振幅を共変的に計算できることを見ることにする．

3.4 局所的 2 次元超対称性

以前，次の条件を手で課したことに注意しよう：

$$\langle T_{ab}\rangle = 0$$
$$\langle J_a\rangle = 0. \tag{3.4.1}$$

そこではこれを正当化する理由は何も与えなかった．単にこれらの条件が最初から導出できる高次の作用が存在しなければならないということだけを述べておいた．

ここで，前の理論の局所的な一般化について述べよう．この局所的に超対称な作用を構成する鍵は，理論にもっと場を付け加えることにある．超対称な組

$$(X_\mu, \psi_\mu) \tag{3.4.2}$$

に加えて，理論に 2 次元のツバイバイン (zweibein) とその超対称な相手

$$(e^a_\alpha, \chi_\alpha) \tag{3.4.3}$$

を導入するのである．ここで α や β などのギリシア文字は曲がった空間中の 2 次元ベクトルを表し，μ や ν などのギリシア文字は 10 次元時空のベクトルを表し，a, b, c などのローマ字は平坦な空間の 2 次元ベクトルを示す．χ_α は 2 次元のスピノールであるとともに 2 次元のベクトルでもあり，2 次元スピノールの添字は省略してある．したがってツバイバインもスピノール χ_α も両方とも，超対称性から要求されるように 4 つの成分をもつ．そこで Brink, Di Vecchia, Howe, Deser および Zumino が初めて書き下した [11–13] 完全なラグランジアンを与えよう．

$$L = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\sqrt{g}\Big[g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \nabla_\alpha \psi_\mu + 2\bar{\chi}_\alpha \rho^\beta \rho^\alpha \psi^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu \psi^\mu \bar{\chi}_\alpha \rho^\beta \rho^\alpha \chi_\beta\Big] \tag{3.4.4}$$

上で用いた ρ 行列にはツバイバインがかかっているので，実は 2 次元の曲がった空間で定義されていることに注意しよう：

$$\rho^\alpha = e^\alpha_a \rho^a.$$

このラグランジアンは

$$
2\text{ 次元 SUSY}^1: \begin{cases} \delta X^\mu = \bar{\varepsilon}\psi^\mu \\ \delta\psi^\mu = -i\rho^\alpha\varepsilon(\partial_\alpha X^\mu - \bar{\psi}^\mu\chi_\alpha) \\ \delta e^a_\beta = -2i\bar{\varepsilon}\rho^a\chi_\beta \\ \delta\chi_\alpha = \nabla_\alpha\varepsilon \end{cases} \tag{3.4.5}
$$

の下で不変である．それはまたワイル(スケール)変換

$$
\text{ワイル}: \begin{cases} \delta X_\mu = 0 \\ \delta\psi^\mu = -\frac{1}{2}\sigma\psi^\mu \\ \delta e^a_\beta = \sigma e^a_\beta \\ \delta\chi_\alpha = \frac{1}{2}\sigma\chi_\alpha \end{cases} \tag{3.4.6}
$$

の下でも不変である．2 次元で成り立つ恒等式のために，それはさらに

$$
\begin{aligned} \delta\chi_\alpha &= i\rho_\alpha\eta \\ \delta e^a_\beta &= \delta\psi_\mu = \delta X_\mu = 0 \end{aligned} \tag{3.4.7}
$$

の下でも不変である．最後にツバイバインが入っているために，2 次元の局所的ローレンツ変換とパラメーターつけかえの下でも，明白に不変になっている．(作用の中に曲がった空間の共変微分 D_α ではなく，∂_α のようなふつうの微分が入っているのは，作用の中では 2 次元の接続の場が 0 になるためである.)

さて，今やフォック空間に手で課していた拘束条件を導出するときである．ツバイバインに関する作用の変分が

$$
T^a_\alpha = 0 \tag{3.4.8}
$$

であり，ツバイバインの超対称な相棒の変分は，

$$
\rho^\alpha\rho^\beta\partial_\alpha X_\mu\psi^\mu - \frac{1}{4}(\bar{\psi}\psi)\rho^\alpha\rho^\beta\chi_\alpha = 0 \tag{3.4.9}
$$

を出すことに注意する．これらが前に導くと約束した拘束条件であり，ここで場の変分の結果として得られた．次にゲージ

$$
e^a_\alpha = \delta^a_\alpha; \quad \chi_\alpha = 0 \tag{3.4.10}
$$

をとることができる．つまり χ_α 場に対して大きな対称性があるために，それを完全に消去してしまうことができるのである．それに用いるのは，2 次元超対称性(3.4.5)と(3.4.7)の対称性を組み合わせたものである．このとき拘束条件は，

$$
T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X_\mu\partial_\beta X^\mu + \frac{1}{2}i\bar{\psi}\rho_{(\alpha}\partial_{\beta)}\psi - (\text{トレース}) = 0 \tag{3.4.11}
$$

$$
J^\alpha = \frac{1}{2}\rho^\beta\rho^\alpha\partial_\beta X_\mu\psi^\mu = 0 \tag{3.4.12}
$$

---

[1] 超対称性(supersymmetry)を略して，SUSY と書くことが多い．

となる．（ここで，添え字についている括弧は対称化した和の半分を取ることを表している.)　これらはもちろん，最初の(3.2.7)と(3.2.13)の議論でもともと導入した拘束条件になっている．こうして，今や拘束条件は単に系の状態に課すものではなく，不変な作用から導かれたものになった.

まとめると，この作用はいくつかの局所的対称性をもっている.

1. 局所的 2 次元ローレンツ対称性
2. パラメーターつけかえ
3. ワイル変換
4. 2 次元超対称性

しかし，それは 10 次元時空の超対称性はもっていない.

3.5　量子化

NS-R の作用の量子化は，ボソン的弦の量子化の単純な拡張になっている．驚くべきことに，高度に非線形な NS-R の作用がゲージを固定したあとでは自由理論になるのである.

再び次の 3 つの方法を用いよう．(1)グプタ-ブロイラー，(2)光錐，(3) BRST.

グプタ-ブロイラー量子化

グプタ-ブロイラー形式は 3 つのうちでもっとも簡単なものであり，実は今回いつも用いる形式となる．模型の中の大きな対称性を用いて，共形ゲージ

$$\chi_\alpha = 0; \quad e_\alpha^b = \delta_\alpha^b \tag{3.5.1}$$

をとることができる．このゲージでは作用はわれわれが用いていたものに帰着し，正の n, m および r に対し，

$$\text{NS}: \begin{cases} L_n|\Phi\rangle = 0 \\ G_r|\Phi\rangle = 0 \end{cases} \tag{3.5.2}$$

$$\text{R}: \begin{cases} L_n|\Psi\rangle = 0 \\ F_m|\Psi\rangle = 0 \end{cases} \tag{3.5.3}$$

を課すことになる．このように，われわれはすでにグプタ-ブロイラー形式で NS-R の作用を量子化していたのである.

光錐量子化

光錐形式の本質的な点は，拘束(3.4.11)と(3.4.12)を状態に適用するのではなく，横波すなわち物理的モードによって具体的に解いてしまい，すべての非物理的ゴースト

状態を消去するところにある．ここで，

$$\begin{cases} \psi^1 = 0 \\ \psi^\mu(\partial_\tau + \partial_\sigma)X_\mu = 0 \end{cases} \tag{3.5.4}$$

を課すことができる．この場合，大部分の生成子はほんの少し変わるだけである．本当に変化するのは場の − 成分で，それは共形生成子の構成分を含むようになる：

$$\alpha_n^- = \alpha_n^-(X) + \frac{1}{2p^+}\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left(r - \frac{1}{2}n\right) : b_{n-r}^i b_r^i : -\frac{1}{2}\frac{a\delta_{n,0}}{p^+}. \tag{3.5.5}$$

ここで右辺の第 1 項は，前に(2.3.16)で見つけたボソン的生成子であり，

$$b_r^- = \frac{1}{p^+}\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\alpha_{r-s}^i b_s^i \tag{3.5.6}$$

問題のあるローレンツ生成子は，− 成分を含むものである：

$$\begin{aligned} M^{-i} &= M_0^{-i} + K^{-i} \\ K^{-i} &= \frac{-i}{2p^+}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{D-2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\alpha_{-m}^j(b_{m-r}^i b_r^j - b_{m-r}^j b_r^i). \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

計算の結果，最終的に，

$$[M^{-i}, M^{-j}] = \frac{-1}{(p^+)^2}\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{-n}^i\alpha_n^j - \alpha_{-n}^j\alpha_n^i)(\Delta_n - n) \tag{3.5.8}$$

を得る．ここで，

$$\Delta_n = n\left(\frac{D-2}{8}\right) + \frac{1}{n}\left(2a - \frac{D-2}{8}\right) \tag{3.5.9}$$

である．したがってローレンツ不変性は，$D = 10$ で $a = \frac{1}{2}$ のときのみ保たれることがわかる．

BRST 量子化

BRST 量子化では，共形ゲージに付随した Faddeev-Popov 行列式を計算することから出発する．作用の大きな対称性を用いて，

$$e_\alpha^a = \delta_\alpha^a; \quad \chi_\alpha = 0 \tag{3.5.10}$$

を課すことができる．次に前にやったように，(3.4.5)と(3.4.7)の場の変分を行ったときの拘束条件を分析しなければならない：

$$\delta\chi_\alpha = \nabla_\alpha\varepsilon + i\rho_\alpha\eta. \tag{3.5.11}$$

前のように，ゲージの拘束に付随した Faddeev-Popov 行列式(1.6.10)は，

$$\Delta_{\mathrm{FP}} = \det\left[\frac{\delta}{\delta\varepsilon}\nabla_\alpha\varepsilon\right] \tag{3.5.12}$$

で与えられる．(η 場は，Faddeev-Popov ゴーストの行列式に寄与しない.）したがって反交換する部分に付随した Faddeev-Popov 行列式は，

$$\det[\nabla_\alpha] = \det[\nabla_z]\det[\nabla_{\bar{z}}] \tag{3.5.13}$$

となる．χ_α では2次元スピノールでもあり2次元ベクトルでもあるので，4つの成分をもつ．そのためにこの行列式を分析するのは少々骨が折れる．

前と同じように，演算子の行列式を計算するもっともやさしい方法は，それを指数化して作用に入れることである：

$$\begin{aligned} \det[\nabla_\alpha] &= \int D\beta\, D\gamma\, e^{-S_{\text{gh}}} \\ S_{\text{gh}} &= \frac{1}{\pi}\int d^2 z \beta\bar{\partial}\gamma + \text{c.c.} \quad . \end{aligned} \tag{3.5.14}$$

ここでゴースト場 β と γ は，**交換する**変数である．(この作用はボソン的弦に対して見つけた前のゴーストの作用(2.4.4)に似ているが，重要な点はこれらの新しいゴースト場 β と γ はテンソル $g_{\alpha\beta}$ ではなくスピノール χ_α の変分から出てきたものなので，共形群の下で b, c ゴーストとは異なる変換をすることである．このことは次の章でさらに論じる.)

したがって完全な作用は，もとの作用と，反交換するゴースト b, c と，交換するゴースト β, γ の部分の和となる．

超共形ゴーストのエネルギー運動量テンソルと超対称カレントは，容易に計算できる．それらのモーメントをとって，超 Virasoro 生成子

$$\begin{aligned} L_m^{\text{gh}} &= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}(m+n) : b_{m-n}c_n : + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}m+n\right) : \beta_{m-n}\gamma_n : \\ F_m^{\text{gh}} &= -2\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} b_{-n}\gamma_{m+n} + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}n-m\right)c_{-n}\beta_{m+n} \end{aligned} \tag{3.5.15}$$

を得る．

同様にゴーストの寄与を含めた作用は，まだべき零の変換の下で不変である．このべき零の変換の生成子は，

$$\begin{aligned} Q = &\sum_{n=-\infty}^{\infty}(L_{-n}c_n + F_{-n}\gamma_n) - \frac{1}{2}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}(m-n) : c_{-m}c_{-n}b_{m+n} : \\ &+ \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{3n}{2}+m\right) : c_{-n}\beta_{-m}\gamma_{m+n} : - \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\gamma_{-m}\gamma_{-n}b_{m+n} - ac_0 \end{aligned} \tag{3.5.16}$$

で与えられる [14–16]．ここで L と F の生成子は，α と d 振動子のみの関数である．$Q^2 = 0$ とすれば，

$$D = 10$$
$$a = \begin{cases} \frac{1}{2} & (\mathrm{NS}) \\ 0 & (\mathrm{R}) \end{cases} \tag{3.5.17}$$

を得る．物理的条件は，今は

$$Q|\mathrm{phys}\rangle = 0 \tag{3.5.18}$$

である．これを解くと，ふつうの物理的状態の条件

$$\mathrm{NS}: \begin{cases} \left(L_0 - \frac{1}{2}\right)|\phi\rangle = 0 \\ G_r|\phi\rangle = 0; \qquad r > 0 \end{cases} \tag{3.5.19}$$

$$\mathrm{R}: \begin{cases} L_0|\phi\rangle = 0 \\ F_n|\phi\rangle = 0; \quad n > 0 \end{cases} \tag{3.5.20}$$

が得られる．

さて，これらの振動子のアノーマリーへの寄与を計算してみよう．2 つの寄与が加わって 0 になるのは，10 次元でだけ可能であることがわかるであろう．ゴーストの寄与は，

$$\left\{F_m^{\mathrm{gh}}, F_n^{\mathrm{gh}}\right\} = 2L_{m+n}^{\mathrm{gh}} - 5m^2 \tag{3.5.21}$$

を与える．R 部分からのアノーマリーへの寄与は，$\frac{1}{2}Dm^2 + 2a$ であった．したがって，

$$\frac{1}{2}Dm^2 + 2a - 5m^2 = 0 \tag{3.5.22}$$

が得られ，これから

$$D = 10; \quad a = 0 \tag{3.5.23}$$

が決まる．同様に，NS 部分に対しては，アノーマリーは，

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{1}{4} - 5r^2 \tag{3.5.24}$$

に等しい．これが，ボソン部分からくるアノーマリー $\frac{1}{2}D(r^2 - \frac{1}{4}) + 2a$ と相殺しなければならない．したがって，

$$\frac{1}{2}D\left(r^2 - \frac{1}{4}\right) + 2a + \frac{1}{4} - 5r^2 = 0 \tag{3.5.25}$$

でなければならない．これは，

$$D = 10; \quad a = \frac{1}{2} \tag{3.5.26}$$

ならば，0 になる．

3.6 GSO 射影

NS-R 模型の作用(3.4.4)は，10 次元時空の超対称性の下で不変ではなかった．自明なことではないけれども，ある手続き(truncation)をすれば，NS-R 理論は 10 次元時

空の超対称性の下でも不変になる．これを見るために，まず弦の状態の空間を分析しよう．

n 番目のレベルのボソン的状態の全部の数は，整数 n の分配数，すなわち $P(n)$ に等しい．これを見るために，まず4番目のレベルの例を考えてみよう．このレベルでのハミルトニアンの固有関数である状態の全部の数は5である：

$$(a_{-1})^4|0\rangle;\quad (a_{-2})^2|0\rangle;\quad a_{-1}a_{-3}|0\rangle;\quad (a_{-1})^2a_{-2}|0\rangle;\quad a_{-4}|0\rangle. \tag{3.6.1}$$

これはまさに，整数4を他の整数の和にわける方法の全体の数，すなわち4の分配数であることに注意しよう．一般に N 番目のレベルでの各状態は，整数を分配するいろいろなやり方の1つとして表せる：

$$|\phi\rangle = a_{-n_1}^{\lambda_1}a_{-n_2}^{\lambda_2}a_{-n_3}^{\lambda_3}\cdots a_{-n_M}^{\lambda_M}|0\rangle. \tag{3.6.2}$$

ここで，

$$\begin{aligned} R|\phi\rangle &= N|\phi\rangle \\ N &= \sum_{i=1}^{M} n_i^{\lambda_i} \end{aligned} \tag{3.6.3}$$

で，R はこの空間に対する数演算子である．

統計力学では，あるエネルギーにどれだけの数の状態があるかを数える分配関数をしばしば導入する：

$$Z = \sum_n \langle n|e^{-H\tau}|n\rangle. \tag{3.6.4}$$

分配関数を用いれば弦の状態の数を数えることができる：

$$Z = \mathrm{Tr}(x^R) \tag{3.6.5}$$

$$x = e^{-\tau}. \tag{3.6.6}$$

このべき展開の x^N の係数が N の分配数，すなわち $P(N)$ にほかならない．このトレースは，いろいろな方法でとることができる．もっとも簡単なのは，コヒーレント状態を導入して，

$$1 = \int d\lambda\, d\lambda^* e^{-|\lambda|^2}|\lambda\rangle\langle\lambda| \tag{3.6.7}$$

を用いることである．そうするとトレースは，

$$Z = \int d\lambda d\lambda^* e^{-|\lambda|^2}\langle\lambda|x^R|\lambda\rangle \tag{3.6.8}$$

と表すことができる．積分を実行すると，

$$Z = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-26} \tag{3.6.9}$$

を得る．これが成り立つことは(1次元の場合に)この関数をべき展開して，各 x^N の

係数が $P(N)$ に等しいこと，すなわち，

$$Z = \sum_{i=1}^{\infty} P(i) x^i \tag{3.6.10}$$

を示せることからわかる．この関数は数学で有名な関数，Hardy-Ramanujan 関数に関係している．実際弦模型の奇跡的な性質のいくつかのものは，Hardy-Ramanujan 関数の恒等式に関係があるのである．

次に NS 部分と R 部分の状態を計算して，それらが超対称になっているかどうか見よう．少なくとも，この 2 つの部分の質量殻条件をみたす状態の数が同じであることが必要である．

NS-R のフォック空間は実は，ある状態が b 振動子を偶数個含むか奇数個含むかにより，2 つの小さなフォック空間にわかれてしまうことに注意しよう．b 振動子は反交換するので対になって縮約されなければならず，外線の全部の数は偶数でなければならない．そこで，任意の状態の b 振動子の数を単に数えるだけの「G パリティ」演算子を定義できる．それは，b が奇数に対しては -1 で，偶数に対しては $+1$ である：

$$G = (-1)^{\sum_{r=1/2}^{\infty} b_{-r} b_r}. \tag{3.6.11}$$

もし理論の G パリティが偶数の部分をとれば，これによりタキオンはただちに除かれ，最低の状態として質量 0 のベクトル粒子が残り，それは $10-2=8$ 個の物理的状態をもつことになる．

一方で R 部分も小さくできる．最低のフェルミオン状態が質量 0 のマヨラナ-ワイルであると要求すれば，それは 16 個しかモードをもたない．この数え方は次のようにする．D 次元のディラックスピノールは，$2^{D/2}=32$ 成分をもつ[2]．それがマヨラナ(実)であることを要求するとこの数が半分になり，ワイルであることを要求するとその数がさらに半分になる．そこで，各レベルでの状態の数を全部数える分配関数を計算してみよう．NS 部分に対しては，

$$\begin{aligned} f_{\rm NS} &= \sum_{n=0}^{\infty} \dim V_n \, x^n \\ &= x^{-1/2} {\rm Tr} \left[\frac{1}{2} (1+G) x^R \right] \end{aligned} \tag{3.6.12}$$

ここで，

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^\dagger a_n + \sum_{r=1/2}^{\infty} r b_r^\dagger b_r \tag{3.6.13}$$

である．トレースは厳密に評価することができ，

$$f_{\rm NS} = \frac{1}{2} x^{-1/2} \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-8} \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1+x^{n-1/2})^8 - \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^{n-1/2})^8 \right] \tag{3.6.14}$$

[2] 今は，$D=10$ で，複素数で 32 成分のことである．実で数えれば 64 成分で，$\frac{1}{4}$ 倍して 16 成分となり，すぐ上に述べたことと一致する．

を得る．これに対し，R 部分のトレースは，

$$f_{\mathrm{R}} = 8\mathrm{Tr}(x^R) \tag{3.6.15}$$

となる．ここで，

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^\dagger a_n + d_n^\dagger d_n) \tag{3.6.16}$$

である．これから，

$$f_{\mathrm{R}} = 8\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-8}(1+x^n)^8 \tag{3.6.17}$$

を得る．最初は，これらの 2 つの部分には何の関係もないと思うかもしれない．しかし早くも 1829 年に Jacobi には，これらの 2 つの表式がまったく同等であることがわかっていた：

$$f_{\mathrm{NS}} = f_{\mathrm{R}}. \tag{3.6.18}$$

これはもちろん，この小さくした NS-R 模型が超対称であることの証明にはなっていないが，必要な条件ではある．この射影は (Gliozzi, Scherk, Olive にちなんで) GSO 射影と呼ばれ，超弦理論では非常に重要な役割りを果たす．(第 5 章で GSO 射影をすることが，閉じた超弦の 1 ループ振幅がモジュラー不変であることと同等であることを見る.)

このように NS-R のアプローチの大きな欠点の 1 つは，時空の超対称性が大変あいまいであることである．NS-R 模型の第 2 の大きな欠点は，フェルミオンの放出の頂点関数がとても扱いにくく，ローレンツ変換の下でよい性質をもっていないことである．その結果，2 つのフェルミオンの散乱振幅を計算して求めるのに，何年もかかった．NS-R 理論では，ボソンとフェルミオン結合の頂点は [18–22]

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{BB}} &= k_\mu \psi^\mu V_0 \\ V_{\mathrm{FF}} &= \gamma_{11}(-1)^{\sum_n d_{-n}\cdot d_n} V_0 \\ V_{\mathrm{FB}} &= e^{-L_1^d} W V_0 \end{aligned} \tag{3.6.19}$$

である．ここで L_1^d は，Virasoro 生成子で，

$$\begin{aligned} W = \langle 0|_B \exp &\left[\frac{1}{i\sqrt{2}} \sum_{m=0,r=1/2}^{\infty} (-1)^{m-r} \begin{pmatrix} m-\frac{1}{2} \\ r-\frac{1}{2} \end{pmatrix} d_m^{\mu\dagger} b_{\mu r}\right] \\ &\times \exp\left[-\frac{1}{4}\sum_{r,s=1/2}^{\infty} \frac{r-s}{r+s}(-1)^{r+s} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ r-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ s-\frac{1}{2} \end{pmatrix} b_r^\mu b_{s\mu}\right] \gamma_{11}|u\rangle_F \end{aligned} \tag{3.6.20}$$

で，この頂点はボソンの真空を左にもちフェルミオンの真空を右にもっているので，ボソンのフォック空間をフェルミオンのフォック空間へ変えてくれるものである．しかし残念ながら，この頂点は共形スピン $\frac{5}{8}$ をもっているので，共形不変な振幅を構成する

のは困難である．

このようにNS-R模型は，共形ゲージでは本質的に自由理論なので魅力的ではあるが，フェルミオン部分の問題のためにもっと別の形の理論へいかざるをえない．そこでGSO射影をしたNS-R理論と同等で，明白に時空で超対称なGreen-Schwarzの作用を調べることにしよう．

3.7 超弦理論

NS-R模型は簡単で美しいものであったが，2次元の世界面上の超対称性しかなく，本当の10次元の超対称性をもたなかった．そこで10次元の超対称性が明白なGreen-Schwarzの作用を与えよう［23, 24］：

$$S = \frac{-1}{4\pi\alpha'}\int d\sigma\, d\tau \left\{\sqrt{g}g^{\alpha\beta}\Pi_\alpha\cdot\Pi_\beta + 2i\varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu(\bar\theta^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 - \bar\theta^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2)\right.$$
$$\left. -2\varepsilon^{\alpha\beta}\bar\theta^1\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^1\bar\theta^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2\right\}. \tag{3.7.1}$$

ここで，

$$\Pi^\mu_\alpha = \partial_\alpha X^\mu - i\bar\theta^A\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^A \tag{3.7.2}$$

で，2つのθ^A場$(A=1,2)$は(NS-R模型のように時空のベクトルではなく)本当の時空のフェルミオン場である．しかしながら，これらの10次元のスピノールは，2次元の2成分のスピノールではなくスカラーとして変換する．超対称な点粒子の作用(3.1.1)のように，この作用は大域的な超対称性

$$\begin{aligned}\delta\theta^A &= \varepsilon^A\\ \delta X^\mu &= i\bar\varepsilon^A\Gamma^\mu\theta^A\end{aligned} \tag{3.7.3}$$

の下で不変である．しかしその証明には，恒等式

$$\Gamma_\mu\psi_{[1}\bar\psi_2\Gamma^\mu\psi_{3]} = 0 \tag{3.7.4}$$

を用いなければならない．この恒等式を証明するには，Fierz変換を用いなければならない．そしてこの恒等式が成り立つのは，次の条件がみたされている場合に限られることがわかる．

1. $D=3$で，フェルミオンがマヨラナである．
2. $D=4$で，フェルミオンがマヨラナかワイルである．
3. $D=6$で，フェルミオンがワイルである．
4. $D=10$で，フェルミオンがマヨラナでかつワイルである．

ふつうのディラック表現は複素で，どんな時空の次元でも存在する．ディラック行列のマヨラナ表現は，それらが全部実(または虚)であるものである．したがってそれ

らは，ディラック表現の半分しか成分をもたない．それらは，$D = 2, 3, 4 \pmod 8$ の次元でのみ存在する．ディラック行列のワイル表現は，ワイル射影演算子

$$\frac{1}{2}(1 \pm \Gamma_{D+1}); \quad \Gamma_{D+1} = \Gamma_0 \Gamma_1 \cdots \Gamma_{D-1}$$

により，成分の半分を射影して除いたものである．ワイル表現は偶数次元でのみ存在する．そして最後に，同時にマヨラナでありワイルであるスピノールは，$2 \pmod 8$ の次元でのみ定義できることが知られている：

$$\text{マヨラナ-ワイルスピノール}：D = 2 \mod 8.$$

今の場合は，10次元のマヨラナ-ワイルスピノールを選ぶことになる．

作用(3.7.1)が，10次元で局所的に超対称であることを証明するには，まず次の射影演算子を構成しなければならない．すなわち，2次元ベクトルの自己双対な(self-dual)部分と反自己双対な(anti-self-dual)部分への射影演算子

$$P_{\pm}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\beta} \pm \varepsilon^{\alpha\beta}/\sqrt{g}) \tag{3.7.5}$$

を導入する．この射影演算子は，次の性質をもつ：

$$\begin{aligned} P_{\pm}^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} P_{\pm}^{\gamma\delta} &= P_{\pm}^{\alpha\delta} \\ P_{\pm}^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} P_{\mp}^{\gamma\delta} &= 0 \\ \kappa^{1\alpha} &= P_{-}^{\alpha\beta} \kappa_{\beta}^{1} \\ \kappa^{2\alpha} &= P_{+}^{\alpha\beta} \kappa_{\beta}^{2}. \end{aligned}$$

ここで $\kappa^{A\alpha a}$ は超対称のパラメーターである．添字 A は $A = 1, 2$ で，α は2次元のベクトルの添字，a は10次元のスピノールの添字である．ふつうはスピノールの添字を省略することにする．最後の2つの方程式は，κ が $A = 2(1)$ に対し自己双対(反自己双対)であることを表している．

こうすると作用は，

$$\begin{aligned} \delta\theta^A &= 2i\Gamma \cdot \Pi_\alpha \kappa^{A\alpha} \\ \delta X^\mu &= i\bar{\theta}^A \Gamma^\mu \delta\theta^A \\ \delta(\sqrt{g} g^{\alpha\beta}) &= -16\sqrt{g}(P_{-}^{\alpha\gamma} \bar{\kappa}^{1\beta} \partial_\gamma \theta^1 + P_{+}^{\alpha\gamma} \bar{\kappa}^{2\beta} \partial_\gamma \theta^2) \end{aligned} \tag{3.7.6}$$

の下で不変であることが示せる．GSの作用の大きな成果は，10次元の超対称性を陽に含んでいることである．今は基本的な場が(NS-R理論の反交換するベクトル場でなく)反交換する本当の時空のスピノールなので，時空の超対称性の演算子 Q_α を具体的に構成することができるのである．

しかしこの表し方の大きな欠点として，点粒子の場合のように単純な共変的量子化が存在しないということがある．点粒子の場合の(3.1.9)のように，

$$\pi_A = \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}_A} \sim i\Gamma^\mu \dot{X}_\mu \theta^A + \cdots \tag{3.7.7}$$

となり，再び量子化の関係が非線形であることになる．その結果場の間の交換関係が非常に非線形になってしまうのである．さらに悪いことに，実は交換関係が拘束条件の逆

数に比例していることがわかる．すなわち，それらはおそらく存在しない [2, 24–32]．
このために，**光錐量子化を使わざるを得ない．**

3.8 GS 作用の光錐量子化

ゲージを固定するときには，スピノールの中の独立な自由度の数を数えることが大事である．ふつうは(D が偶数の) D 次元のスピノールは，$2^{D/2}$ 個の複素成分をもつ．したがって，10 次元のスピノール $\theta^{1,2}$ は，$32+32$ 個の複素成分をもつ．しかしそれをマヨラナスピノールに制限すると，その半分の $32+32$ の実成分が残る．それをさらにワイルスピノールに制限すると，再び半分になり，$16+16$ の実成分となる．光錐ゲージを選ぶと，独立な成分の数がさらに $8+8$ の実成分になる．最後に，質量殻条件がみたされている場合，これらのスピノールがディラック方程式をみたし，独立な成分の数がさらに半分の 8 になる．これはまさに，弦 X_i の 8 つのボソン的成分と超多重項をなすのに必要な成分の数である．こうして質量殻条件をみたす場合には，超対称性をみたすのに必要な正しい成分の数をちょうど得ることができるのである．スピノール θ^1 と θ^2 の成分の数を N とすれば，次のようになる：

ディラック：	$N=32+32$	複素成分
マヨラナ：	$N=32+32$	実成分
マヨラナ-ワイル：	$N=16+16$	実成分
光錐：	$N=8+8$	実成分
質量殻：	$N=8$	実成分.

さて，光錐ゲージへもっていくことを始めよう．ゲージ拘束条件を

$$\begin{aligned}\Gamma^+\theta^{1,2}&=0\\ \Gamma^\pm&=2^{-1/2}(\Gamma^0\pm\Gamma^9)\end{aligned} \tag{3.8.1}$$

と選ぼう．これらのガンマ行列は，

$$(\Gamma^+)^2=(\Gamma^-)^2=0 \tag{3.8.2}$$

をみたすので，上の条件はスピノールのもとの $16+16$ 成分のうち，ちょうど半分を消すことを意味している．このゲージでは最終的な光錐の作用は大変簡単になる：

$$S=\frac{-1}{4\pi\alpha'}\int d\sigma\, d\tau(\partial_a X^i\partial^a X^i-i\bar{S}\rho^b\partial_b S). \tag{3.8.3}$$

ここで

$$\sqrt{p^+}\,\theta\to S \tag{3.8.4}$$

という置き換えをしてある．重要な点は，超弦の単純な共変的量子化をはばんでいた(3.7.1)の中の複雑な非線形の項が，すべてなくなっていることである．(面白いことが起きていることにも注意しよう．共変な GS 作用では，2 次元の θ^1 と θ^2 は互いに

独立なスカラーであった．ところが今の光錐ゲージでは，これらの2つの独立なスカラーが混ざって1つの2次元スピノールになっているのである.)

系が自由粒子系に帰着したので，量子化は大変簡単になる(これに対し，共変な理論は非線形でとても取り扱えなかった)．運動方程式は，自由弦のもの

$$
\begin{aligned}
(\partial_\tau + \partial_\sigma) S^{1a} &= 0 \\
(\partial_\tau - \partial_\sigma) S^{2a} &= 0
\end{aligned}
\tag{3.8.5}
$$

となる．そして交換関係は，

$$
\left\{ S^{A\alpha}(\sigma, \tau), S^{Bb}(\sigma', \tau) \right\} = \pi \delta^{ab} \delta^{AB} \delta(\sigma - \sigma') \tag{3.8.6}
$$

となる．前のように，これらの場にはいくつかの境界条件を課すことができる．開いた弦(I型)に対しては，次の境界条件をみたす：

$$
\begin{cases}
S^{1a}(0, \tau) = S^{2a}(0, \tau) \\
S^{1a}(\pi, \tau) = S^{2a}(\pi, \tau).
\end{cases}
\tag{3.8.7}
$$

これらの2つの弦の場は，同じSO(8)のカイラリティーをもっていることに注意しよう．これはこれらの関係だけが，2つの超対称性のパラメーター ε^A を等しくおく大域的な超対称性変換と，相容れるものであるためである．このことは，開いたI型の超弦が $N = 1$ の超対称性しかもたないことを示している．(前の式で符号を変えると，反対のカイラリティーが生じ，超対称性は絶対に不可能となる.) したがって基準モードの展開は，

$$
\begin{aligned}
S^{1a}(\sigma, \tau) &= 2^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a e^{-in(\tau - \sigma)} \\
S^{2a}(\sigma, \tau) &= 2^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a e^{-in(\tau + \sigma)}
\end{aligned}
\tag{3.8.8}
$$

となる．ここで，

$$
\left\{ S_m^a, S_n^b \right\} = \delta^{ab} \delta_{n,-m} \tag{3.8.9}
$$

である．

しかし閉じた弦(II型)では，実は2つの可能性がある．場はカイラルであっても，そうでなくてもよいのである．閉じた弦は定義から σ に関して周期的であり，次の基準モード展開をもつ：

$$
\begin{cases}
S^{1a}(\sigma, \tau) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a e^{-2in(\tau - \sigma)} \\
S^{2a}(\sigma, \tau) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{S}_n^a e^{-2in(\tau + \sigma)}.
\end{cases}
\tag{3.8.10}
$$

これらの2つの場が異なるカイラリティーをもつ場合は，IIA型と呼ぶ．I型の弦のように，同じカイラリティーをもつ場合はIIB型と呼ぶ．すなわち，

$$\text{I 型} = \begin{cases} \text{開および閉弦} \\ \text{同じカイラリティー} \end{cases}$$

$$\text{IIA 型} = \begin{cases} \text{閉弦} \\ \text{反対のカイラリティー} \end{cases} \tag{3.8.11}$$

$$\text{IIB 型} = \begin{cases} \text{閉弦} \\ \text{同じカイラリティー} \end{cases}$$

光錐の超弦のスペクトラムはとくに魅力的である．というのは，これらの理論には質量殻条件をみたす超対称性があるので，すべての粒子状態がボソンのヘリシティー状態がフェルミオンの数に一致するようになっているからである．各粒子の質量はハミルトニアンで決まり，

$$N = \alpha'(\text{質量})^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{-n}^i\alpha_n^i + nS_{-n}^aS_n^a) \tag{3.8.12}$$

で与えられる．I 型では理論の基底状態は，質量 0 のベクトル粒子とそのスピノールの相棒からなる．質量 0 のベクトル場の 8 つの物理的な横波偏極状態を $|i\rangle$ で表そう．そのスピノールの相棒 $|a\rangle$ は，

$$|a\rangle = \frac{i}{8}(\gamma_i S_0)^a|i\rangle \tag{3.8.13}$$

と表される．今状態を，

$$\begin{aligned} \langle i|j\rangle &= \delta_{ij} \\ \langle a|b\rangle &= \frac{1}{2}(h\gamma^+)^{ab} \\ |i\rangle &= \frac{i}{8}(\bar{S}_0\gamma_{i+})^a|a\rangle \end{aligned} \tag{3.8.14}$$

と規格化する．ここで h はワイル射影演算子である．($\gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$ は，ガンマ行列の積を添字のすべての巡回について和をとったものである．規格化は $\gamma^{12} = \gamma^1\gamma^2$ としておく.)

もし光錐ゲージでの 10 次元超対称マクスウェル理論を量子化するのであれば，超対称な対 (A_μ, ψ^a) は，

$$\text{超対称な多重項}: \begin{cases} A_i \to |i\rangle \\ \psi^a \to |a\rangle \end{cases} \tag{3.8.15}$$

に対応する．こうして光錐の理論は，最低次で超対称マクスウェル理論を再現する．

次のレベルでは，128 個のボソンと 128 個のフェルミオン状態がある：

$$128\text{ 個のボソン}：\begin{cases}\alpha^i_{-1}|j\rangle \to 64\text{ 個の状態}\\ S^a_{-1}|b\rangle \to 64\text{ 個の状態}\end{cases} \tag{3.8.16}$$

$$128\text{ 個のフェルミオン}：\begin{cases}\alpha^i_{-1}|a\rangle \to 64\text{ 個の状態}\\ S^a_{-1}|i\rangle \to 64\text{ 個の状態}.\end{cases} \tag{3.8.17}$$

$N=2$ のレベルでは，1152 個のボソンと，同数のフェルミオンがある：

$$1152\text{ 個のボソン}：\begin{cases}\alpha^i_{-1}\,\alpha^j_{-1}|k\rangle \to 288\text{ 個の状態}\\ S^a_{-1}S^b_{-1}|i\rangle \to 224\text{ 個の状態}\\ \alpha^i_{-2}|j\rangle \to 64\text{ 個の状態}\\ \alpha^i_{-1}S^a_{-1}|b\rangle \to 512\text{ 個の状態}\\ S^a_{-2}|b\rangle \to 64\text{ 個の状態}\end{cases}$$

$$1152\text{ 個のボソン}：\begin{cases}\alpha^i_{-1}\,S^a_{-1}|j\rangle \to 512\text{ 個の状態}\\ S^a_{-2}|i\rangle \to 64\text{ 個の状態}\\ \alpha^i_{-1}\alpha^j_{-1}|a\rangle \to 288\text{ 個の状態}\\ \alpha^i_{-2}|a\rangle \to 64\text{ 個の状態}\\ S^a_{-1}S^b_{-1}|c\rangle \to 224\text{ 個の状態}.\end{cases} \tag{3.8.18}$$

この手続きは，次のレベルでもくり返すことができ，15,360 個の状態が得られる．

当然ながら，これらの質量 0 の多重項を，O(9) によって分類することもできる．これは**質量 0 の** D 次元の超重力が，コンパクト化したとき，$D-1$ 個の**質量**をもつ状態を出すからである．こうして 128 個のボソンと 128 個のフェルミオンをもつ $N=1$ の部分では，ボソンは既約な O(9) の表現 $44+84$ となり，フェルミオンは 1 つのスピン $\frac{3}{2}$ の 128 多重項にあてはまる．$N=2$ のレベルでは，ボソンは O(9) の $9+36+126+156+231+594$ の表現にあてはまり，フェルミオンは $16+128+432+576$ にまとまる．

II 型の閉じた弦では，スペクトラムはもっと面白い．質量 0 のレベルで，128 個のボソンと 128 個のフェルミオンをもつ超重力が得られるからである：

$$\text{超対称多重項}：\begin{cases}128\text{ ボソン } |i\rangle|j\rangle;\, |a\rangle|b\rangle\\ 128\text{ フェルミオン } |i\rangle|a\rangle;\, |a\rangle|i\rangle.\end{cases} \tag{3.8.19}$$

ここで第 1 の状態は S 振動子で，第 2 は $\tilde{S}$ 振動子のことを表している．もしフェルミオンが反対のカイラリティーをもっている(IIA 型)ならば，これはふつうの $N=1$, $D=11$ 超重力を，$N=2$, $D=10$ 次元に落としたものを表している．

しかしフェルミオンが同じカイラリティーをもつ場合は複雑である．この理論には 10 次元の 4 階反対称テンソルがあり，8 次元で 35 個の独立な成分をもつ．そのような粒子には，共変的な作用が存在しないことが示されているのである！ したがって，この部分には超対称な作用が存在しないという異常な情況になる．もちろん理論はそ

れでもまともなものである．S 行列要素は具体的に計算できる．しかし厳密にいえば，S 行列は共変的な作用からは得られない [33]．

最後に，I 型の理論の対称化した状態に制限すれば，$N=1$, $D=10$ の超重力が得られる．これらの理論でスロープ α' が 0 の極限をまとめておこう：

$$\begin{aligned}
\text{I 型} &\to N=1, D=10 \text{ 超 Yang-Mills}\\
\text{I 型} &\to N=1, D=10 \text{ 超重力}\\
\text{IIA 型} &\to N=2, D=10 \text{ 超重力}\\
\text{IIB 型} &\to \text{存在しない}.
\end{aligned} \tag{3.8.20}$$

このようにスペクトラムを分析して超対称性を示すことは，上のレベルへ行けば行くほど困難になる．しかし任意の高いレベルで全体のスペクトラムが超対称になることを証明するためには，ハミルトニアンと交換する超対称性の生成子が存在することを示せばよい．そこで超対称性の生成子を全次数で具体的に計算して，これを証明することにしよう．

光錐ゲージでは，2 つの超対称性変換 (3.7.6) と (3.7.3) は非常に簡単になる：

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}\delta S^a = (2p^+)^{1/2}\eta^a\\ \delta X^i = 0\end{cases}\\
&\begin{cases}\delta S^a = -i\sqrt{p^+}\rho^\alpha\partial_\alpha X^i\gamma^i_{a\dot a}\varepsilon^{\dot a}\\ \delta X^i = (p^+)^{-1/2}\gamma^i_{a\dot a}\bar\varepsilon^{\dot a}S^a.\end{cases}
\end{aligned} \tag{3.8.21}$$

SO(8) には，3 つの 8 次元表現がある．1 つはベクトル表現 8_v で添字 i で表す．残りの 2 つは両方ともスピノールである．その 1 つの表現には添字 a を用い，他方に $\dot a$ を用いることにする．そうすると γ 行列は $\gamma^i_{a\dot a}$ という変換の添字をもつことになる．(3.8.21) に与えられている変換を再現する 2 つの超対称性の生成子は，場によって具体的に表すことができる：

$$\begin{aligned}
Q^a &= (2p^+)^{1/2}S^a_0\\
Q^{\dot a} &= (p^+)^{-1/2}\gamma^i_{\dot a a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}S^a_{-n}\alpha^i_n.
\end{aligned} \tag{3.8.22}$$

これらの生成子の間の反交換関係を計算するのは，今や容易である：

$$\begin{cases}
\left\{Q^a, Q^b\right\} = 2p^+\delta^{ab}\\
\left\{Q^a, Q^{\dot a}\right\} = \sqrt{2}\gamma^i_{a\dot a}p^i\\
\left\{Q^{\dot a}, Q^{\dot b}\right\} = 2H\delta^{\dot a\dot b}.
\end{cases} \tag{3.8.23}$$

ここで，

$$H = \frac{1}{p^+}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha^i_{-n}\alpha^i_n + nS^a_{-n}S^a_n\right] + \frac{1}{2}p_i^2\right\} \tag{3.8.24}$$

である．次にこの光錐理論はローレンツ不変であるだけではなく超ポアンカレ不変で

もあるはずである．ふつうの交換子だけではなく，

$$[M^{\mu\nu}, Q_\alpha] \sim -\frac{1}{2} i (\gamma^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta \tag{3.8.25}$$

も示すべきである．ここで，α, β は 10 次元のスピノール添字を表す．再び唯一困難な交換子は，振動子の − 成分を含むものだけである：

$$\alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\alpha_{n-m}^i \alpha_m^i + \left(m - \frac{1}{2} n \right) S_{n-m}^a S_m^a \right). \tag{3.8.26}$$

問題の交換子は，ふつうより余分の項をもっている：

$$M^{-i} = M_0^{-i} - \frac{i}{4p^+} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} S_{n-m}^a \gamma_{ab}^{ij} S_m^b \alpha_{-n}^j. \tag{3.8.27}$$

理論は臨界次元である 10 次元で考えているので，計算の結果

$$[M^{-i}, M^{-j}] = 0 \tag{3.8.28}$$

が成り立つことがわかる．さらに超ポアンカレ群の交換子

$$[M^{-i}, Q^a] = \frac{-i}{\sqrt{2}} \gamma_{a\dot{a}}^i Q^{\dot{a}} \tag{3.8.29}$$

も得られる．こうして GS 模型のスペクトラムが，すべてのレベルで 10 次元超対称であることの証明が完結する．

3.9　頂点と樹木

次に相互作用の問題に移る．頂点関数の性質についてはいろいろうまい推測を行わねばならないが，頂点が超対称性の下で正しく変換することを要求すると，最終的な形に厳しい制限がつく．超弦に対し時空の超対称性をすでに示したので，この制限が樹木を構成するのに十分であることを示そう．超対称性の演算子によりフェルミオンの頂点はボソンの頂点に移り，逆も移れることを要求する．これが理論に莫大な数の制限を課し，理論そのものをほとんど一意的に決定してしまうのである．

Q で生成される超対称性の変換の下で，頂点 V_F と V_B が互いに変換しあうことを要求する：

$$\begin{aligned} [\eta^a Q^a, V_F(u,k)] &\sim V_B(\tilde{\zeta}, k) \\ [\eta^a Q^a, V_B(\zeta,k)] &\sim V_F(\tilde{u}, k) \\ [\varepsilon^{\dot{a}} Q^{\dot{a}}, V_F(\hat{u},k)] &\sim V_B(\hat{\zeta}, k) \\ [\varepsilon^{\dot{a}} Q^{\dot{a}}, V_B(\hat{\zeta},k)] &\sim V_F(\hat{u}, k). \end{aligned} \tag{3.9.1}$$

ここで ζ は質量 0 のベクトル粒子の偏極テンソルで，u はそのマヨラナ-ワイルスピノールの相棒を表す．これらの規則は複雑なもので，超対称性変換が必然的に時空の中の回転を生成するために，この超対称変換をする場合，ζ と u も正しく $\tilde{\zeta}, \hat{\zeta}$ および

$\tilde{u}, \hat{u}$ に変換しなければならないことになる．

これらの頂点が，あるベクトル B とスピノール F で

$$\begin{cases} V_B(\zeta, k) = & \zeta \cdot B e^{ik\cdot X} \\ V_F(u, k) = & uF e^{ik\cdot X} \end{cases} \tag{3.9.2}$$

と表せると仮定するのが自然である．すばらしいことに，光錐ゲージで詳しくやってみると，単純な B と F の値でこれらの条件がすべてみたせることがわかる．

まず回転したスピノールと偏極テンソルを計算することから始めよう．偏極テンソルとスピノールがどのように変換するかを計算するには，超対称性の生成子の第0成分をとり，それがどのように状態を変換するかを見ればよい．0番目のレベルでは，

$$\begin{aligned} Q^a &\longrightarrow (2p^+)^{1/2} S_0^a \\ Q^{\dot{a}} &\longrightarrow (p^+)^{-1/2} (\gamma^i p^i)_{a\dot{a}} S_0^a \end{aligned} \tag{3.9.3}$$

を得る．これらの0番目の成分は，偏極テンソルをマヨラナ-ワイルスピノールに変換する．そして，

$$\begin{cases} \eta^a Q^a |u\rangle = |\tilde{\zeta}\rangle \\ \eta^a Q^a |\zeta\rangle = |\tilde{u}\rangle \\ \varepsilon^{\dot{a}} Q^{\dot{a}} |\zeta\rangle = |\hat{u}\rangle \\ \varepsilon^{\dot{a}} Q^{\dot{a}} |u\rangle = |\hat{\zeta}\rangle \end{cases} \tag{3.9.4}$$

と定義しよう．次に(3.9.3)を(3.9.4)に挿入して，変換されたスピノールとベクトルについて解く．こうすれば回転したスピノールと偏極テンソルが，

$$\begin{cases} \tilde{\zeta}^i = (\gamma^i)_{a\dot{a}} \eta^a \mu^{\dot{a}} \\ \tilde{u}^{\dot{a}} = \eta^a k^+ (\gamma^i \zeta^i)_{a\dot{a}} \\ \hat{u}^{\dot{a}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} (\varepsilon \gamma_{ij})^{\dot{a}} k^i \zeta^j \\ \hat{\zeta}^i = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon^{\dot{a}} \gamma^i_{a\dot{a}} u^a) + \frac{\sqrt{2}}{k^+} \varepsilon_{\dot{a}} u^a k^j \end{cases} \tag{3.9.5}$$

となることを示すのは簡単である．(3.9.5)を(3.9.1)に挿入すると，B と F の場についての解が

$$\begin{cases} B^+ = p^+ \\ B^i = \dot{X}^i - R^{ij} k^j \\ F^{\dot{a}} = (2p^+)^{-1/2} \left[(\gamma \cdot \dot{X} S)^{\dot{a}} + \frac{1}{3} : (\gamma^i S)^{\dot{a}} R^{ij} : k^j \right] \\ F^a = \left(\frac{p^+}{2} \right)^{1/2} S^a \end{cases} \tag{3.9.6}$$

と求まる．ここで，

$$R^{ij} = \frac{1}{4} \gamma^{ij}_{ab} S^a S^b \tag{3.9.7}$$

である．これで頂点と伝播関数について縮約して，樹木を得ることができる．このア

プローチの大きな長所は，多重ボソン振幅を計算するのとほとんど同じくらい容易に，多重フェルミオン振幅を計算できることである．たとえば伝播関数と，フェルミオンとボソンの散乱の振幅は，

$$D = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^{i} \alpha_{n}^{i} + n S_{-n}^{a} S_{n}^{a} + \frac{1}{2} p^2 \right\}^{-1} \tag{3.9.8}$$

$$A_N = \langle 0; k_1 | V(k_2) D \cdots V(k_{N-1}) | 0; k_N \rangle \tag{3.9.9}$$

で与えられる．このいろいろな頂点はフェルミオンのものかボソンのものである．たとえば4点振幅は，

$$A_4 = K \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}t\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t\right)} \tag{3.9.10}$$

に等しい．ここで K は振幅の適当なスピン構造を与える行列である．u をスピノール，ζ を質量0の場の偏極とすれば，

$$\begin{aligned} K(u_1, \zeta_2, u_3, \zeta_4) &= -\frac{1}{2} t (\bar{u}_1 \Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\lambda u_3) \zeta_{2\mu} (k_3 + k_4)_\nu \zeta_{4\lambda} \\ &\quad + \frac{1}{2} s (\bar{u}_1 \Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\lambda u_3) \zeta_{4\mu} (k_2 + k_3)_\nu \zeta_{2\lambda} \end{aligned} \tag{3.9.11}$$

$$K(u_1, u_2, u_3, u_4) = -\frac{1}{2} s (\bar{u}_2 \Gamma^\mu u_3)(\bar{u}_1 \Gamma_\mu u_4) + \frac{1}{2} t (\bar{u}_1 \Gamma^\mu u_2)(\bar{u}_4 \Gamma_\mu u_3)$$

となる．すでに述べたように，質量0のスピノールとベクトルの散乱振幅の基本的な形(3.9.10)は同じになっている．唯一の差は因子 K にあるだけである．

3.10　まとめ

まとめると，超弦理論には2つの同等な形がある．NS-R と GS の作用の相対的な長所と欠点は次の通りである．

1. NS-R の作用は，共変的にも光錐ゲージでも線形で容易に量子化できる．ボソンに対する樹木とループは容易に構成できる．これは，2次元の超対称性の下で明白に不変である．しかしこれらの大きな利点と引きかえに，10次元の時空の超対称性は控え目に言っても大変あいまいである．反交換するベクトル場 ψ_μ に基づいているのでスピンと統計に問題があり，GSO 射影が必要となる．さらにフェルミオン放出の頂点はとても使いにくく，多重フェルミオン振幅を計算するのは実際上無理である．

2. GS の作用は，すべての質量レベルで明白に10次元で超対称である．それは，反交換するベクトル場ではなく，本当の時空のスピノールに基づいている．しかし作用は非常に非線形で，今のところ共変的な量子化は不可能のようである．これは光錐ゲージでのみ量子化されている．この共変でないゲージでは，多重フェルミオンの樹木を含めてすべての振幅が計算できる．

NS-R 理論についていくつかのことを復習しよう．完全な NS-R の作用は，

$$L = \frac{-1}{4\pi\alpha'}\sqrt{g}\Big[g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \nabla_\alpha \psi_\mu + 2\bar{\chi}_\alpha \rho^\beta \rho^\alpha \psi^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu \psi^\mu \bar{\chi}_\alpha \rho^\beta \rho^\alpha \chi_\beta\Big] \tag{3.10.1}$$

で与えられる．この作用は，

$$2\text{ 次元超対称性}:\begin{cases} \delta X^\mu = \bar{\varepsilon}\psi^\mu \\ \delta\psi^\mu = -\rho^\alpha \varepsilon(\partial_\alpha X^\mu - \bar{\psi}^\mu \chi_\alpha) \\ \delta e^a_\beta = -2i\bar{\varepsilon}\rho^a \chi_\beta \\ \delta\chi_\alpha = \nabla_\alpha \varepsilon \end{cases} \tag{3.10.2}$$

またワイル，パラメーターつけかえおよび 2 次元ローレンツ変換の下で不変である．この形式の長所は，エネルギー運動量テンソルと超対称カレントが超 Virasoro 代数を生成し，それで理論の中のすべてのゴーストを除くことができることである．前の超対称な作用の場合のように，これらのゲージ条件を手で課す必要はない．

量子化のための手順は，ボソン的弦の場合に用いたのと同じである．まず作用の対称性を分離して，これらの対称性から代数を引き出し，この代数を用いてゴースト状態を消してユニタリーな理論を得る：

作用 → 対称性 → カレント → 代数 → 拘束 → ユニタリー性.

ツバイバインと χ 場を消去すれば，超共形ゲージでの NS-R 理論を得る：

$$L = -\frac{1}{2\pi}(\partial_a X_\mu \partial^a X^\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^a \partial_a \psi_\mu). \tag{3.10.3}$$

そして局所的に超対称なもとの作用の不変性を用いて，次のカレントを構成し，それらを 0 にすることができる：

$$J_a = \frac{1}{2}\rho^b \rho_a \psi^\mu \partial_b X_\mu \tag{3.10.4}$$

$$T_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu + \frac{i}{4}\bar{\psi}^\mu \rho_a \partial_b \psi_\mu + \frac{i}{4}\bar{\psi}^\mu \rho_b \partial_a \psi_\mu - (\text{トレース}). \tag{3.10.5}$$

これらの拘束条件のモーメントを計算すれば，それらは代数をなす：

$$\text{NS:}\begin{cases} [L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{8}(m^3 - m)\delta_{m,-n} \\ [L_m, G_r] = \left(\frac{1}{2}m - r\right) G_{m+r} \\ [G_r, G_s] = 2L_{r+s} + \frac{1}{2}D\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r,-s}. \end{cases}$$
$$\text{R:}\begin{cases} [L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{8}m^3\delta_{m,-n} \\ [L_m, F_n] = \left(\frac{1}{2}m - n\right) F_{m+n} \\ \{F_m, F_n\} = 2L_{m+n} + \frac{1}{2}Dm^2\delta_{m,-n}. \end{cases} \tag{3.10.6}$$

ボソンの場合のように，容易に経路積分から調和振動子の形式へ移れる．ハミルトニアンは調和振動子のフォック空間で対角なので，すべての中間の汎関数積分を除く

ことができるからである．

ウェイトが1のタキオンの頂点関数は，

$$k_\mu \psi^\mu V_0 \tag{3.10.7}$$

と書ける．しかし F_1 と F_2 形式と呼ばれる N 点振幅を書き下す2つの異なる方法，または「描像」がある．N 点関数をつくる規則は次の通りである：

$$F_1 : \begin{cases} 頂点 = V \\ 伝播関数 = \frac{1}{L_0 - 1} \\ タキオン = k_\mu \cdot b_{-1/2}|0;k\rangle; \quad \alpha' k^2 = \frac{1}{2} \\ 真空 = |0;k\rangle; \qquad\qquad \alpha' k^2 = 1. \end{cases} \tag{3.10.8}$$

$$F_2 : \begin{cases} 頂点 = V \\ 伝播関数 = \frac{1}{L_0 - \frac{1}{2}} \\ タキオン = 真空 = |0;k\rangle; \quad \alpha' k^2 = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.10.9}$$

これら2つの形式の長所と欠点は次の通りである．

1. F_1 形式では，明白な巡回対称性をずっと容易に証明できる．しかし理論から完全に分離してしまう真空状態という余分なものがある．

2. F_2 形式では，巡回対称性は明白でないが，ゴーストを除くことは容易にできる．F_2 の描像の長所は小さなフォック空間を扱っている点である．

N 点関数は，

$$A_N = \int d\mu_N \langle 0;0| \frac{V(k_1, y_1)}{y_1} \cdots \frac{V(k_N, y_N)}{y_N} |0;0\rangle \tag{3.10.10}$$

と表せる．

GSO 射影をした NS-R 模型は同数のフェルミオンとボソン状態をもつことが示せるが，理論が実際に時空の超対称性をもつことの証明はとても困難である．そのために，本当の時空のスピノールを含む新しい GS の作用を仮定することにより，時空の超対称性を示すことにする．GS の作用は，

$$\begin{aligned} S = \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma\, d\tau \, \{ & \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \Pi_\alpha \cdot \Pi_\beta + 2i\varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu (\bar\theta^1 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^1 \\ & - \bar\theta^2 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^2) - 2\varepsilon^{\alpha\beta} \bar\theta^1 \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta^1 \bar\theta^2 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^2 \} \end{aligned} \tag{3.10.11}$$

である．ここで，

$$\Pi_\alpha^\mu = \partial_\alpha X^\mu - i\bar\theta^A \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta^A \tag{3.10.12}$$

である．この作用は，

$$\begin{aligned} \delta\theta^A &= \varepsilon^A \\ \delta X^\mu &= i\bar\varepsilon^A \Gamma^\mu \theta^A \end{aligned} \tag{3.10.13}$$

および，

$$\begin{aligned}\delta\theta^A &= 2i\Gamma\cdot\Pi_\alpha\kappa^{A\alpha}\\ \delta X^\mu &= i\bar\theta^A\Gamma^\mu\delta\theta^A\\ \delta(\sqrt{g}g^{\alpha\beta}) &= -16\sqrt{g}(P_-^{\alpha\gamma}\bar\kappa^{1\beta}\partial_\gamma\theta^1 + P_+^{\alpha\gamma}\bar\kappa^{2\beta}\partial_\gamma\theta^2)\end{aligned} \tag{3.10.14}$$

の下で不変である．

このGS定式化の長所は，それがすべてのレベルで時空の超対称性をもつことである．しかしこのために支払わなければならない代償は，自由レベルでさえも結合のある系なので，理論の共変的な量子化がとても難しいことである．そこで光錐ゲージへ行き，理論を線形化する：

$$S = \frac{-1}{4\pi\alpha'}\int d\sigma\, d\tau(\partial_a X^i\partial^a X^i - i\bar{S}\rho^b\partial_b S). \tag{3.10.15}$$

この作用は時空の超対称性をもち，生成子は

$$\begin{aligned}Q^a &= (2p^+)^{1/2}S_0^a\\ Q^{\dot a} &= (p^+)^{1/2}\gamma^i_{a\dot a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}S^a_{-n}\alpha^i_n\end{aligned} \tag{3.10.16}$$

で与えられる．これらの生成子の間の反交換関係は，

$$\begin{cases}\left\{Q^a, Q^b\right\} = 2p^+\delta^{ab}\\ \left\{Q^a, Q^{\dot a}\right\} = \sqrt{2}\gamma^i_{a\dot a}p^i\\ \left\{Q^{\dot a}, Q^{\dot b}\right\} = 2H\delta^{\dot a\dot b}\end{cases} \tag{3.10.17}$$

で与えられる．ここで，

$$H = \frac{1}{p^+}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\alpha^i_{-n}\alpha^i_n + nS^a_{-n}S^a_n\right\} + \frac{p_i^2}{2}\right] \tag{3.10.18}$$

である．次の章では共形場の理論を調べるが，それはNS-RとGS形式の良い点を取り入れているものになっている．

参考文献

[1] J. L. Gervais and B. Sakita, *Nucl. Phys.* **B34**, 632 (1971).

[2] W. Siegel, *Phys. Lett.* **128B**, 397 (1983); *Nucl. Phys.* **B263**, 93 (1985); Class. Quant. Grav. **2**, L95 (1985).

[3] L. Brink and J. H. Schwarz, *Phys. Lett.* **100B**, 310 (1981).

[4] P. Ramond, *Phys. Rev.* **D3**, 2415 (1971).

[5] A. Neveu and J. H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B31**, 86 (1971).

[6] A. Neveu, J. H. Schwarz, and C. B. Thorn, *Nucl. Phys.* **B31**, 529 (1971).

[7] J. Wess and B. Zumino, , *Nucl. Phys.* **B70**, 39 (1974).

[8] 参照せよ： Y. A. Gol'fand and E. P. Likhtman, *JETP Lett.* **13**, 323 (1971); D. V. Volkov and V. P. Akulov, *JETP Lett.* **16**, 621 (1972) (English, p. 438).

[9] M. A. Virasoro, unpublished.
[10] Y. Aharonov, A. Casher, and L. Susskind, *Phys. Rev.* **D5**, 988 (1972).
[11] L. Brink, P. Di Vecchia, and P. Howe, *Phys. Lett.* **65B**, 471 (1976).
[12] S. Deser and B. Zumino, *Phys. Lett.* **65B**, 369 (1976).
[13] 初期の試みは，次を見よ： Y. Iwasaki and K. Kikkawa, *Phys. Rev.* **D8**, 440 (1973).
[14] N. Ohta, *Phys. Rev.* **D33**, 1681 (1986).
[15] M. Ito, T. Morozumi, S. Nojiri, and S. Uehara, *Prog. Theor. Phys.* **75**, 938 (1986).
[16] J. Schwarz, *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **86**, 70 (1986).
[17] F. Gliozzi, J. Scherk, and D. Olive, *Nucl. Phys.* **B122**, 253 (1977).
[18] C. B. Thorn, *Phys. Rev.* **D4**, 1112 (1971).
[19] L. Brink, D. Olive, C. Rebbi, and J. Scherk, *Phys. Lett.* **45B**, 379 (1973).
[20] S. Mandelstam, *Phys. Lett.* **46B**, 447 (1973).
[21] J. H. Schwarz and C. C. Wu, *Phys. Lett.* **47B**, 453 (1973)
[22] D. Bruce, E. Corrigan, and D. Olive, *Nucl. Phys.* **B95**, 427 (1975).
[23] M. Green and J. H. Schwarz, *Phys. Lett.* **136B**, 367 (1984).
[24] M. Green and J. H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B198**, 252, 441 (1982).
[25] T. Hori and K. Kamimura, *Prog. Theor. Pnys.* **73**, 476 (1985).
[26] M. Kaku and J. Lykken, in *Symposium on Anomalies, Geometry, and Topology* (edited by W. A. Bardeen and A. R. White) World Scientinc, Singapore, 1986.
[27] 参照せよ： I. Bengtsson and M. Cederwall, Goteborg preprint 84-21.
[28] T. J. Allen, Cal Tech preprint CALT-68-1373.
[29] T. Hori, K. Kamimura, and M. Tatewaki, *Phys. Lett.* **185B**, 367 (1987).
[30] C. Crnkovic, *Phys. Lett.* **173B**, 429 (1986).
[31] R. E. Kallosh, Pis'ma JETPh **45**, 365 (1987) ; *Phys. Lett.* **195B**, 369 (1987).
[32] I. A. Batalin, R. E. Kallosh, and A. Van Proeyen, KUL-TF 87/17.
[33] N. Marcus and J. H. Schwarz, *Phys. Lett.* **115B**, 111 (1982).

第4章

共形場の理論とKac-Moody代数

4.1　共形場の理論

超弦理論の謎の１つは，理論を２通りに定式化する方法があることである．その１つは反交換するベクトルをもつ(GSO 射影をした) NS-R 模型であり，いま１つは反交換する本当のスピノールをもつ GS 模型である．それぞれの定式化は，それぞれの長所と欠点をもっている．この章では共形場の理論を論ずるが，それによりこの２つの形式の力学的なつながりがわかる．Friedan と Shenker の共形場の理論［1］は，両方の理論のもっとも良い特徴を組み合わせているのである．共形場の理論により，次のことが可能となる．

1. NS-R 模型に完全に自由場に基づいた共変的反交換スピノール場を導入できる．他方 GS 形式は，共変的量子化がとても難しい複雑な相互作用する場に基づいている．

2. 多重フェルミオン散乱の明白に共変な樹木図を構成できる．しかし NS-R 形式では，ゴーストをぬき出す複雑な射影演算子を導入することが必要でとても難しい．共形場の理論では，これらのややこしい射影演算子を Faddeev-Popov ゴーストで置き換えており，容易に扱うことができる．

3. GS と NS-R の定式化の関係を調べることができる．１つの定式化の結果は，もう１つの定式化で解釈することができる：

$$\text{共形場の理論：}\begin{cases}\text{GS 模型}\\ \text{NS-R 模型.}\end{cases}$$

4. 共変的な超対称性の生成子を構成できる．NS-R 形式ではこれは不可能であり，GS 形式では光錐ゲージでのみ可能である．

5. $|0\rangle_{\mathrm{NS}}$ と $|0\rangle_{\mathrm{R}}u_\alpha$ の真空を使った２つの異なるヒルベルト空間をもつ不格好な形式を使わずに，理論の NS と R 部分を同じ真空で記述できる．これは，ボソン化と呼ばれる手続き，すなわち２次元でボソンからフェルミオンを構成することにより可能となる．

しかしながら共形場の理論に対しては，払わなければならないちょっとした代償がある．この形式ではとくに超弦に対してはゴーストと反ゴーストが急速に増え,「描像変換」と呼ばれる奇妙な現象が生じるのである．幸運なことに，これらのゴーストと反ゴーストは自由場なので取り扱いが容易である．さらに共形場の理論は，GS や NS-R の形式のように作用から導出できない場合もある．共形場の理論では，作用から出発するのではなく，場の群論的振る舞いに注目するからである．したがって GS と NS-R の作用を越えて存在する高次の，しかしいまだ発見されていない第1量子化した作用があるのではないかと思われる．

(共形場の理論は，Schwinger, 朝永，ファインマンの形式から出発する第2量子化の意味での場の理論ではないことを強調しておく．弦の第2量子化した場の理論は，この本の第 II 部で論ずる.)

共形場の理論の本質は，共形不変性だけを用いて，異なる場の間の相関関数を計算する点である [2–6]．著しいことに N 点散乱振幅の構造は，共形不変性だけでほとんど完全に決定できる．たとえば，(2.6.9)で次の行列要素をもつ演算子に出会った：

$$\langle \phi(z_1)\phi(z_2)\rangle = f(z_1 - z_2). \tag{4.1.1}$$

ここで関数 f は，べき関数か対数関数である．たとえば2つのボソン的弦の樹木振幅の行列要素は，

$$\langle X(w)X(z)\rangle \sim -\log(w-z)$$

であり，2つの正規順序づけされた頂点の行列要素は

$$\langle e^{ik\cdot X(w)}e^{-ik\cdot X(z)}\rangle \sim (w-z)^{-k^2}$$

である．

以上では行列要素を計算するために，場の具体的表現を用いた．しかしこの手続きを逆にすることもできる．すなわち場の群の性質がすべてわかれば，その行列要素を計算し場を再構成することもできるはずである．

共形場の理論の背後にある本質的なアイデアは，場 ϕ の共形変換の性質を用いて，その行列要素をすべて完全に決定し場を再構成することである．共形場の理論では，右向きまたは左向きの場の短距離の振る舞いを知ることによってこれは達成される：

$$\phi(z_1)\phi(z_2) \sim \frac{1}{(z_1-z_2)^n} + (\text{より特異でない項}). \tag{4.1.2}$$

このように原理的には，すべての行列要素は場そのものの共形変換の性質から計算できるのである．

共形場の理論では，時空のローレンツ変換の下で本当のスピノールとして変換し，共形ウェイト $\frac{5}{8}$ をもつ**スピン場** S_α も構成する．しかし Faddeev-Popov ゴースト部分から来るもう1つ別の場で，共形ウェイトが $\frac{3}{8}$ のものがある．この2つの場(1つはスピン場で，もう1つはゴースト場)の積により，正しいウェイト1をもつ完全なフェルミオンの頂点を構成できる．この頂点は場の指数を含んでいるが，完全に自由場で定義されているので単純なフェルミオンの頂点関数を構成するという問題が解決できる．

このスピン場を実際に導入する方法は,「ボソン化」と呼ばれる手続き [7, 8], すなわちボソンからフェルミオンを作ることによっている．もちろん，2つのフェルミオンから1つのボソンを作ることはやさしい．ところが(2次元では)逆にボソンからフェルミオンを作ることもできるのである．実はどうやって「ボソン化をする」かのヒントは，前の章ですでに与えてある．そこで頂点関数

$$V = :e^{ik\cdot X}: \tag{4.1.3}$$

を導入した．そして，(2.6.22)で

$$V_1V_2 = V_2V_1e^{i\pi k_1\cdot k_2\varepsilon} \tag{4.1.4}$$

であることを見た．したがって，指数の中の運動量をいろいろな値にとることにより，

$$V_1V_2 = (\pm 1)V_2V_1 \tag{4.1.5}$$

という関係をみたす演算子を作ることができる．言い換えると，ボソンの調和振動子からフェルミオンの交換関係をもつ場を作ることができるのである．この構成の鍵は2次元での振動子モードの正規順序づけにある．この性質は4次元の場の理論では成り立たない．(ここで2次元ではなぜフェルミオンとボソンがこのように密接に関連していて，高次元ではそうでないのかを考えよう．それは2次元のローレンツ群 O(1, 1) は1つの生成子しかもたないので，1空間次元での「スピン」と呼ばれる概念が大した意味をもたないためである.)

場の正規順序づけによるこのボソン化の方法は，共形場の理論を構成する鍵でもある．ボソン場の指数の正規順序づけにより，後でフェルミオンのスピン場 S_α を構成する．そしてこれから共変的超対称性の演算子を構成する．この方法の長所は，ボソンとフェルミオン両方に対して，1つの共通な真空を用いて時空のスピノールを論じることができ，全体の構成が自由場に基づいていることである．

超共形変換の場合を論じる前に，共形場の理論を分析しよう．世界面の変数 z に，もっとも一般的な共形変換

$$z \to \tilde{z}(z) \tag{4.1.6}$$

をする．この共形変換の下で，プライマリー(primary)な解析関数が,

$$\phi(z) = \tilde{\phi}(\tilde{z})\left(\frac{d\tilde{z}}{dz}\right)^h \tag{4.1.7}$$

と変換するならば，**共形ウェイト**(conformal weight) h で変換するという．(セカンダリー場は $\phi(z)$ の微分のように変換する.) この共形ウェイトは，頂点の共形変換の性質を議論していたときに(2.7.6)で導入したのと同じ概念である．数学的には，共形ウェイトというのは，Virasoro 代数が生成する共形群の既約表現をラベルづけする添字である．

ここで，共形変換の下で不変な量

$$\phi(z)dz^h = \tilde{\phi}(\tilde{z})d\tilde{z}^h \tag{4.1.8}$$

を構成する．共形変換の下で場がどのように変換するかを決めたが，そのときその 2 つの共形変換の演算で群が閉じることを確かめておかなければならない．共形変換を 2 回続けて行ったとしよう：

$$z \to z_1(z) \to z_2[z_1(z)]. \tag{4.1.9}$$

そうすると，場は

$$U_1\phi(z)U_1^{-1} = \phi(z_1)\left(\frac{dz_1}{dz}\right)^h \tag{4.1.10}$$

$$U_2U_1\phi(z)U_1^{-1}U_2^{-1} = \phi[z_2(z_1(z))]\left(\frac{dz_2}{dz_1}\frac{dz_1}{dz}\right)^h \tag{4.1.11}$$

と変換する．したがって共形変換は群をなし，合成則は，

$$\begin{aligned} U_3 &= U_2U_1 \\ z_3 &= z_2(z_1(z)) \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

であることがわかる．

代数が閉じることをもっとも容易に見るには，無限小の共形変換をしてみればよい．座標の無限小変換

$$\delta z = \varepsilon(z) \tag{4.1.13}$$

を考える．変換(4.1.7)の下で，無限小変換

$$\delta\phi_\varepsilon = [\varepsilon\partial + h(\partial\varepsilon)]\phi \tag{4.1.14}$$

を得る．(∂_z を省略して，∂ と書く．)　この 2 つの変化を交換して，

$$\delta_{[\varepsilon_1,\varepsilon_2]} = [\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}] \tag{4.1.15}$$

を得る．ここで，

$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2] = \varepsilon_1\partial\varepsilon_2 - \varepsilon_2\partial\varepsilon_1 \tag{4.1.16}$$

である．(この関係を(2.1.30)と比較してみよ．)

これで，群が任意のウェイト h で閉じることを再び示した．次に，共形ウェイトの意味をよく理解するために弦の共形ウェイトを計算してみよう．座標の無限小の変換の下で，結合則を用いて弦が

$$\delta X_\mu(z) = \varepsilon\partial X_\mu(z) \tag{4.1.17}$$

と変換することが示せる：したがって，弦の場はウェイト 0 をもつ．同様に，弦の場の微分はウェイト 1 をもつことが容易に示せる：

$$\delta\partial X_\mu(z) = [\varepsilon\partial + (\partial\varepsilon)]\partial X_\mu(z). \tag{4.1.18}$$

ここで，よく出る弦の場のウェイトをまとめておこう：

場	ウェイト
X	0
∂X	1
$\partial X \cdot \partial X$	2

(4.1.19)

とくにこれはエネルギー運動量テンソル，すなわち Virasoro 生成子がウェイト 2 をもつことを意味している．

ウェイトは加法的である．すなわちウェイト h_1 と h_2 の 2 つの場の積は，同じ点でのウェイト h_1+h_2 の場を作る：

$$\phi^{(h_1)}(z)\phi^{(h_2)}(z)=\phi^{(h_1+h_2)}(z). \tag{4.1.20}$$

この本を通して用いる重要な事実として，ウェイト 1 の量の積分は不変量であることに注意する：

$$\begin{aligned}\delta\oint\phi^{(1)}dz&=\oint[\nu\partial\phi+(\partial\nu)\phi]dz\\&=\oint\partial[\nu\phi]dz\\&=0.\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

後で頂点演算子と第 2 量子化した理論の作用を構成するのに，この事実を用いる．

さて，エネルギー運動量テンソルが理論の基本的な場にどのように作用するかを詳しく調べよう．

作用を $X_\mu(z,\bar{z})$ で書くと，

$$S=\frac{1}{2\pi}\int d^2z\bar{\partial}X^\mu\partial X_\mu \tag{4.1.22}$$

となり，この作用に付随した(1.9.17)のエネルギー運動量テンソルは，

$$T_B=-\frac{1}{2}\partial X^\mu\partial X_\mu \tag{4.1.23}$$

となる．

共形変換の下での場の変換は，小さな関数 $\varepsilon(z)$ を入れたエネルギー運動量テンソルの積分

$$T_\varepsilon=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0}dz\,\varepsilon(z)T(z) \tag{4.1.24}$$

で生成される．ここで線積分は，z 空間で原点をとり囲むようにとってある．エネルギー運動量テンソル T が重要なのは，それが今調べている共形変換の生成子だからである．これを見るには，

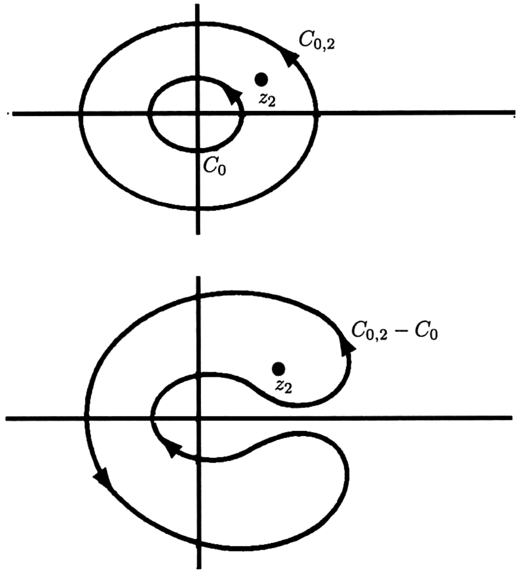


図 4.1：共形場の理論の積分路．1 番目の図では，点 z は 2 つの同心円の間にある．2 番目の図では，内側の積分路の方向を変えて外側の経路と合わせ，閉じた経路を作る．点 z は閉じた経路の中にあるが原点は外にある．

$$
\begin{aligned}
\delta\phi(z_2) &= [T_\varepsilon, \phi(z_2)] \\
&= \left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0} dz\,\varepsilon(z)T(z), \phi(z_2)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{0,2}-C_0} dz\,P\varepsilon(z)T(z)\phi(z_2) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} dz\,P\varepsilon(z)T(z)\phi(z_2) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} dz\,\varepsilon(z)T(z)\phi(z_2)
\end{aligned}
\tag{4.1.25}
$$

と書けばよい．曲線 $C_{0,2}$ は原点と点 z_2 の両方をとり囲んでいるが，曲線 C_2 は，

$$C_2 = C_{0,2} - C_0 \tag{4.1.26}$$

のために，点 z_2 のみを囲むことに注意する（図 4.1 を見よ）．また，複素平面内での演算子の**半径順序づけ**(radial ordering) P を用いたことに注意せよ．これは，演算子を原点からの距離にしたがって並べたものである：

$$
P\varepsilon(z)T(z)\phi(z_2) = \begin{cases} \varepsilon(z)T(z)\phi(z_2), & |z| > |z_2| \\ \phi(z_2)\varepsilon(z)T(z), & |z_2| > |z|. \end{cases} \tag{4.1.27}
$$

最後のステップでは，半径順序づけした積は解析的なので，半径順序づけを落とした．

前にやったことから，

$$\delta\phi = [\varepsilon\partial + h(\partial\varepsilon)]\phi \tag{4.1.28}$$

ということもわかっている．こうして $\delta\phi$ に対する 2 つの表式(4.1.25)と(4.1.28)を比較して，場 ϕ の短距離での振る舞い

$$T(z)\phi(w,\bar{w}) \sim \frac{h}{(z-w)^2}\phi(w,\bar{w}) + \frac{1}{z-w}\partial_w\phi + \cdots \tag{4.1.29}$$

を読みとることができる．

エネルギー運動量テンソル自身はウェイト 2 をもつので，それを短距離の式に入れることもできる．こうして，生成子自身の短距離の振る舞い

$$T(z)T(w) \sim \frac{1}{2}\frac{c}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{(z-w)}\partial_w T(w) + \cdots \tag{4.1.30}$$

を得る．この式の右辺の第 2 項は，生成子自身がウェイト 2 の共形場として変換することを示している．

さて，基準モードを導入して，振動子の形式と関係をつけよう．ウェイト h の任意の場 ϕ は，いつでも次のように分解することができる：

$$\phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-h}\phi_n. \tag{4.1.31}$$

これにより，エネルギー運動量を基準モードに分解できる．

$$\begin{aligned} L_n &= \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z) \\ T(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-2} L_n. \end{aligned} \tag{4.1.32}$$

と書く．これらの抽象的な表現から，Virasoro 代数を実際に導いて，交換子と演算子積が同等であることを見ておくのは有益である．(4.1.30)と(4.1.32)を用いて，

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{m+1} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} \left[\frac{\frac{1}{2}c}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w T\right] \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{m+1} \left\{(n+1)w^n 2T(w) + w^{n+1}\partial_w T + \frac{\frac{1}{2}c}{3!} w^{n-2}(n+1)n(n-1)\right\} \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i} \left\{(2n+2)w^{n+m+1}T(w) - (m+n+2)w^{n+m+1}T(w) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{c}{12} n(n+1)(n-1) w^{m+n-1}\right\} \end{aligned}$$

これを計算すれば，ふつうの Virasoro 代数

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n,-m} \tag{4.1.33}$$

に帰着する．L_n の表現を線積分に入れて，

$$[L_n, \phi(z)] = \left\{z^{n+1}\partial + h(n+1)z^n\right\}\phi(z) \tag{4.1.34}$$

も得られる．(これは，(4.1.31)からも得られる.)

こうしてこの記述法が，前の章で調べた交換子によるふつうのやり方と同等であることがわかった．実際前の式は，頂点関数の共形ウェイトを計算するのに用いた(2.7.6)式にほかならない．

ふつうの交換子をこういう風に表すことができるだけでなく，この同等な言葉で共形ゲージでの Faddeev-Popov のゴーストの寄与も表すことができる．Faddeev-Popov のゴーストは，弦の変数 X ではなくて b と c のゴースト場に基づいた Virasoro 代数の別の表現を与える．(2.4.1)を書き換えて，

$$
\begin{aligned}
\delta g_{zz} &= \nabla_z \delta\varepsilon_z \\
\delta g_{\bar{z}\bar{z}} &= \nabla_{\bar{z}} \delta\varepsilon_{\bar{z}}
\end{aligned}
\tag{4.1.35}
$$

を得る．さらにこれらの変換を使えば，汎関数の測度を計算することができる．変換のヤコビアンは簡単に計算できて，

$$
Dg_{zz}Dg_{\bar{z}\bar{z}} = (\det\nabla_z)(\det\nabla_{\bar{z}})D\varepsilon_z D\varepsilon_{\bar{z}} \tag{4.1.36}
$$

が得られる．行列式を指数化して作用に入れるために，2 つのゴースト場 b と c を導入しよう．するとゴーストの作用(2.4.4)は，

$$
S_{\text{gh}} = \frac{1}{\pi}\int d^2z(b_{zz}\partial_{\bar{z}}c^z + \bar{b}_{\bar{z}\bar{z}}\partial_z\bar{c}^{\bar{z}}) \tag{4.1.37}
$$

と書ける．(共形群の下での場のテンソル的性格が明白になるように，ゴーストの作用を書いたことに注意せよ．こうすると，共形変換の下での作用の不変性が明白になる．このように場 b_{zz} は 2 階のテンソルであり，c^z は 1 階のテンソルである.)

この作用に対して，それに付随したエネルギー運動量テンソルを構成できる：

$$
T_{\text{gh}} = c\partial_z b + 2(\partial_z c)b. \tag{4.1.38}
$$

これらのゴースト場は，次の行列要素をもつ：

$$
\langle b_{zz}(z)c^z(w)\rangle = \frac{1}{z-w}.
$$

今，これらの場の短距離の振る舞いを注意深く計算すれば，

$$
T_{\text{gh}}(z)T_{\text{gh}}(w) = \frac{-13}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T_{\text{gh}}(z) + \frac{1}{z-w}\partial T_{\text{gh}}(z) + \cdots \tag{4.1.39}
$$

を得る．ゴーストのエネルギー運動量テンソルに対して，アノーマリーが因子 -13 になっていることに注意しよう．これら 2 つのエネルギー運動量テンソル(4.1.23)と(4.1.38)の和をとれば，その組み合わせたテンソルは 26 次元でアノーマリーをもたないことがわかる：

$$
\begin{aligned}
T(z) &= T_B(z) + T_{\text{gh}}(z) \\
T(z)T(w) &\sim \frac{1}{2}\frac{D-26}{(z-w)^4} + \cdots .
\end{aligned}
\tag{4.1.40}
$$

2 つのエネルギー運動量テンソルの和は，26 次元でのみ中心項が 0 であることに注意しよう．**これが実は，時空の次元を 26 に決めるのである．**まとめると，弦の場 X に

よるエネルギー運動量テンソルのボソン的表現は，アノーマリーの項に D を出し，T のゴーストによる表現は -26 を出す．これら 2 つのテンソルの和が本当のエネルギー運動量テンソルであり，$D=26$ の場合のみ中心項が消える．

リー群があるときの第 1 の問題はいつでも，その表現は何かということである．そこで Virasoro 代数の表現について少し述べよう．

たとえば SU(2) や SU(3) に対しては，表現はよく知られた「はしご演算子(ladder operator)」を用いて作られ，3 重項，8 重項や高次の表現が構成できる．一般のリー代数に対しては,「上昇演算子」のすべての可能な積を「最高ウェイト(highest weight)」の真空に作用させて表現を構成することができる．上昇演算子によって作られたこのような状態すべての集合を「包絡環(universal enveloping algebra)」と呼ぶ．Virasoro 代数についても，L_{-n} をはしごすなわち上昇演算子として扱って，同じ手続きを用いることができる．

最高ウェイトベクトル $|h\rangle$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} L_0|h\rangle &= h|h\rangle \\ L_n|h\rangle &= 0\,; \quad n>0. \end{aligned} \tag{4.1.41}$$

$h=1$ の任意の物理的状態 $|R\rangle$ は $(L_0-1)|R\rangle=0$ をみたすので，最高ウェイトベクトルであることに注意せよ．基底状態 $|0;k\rangle$ も最高ウェイトベクトルであるが，$|0\,;0\rangle$ はそうではないことにも注意する．

さて，最高ウェイトベクトルにすべての「上昇」演算子 L_{-n} が作用してできた状態の集合を定義する：

$$|\omega\rangle = L_{-n_1}^{\lambda_1} L_{-n_2}^{\lambda_2} \cdots L_{-n_N}^{\lambda_N} |h\rangle. \tag{4.1.42}$$

このような状態すべての集合は，**Verma モジュール**(module)と呼ばれる．$|h\rangle$ を物理的状態とすると，それの Verma モジュールはこの実状態から生成できるすべての偽状態の集合となっている．

任意の共形変換の下で，この状態は単に Verma モジュールの他のメンバーに変換することに注意する：

$$\Omega|\omega\rangle = |\omega'\rangle. \tag{4.1.43}$$

ここで，

$$\Omega = e^{\Sigma_n c_n L_{-n}} \tag{4.1.44}$$

である．これは，Virasoro 生成子が Verma モジュールの要素に作用しても，単に同じ Verma モジュールの中の別の状態を作るだけだからである．したがって Verma モジュールは，群の表現を作っていることになる．

最高ウェイトベクトルに加えて，前に導入した SL$(2,\mathbb{R})$ 不変な真空も定義しよう：

$$\begin{aligned} L_{\pm1}|0\,;0\rangle &= 0 \\ L_0|0\,;0\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{4.1.45}$$

これら異なる 2 種類の真空の間の関係は，

$$|h\rangle = \phi(0)|0\,;0\rangle \tag{4.1.46}$$

である．ここで $\phi(0)$ は，ウェイト h のプライマリー場である．式の両辺に Virasoro 生成子をかければ，これを確かめるのは容易である．

4.2　超共形場の理論

さて今度は，超共形場の理論を書くというもっと複雑な問題を論じよう．場の変換則を複素変数で書き下すのではなく，一対の変数

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(z, \theta) \tag{4.2.1}$$

によるもっとも任意の変換則を書き下す．ここで θ はグラスマン変数である．この対のもっとも任意の変換則は，

$$\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z}) = (\tilde{z}(z,\theta), \tilde{\theta}(z,\theta)) \tag{4.2.2}$$

で与えられる．しかし残念ながら，この変換はあまりにも一般的すぎる．実際これは 2 回変換を行うと，正しく閉じない．この変換の群が正しく閉じるようにするためには，系にある条件を課す必要がある．

超対称な微分を

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial\theta} + \theta\frac{\partial}{\partial z} \tag{4.2.3}$$

で定義すると，

$$D^2 = \frac{\partial}{\partial z} \tag{4.2.4}$$

となる．ここでこの超対称な微分がパラメーターのつけかえの下で，どのように変換するか計算してみよう：

$$D = (D\tilde{\theta})\tilde{D} + [D\tilde{z} - \tilde{\theta}D\tilde{\theta}]\tilde{D}^2. \tag{4.2.5}$$

この合成則も非常に非線形で，満足のいくものではない．共形変換の場合のように，微分の変換則は線形であることが望ましい．そこで条件

$$\begin{aligned} D &= (D\tilde{\theta})\tilde{D} \\ D\tilde{z} - \tilde{\theta}D\tilde{\theta} &= 0 \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

を課すことにより，非線形の項を落とすことにする．座標づけの変換を線形にするこれらの条件が，まさにわれわれの望んでいた条件である．これらを課すことにより，2 つの異なる超共形変換が正しく閉じることを示すことができるのである：

$$\boldsymbol{z} \to \tilde{\boldsymbol{z}} \to \hat{\boldsymbol{z}}. \tag{4.2.7}$$

まとめると，場の変換が

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{\boldsymbol{z}}}{d\boldsymbol{z}} &= D\tilde{\theta} \\ \phi(\boldsymbol{z}) &= \tilde{\phi}(\tilde{\boldsymbol{z}})(D\tilde{\theta})^{2h} \end{cases} \tag{4.2.8}$$

をみたすとき，それを超共形変換という．θ 成分を除くとこの表式は前に(4.1.7)に書いた共形方程式に帰着することを，容易に確かめることができる．

前節でやったように，これを場の無限小変化として書き下すことができる：

$$\delta_\varepsilon \phi = [\varepsilon\partial + \frac{1}{2}(D\varepsilon)D + h(\partial\varepsilon)]\phi. \tag{4.2.9}$$

ここで ε は，超共形変換のパラメーターである．2 つの D を含む項を除いてはこの表式は，ボソン的変換則(4.1.28)と完全に同じであることに注意する．代数が閉じることは，

$$\delta_{[\varepsilon_1,\varepsilon_2]} = [\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}] \tag{4.2.10}$$

と書ける．ここで，

$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2] = \varepsilon_1\partial\varepsilon_2 - \varepsilon_2\partial\varepsilon_1 + \frac{1}{2}(D\varepsilon_1)(D\varepsilon_2) \tag{4.2.11}$$

この式で $D\varepsilon_1$ と $D\varepsilon_2$ を 0 にすると，ふつうの Virasoro の場合(4.1.16)に帰着することに注意せよ．

このグラスマン数を含むパラメーターづけは，2 つのパラメーター $\partial z = \varepsilon_a$ と $\partial\theta = \varepsilon_b$ によって書けることがわかる：

$$\begin{aligned} \varepsilon(\boldsymbol{z}) &= \delta z + \theta\delta\theta = \varepsilon_a + \theta\varepsilon_b \\ \delta z &= \varepsilon + \theta\delta\theta = \varepsilon_a + \frac{1}{2}\theta\varepsilon_b \\ \delta\theta &= \frac{1}{2}D\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_b + \theta\partial\varepsilon_a). \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

上の式は(4.2.6)の特別な解であるから，場に続けて変換を行っても群が正しく閉じることがわかっている．そこでこの解を，超共形カレントを構成し，さらに超共形代数そのものを作るときの基礎とすることにする．

以上では特別な模型によらない超共形群に関しての非常に一般的なことしか述べなかった．今度は共形場を用いて，NS-R 模型を書き換えてみよう．作用は

$$S = \frac{1}{2\pi}\int d^2z\, d\theta\, d\bar\theta\, \bar D X^\mu\, D X_\mu \tag{4.2.13}$$

である．運動方程式は，

$$\bar D\, D X_\mu = 0 \tag{4.2.14}$$

であり，その解は，

$$X^\mu(z,\theta,\bar z,\bar\theta) = X^\mu(z,\theta) + X_\mu(\bar z,\bar\theta) \tag{4.2.15}$$

である．そこで，

$$X^\mu(z,\theta) = X^\mu(z) + \theta\psi^\mu(z) \tag{4.2.16}$$

と選ぶと，作用は，

$$S = \frac{1}{2\pi}\int d^2z(\bar\partial X^\mu\partial X_\mu - \psi\bar\partial\psi - \bar\psi\partial\bar\psi) \tag{4.2.17}$$

と書ける．これはもとの NS-R の作用(3.2.1)を，共形場の言葉で書いたものにほかならない．この作用から超エネルギー運動量テンソルを読みとることができる．少し異なる規格化をとると，

$$T = T_F + \theta T_B = -\frac{1}{2} D X^\mu \partial X_\mu \tag{4.2.18}$$

となる．具体的に書けば，これは

$$\begin{aligned} T_F &= -\frac{1}{2}\psi^\mu \partial X^\mu \\ T_B &= -\frac{1}{2}\partial X^\mu \partial X_\mu - \frac{1}{2}\partial\psi^\mu \psi_\mu \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

である．これは，共形変換の言葉で書いたカレント(3.2.7)と(3.2.13)にほかならない．超カレント J_a が，今はエネルギー運動量テンソル T_{ab} と同じ超場の一部として書かれていることに注意せよ．このことは，それらがお互いに超対称性の相棒になっていることを意味している．

(4.1.25)と同様に，超場の変分は

$$\delta\phi(\boldsymbol{z}_2) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2} d\boldsymbol{z}_1\, \varepsilon(\boldsymbol{z}_1) T(\boldsymbol{z}_1)\phi(\boldsymbol{z}_2) \tag{4.2.20}$$

で与えられる．場 ϕ がウェイト h をもちエネルギー運動量テンソルがウェイト $\frac{3}{2}$ をもてば，ϕ と T は超共形変換の下で，

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{z}_1)\phi(\boldsymbol{z}_2) &\sim h\frac{\theta_{12}}{z_{12}^2}\phi(\boldsymbol{z}_2) + \frac{\frac{1}{2}}{z_{12}}D_2\phi + \frac{\theta_{12}}{z_{12}}\partial_2\phi + \cdots \\ T(\boldsymbol{z}_1)T(\boldsymbol{z}_2) &\sim \frac{\hat{c}}{4}\frac{1}{z_{12}^3} + \frac{3}{2}\frac{\theta_{12}}{z_{12}^2}T(\boldsymbol{z}_2) + \frac{1}{2}\frac{1}{z_{12}}D_2T(\boldsymbol{z}_2) + \frac{\theta_{12}}{z_{12}}\partial_2T(\boldsymbol{z}_2) + \cdots \end{aligned} \tag{4.2.21}$$

と変換する．ここで，

$$\begin{aligned} \theta_{12} &= \theta_1 - \theta_2 \\ z_{12} &= z_1 - z_2 - \theta_1\theta_2 \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

である．

実は，これらの関係式は多数の式をコンパクトに書いているものにすぎない．これを見るために，前の表式を展開してみよう．(4.2.18)を(4.2.21)に代入すると，

$$\begin{aligned} T_B(z_1)T_B(z_2) &\sim \frac{3\hat{c}/4}{(z_1-z_2)^4} + \frac{2}{(z_1-z_2)^2}T_B(z_2) + \frac{1}{z_1-z_2}\partial_2 T_B + \cdots \\ T_B(z_1)T_F(z_2) &\sim \frac{\frac{3}{2}}{(z_1-z_2)^2}T_F(z_2) + \frac{1}{z_1-z_2}\partial_2 T_F + \cdots \\ T_F(z_1)T_F(z_2) &\sim \frac{\hat{c}/4}{(z_1-z_2)^3} + \frac{\frac{1}{2}}{z_1-z_2}T_B(z_2) + \cdots \end{aligned} \tag{4.2.23}$$

を得る．これらの関係を展開すると，(3.2.26)と(3.2.28)に具体的に書いた超共形代数を与える．このようにこれらの式は，非常に多くの情報を含んでいるのである．

(4.2.21)の場の変換は，$\phi = \phi_0 + \theta\phi_1$ として詳しく書き出すことができる：

$$
\begin{aligned}
T_B(z_1)\phi_0(z_2) &\sim \frac{h}{(z_1-z_2)^2}\phi_0(z_2) + \frac{1}{z_1-z_2}\partial_2\phi_0 + \cdots \\
T_B(z_1)\phi_1(z_2) &\sim \frac{h+\frac{1}{2}}{(z_1-z_2)^2}\phi_1(z_2) + \frac{1}{z_1-z_2}\partial_2\phi_1 + \cdots \\
T_F(z_1)\phi_0(z_2) &\sim \frac{\frac{1}{2}}{z_1-z_2}\phi_1(z_2) + \cdots \\
T_F(z_1)\phi_1(z_2) &\sim \frac{h}{(z_1-z_2)^2}\phi_0(z_2) + \frac{\frac{1}{2}}{z_1-z_2}\partial_2\phi_0.
\end{aligned}
\tag{4.2.24}
$$

ここで，べき展開

$$
\begin{aligned}
T_F(z) &= \frac{1}{2}\sum_n z^{-n-3/2}G_n \\
T_B(z) &= \sum_n z^{-n-2}L_n \\
\phi_0(z) &= \sum_n z^{-n-h}\phi_{0,n} \\
\phi_1(z) &= \sum_n z^{-n-h-1/2}\phi_{1,n}
\end{aligned}
\tag{4.2.25}
$$

を行うと，$\phi(z,\theta)$ の超共形変換の下での変換則が得られる：

$$
\begin{aligned}
[L_m, \phi_0(z)] &= z^{m+1}\partial\phi_0 + h(m+1)z^m\phi_0(z) \\
[L_m, \phi_1(z)] &= z^{m+1}\partial\phi_1 + \left(h+\frac{1}{2}\right)(m+1)z^m\phi_1(z) \\
[\varepsilon G_m, \phi_0(z)] &= \varepsilon z^{m+1/2}\phi_1(z) \\
[\varepsilon G_m, \phi_1(z)] &= \varepsilon\left[z^{m+1/2}\partial\phi_0 + 2\left(m+\frac{1}{2}\right)hz^{m-1/2}\phi_0(z)\right]
\end{aligned}
\tag{4.2.26}
$$

$$
\begin{aligned}
[L_m, \phi_{0,n}] &= [(h-1)m-n]\phi_{0,m+n} \\
[L_m, \phi_{1,n}] &= \left[\left(h-\frac{1}{2}\right)m-n\right]\phi_{1,m+n} \\
[\varepsilon G_m, \phi_{0,n}] &= \varepsilon\phi_{1,m+n} \\
[\varepsilon G_m, \phi_{1,n}] &= \varepsilon\left[(2h-1)m-n\right]\phi_{0,m+n}.
\end{aligned}
\tag{4.2.27}
$$

したがって(4.2.21)の関係は，超共形変換に関する全部の情報を含んでいるのである．

さてアノーマリーへの寄与を計算しよう．(4.1.29)と(4.2.23)を比べると，ボソン X_μ はアノーマリーに D だけ寄与するが，フェルミオン ψ_μ は $\frac{1}{2}D$ だけしか寄与しないことがわかる．また，b, c ゴーストと β, γ ゴーストはアノーマリーに -26 と $+11$ だけ寄与することも示せる．この章の後の方で，実は共形ウェイト λ のゴーストのアノーマリーへの寄与は

$$
c = -2\varepsilon[6\lambda(\lambda-1)+1] \tag{4.2.28}
$$

であることを示す．ここで ε は，フェルミ(ボーズ)統計に対し $+1(-1)$ である．これをまとめておくと，

場	アノーマリー
X_μ	D
ψ_μ	$\frac{1}{2}D$
b, c	-26
β, γ	11

(4.2.29)

となる．全部加えれば，全体のアノーマリーは，

$$D + \frac{1}{2}D - 26 + 11 = \frac{3}{2}(D - 10) \tag{4.2.30}$$

となる．したがって，この項を消すには $D = 10$ であることが必要である．

4.3 スピン場

今までは新しいことはほとんど何もない．前の章の調和振動子の形式を用いて得られる結果を，再導出したにすぎない．NS-R の代数の生成子をフーリエ成分で展開しないで，共形ウェイトと交換子の z 平面での特異性の構造を強調する形に書き換えたのである．しかし新しい点として，ローレンツ群の下で本当のスピノールとして変換する新しい場 S_α を以下で導入することにしよう．このボソン化という手続きにより，NS-R 模型を1つの真空を用いて書き換えることができる．

まず，NS-R 模型に入っている反交換するベクトル場 ψ により，10次元のローレンツ群 SO(10) の生成子 $j^{\mu\nu}$ を書き下そう：

$$j^{\mu\nu}(z) = \psi^\mu \psi^\nu(z). \tag{4.3.1}$$

これらがふつうのローレンツ代数で，z 平面で定義された場で表されたものの交換関係をみたすことを要求する．(3.2.33)に与えた ψ 場の反交換関係からただちに，

$$\begin{aligned} j^{\mu\nu}(z) j^{\sigma\tau} \sim & \frac{1}{z-w}\{(\eta^{\mu\sigma} j^{\nu\tau}(w) - \mu \leftrightarrow \nu) - (\sigma \leftrightarrow \tau)\} \\ & + \frac{1}{(z-w)^2}(\eta^{\mu\tau}\eta^{\nu\sigma} - \mu \leftrightarrow \nu) + \cdots \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

を示すことができる．この代数の生成子は z の関数であり，したがって SO(10) より大きな代数を作ることに注意せよ．実はこの代数は **Kac-Moody** と呼ばれるもので，この本でそういう代数を広範に用いることになるであろう．

ローレンツ対称性の背後にひそむ群を調べると，この群の表現がテンソルとスピノールに分類されることがわかる．そしてこれらの場の変換性は，群論だけで一意的に決まるのである．同様に，SO(10) の Kac-Moody 代数のテンソルとスピノール表現を定義すると，それらの変換性は群論だけで一意的に決まる．これらの変換性は非常に強力なので，それから行列要素を決定できることがわかる．

とくにベクトルは，定義により SO(10) Kac-Moody 代数の下で次のように変換する：

$$j^{\mu\nu}(z)\psi^{\sigma}(w) \sim \frac{1}{z-w}(\eta^{\mu\sigma}\psi^{\nu} - \eta^{\nu\sigma}\psi^{\mu})(w) + \cdots . \tag{4.3.3}$$

スピン場はSO(10)の下でスピノールとして変換するので，定義により次の変換性をみたさねばならない：

$$j^{\mu\nu}(z)S_{\alpha}(w) \sim \frac{1}{4}\frac{1}{z-w}\left(\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}\right)_{\alpha}^{\beta} S_{\beta}(w) + \cdots . \tag{4.3.4}$$

共形場の理論のすばらしいところは，SO(10)の下でベクトルとスピノールがどのように変換するかを示すこの2つの恒等式が，理論の相関関数をほとんどすべて決定してしまうということにある．

一方エネルギー運動量テンソルは，ローレンツ生成子の二乗を正規順序づけしたものとして書ける：

$$T_B^{\psi} = -\frac{1}{4(D-1)} j^{\mu\nu} j_{\mu\nu}(z). \tag{4.3.5}$$

T_B^{ψ} の交換子を実際に計算すれば，それがVirasoro生成子であることが証明できる．

この章の後でスピン場 S_{α} の具体的な表示を与えるときに，それが残念ながら共形ウェイト $\frac{5}{8}$ をもつことを証明する．このことは次の理由により，直観的に理解できる．前に(4.1.46)でVermaモジュールの最高ウェイトベクトル $|h\rangle$ が,

$$|h\rangle = \phi(0)|0\,;0\rangle \tag{4.3.6}$$

のように書けることを見た．ここで ϕ はウェイト h の場で，$|0\,;0\rangle$ は $SL(2,\mathbb{R})$ 真空である．超共形変換の場合，実は2つの最高ウェイト真空ベクトル

$$\begin{aligned} &|h\rangle = S(0)|0\,;0\rangle \\ &G_0|h\rangle \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

がある．2次元超対称性を保つためには，第2の最高ウェイト真空ベクトルを消去するのが望ましい．超弦では，理論の中の最低のレベルに1つだけしかスピノールがないからである．2番目の状態を消すには，恒等式

$$G_0^2 = L_0 - \frac{\hat{c}}{16} \tag{4.3.8}$$

を用いる．(R代数の中の c 数のアノーマリーに対し，(3.2.28)と少し違う形を用いている．この取り方も，Jacobi恒等式をみたす.) ここで状態 $G_0|h\rangle$ に G_0 をかければ状態が消えることを要求する．その条件から,

$$G_0 G_0|h\rangle = \left(h - \frac{\hat{c}}{16}\right)|h\rangle = 0 \tag{4.3.9}$$

を得る．これをみたすには，期待していたようにスピン場のウェイト h は $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$ でなければならないことになる．

任意の共形場の行列要素を計算する鍵は，その超共形群や他の場との積の短距離の振る舞いを計算することである．そこで今度は，スピン場の短距離の振る舞いを計算してみよう．そして不変性の議論だけを使って，その短距離の構造と行列要素を決定

する．

まず第1に，前の恒等式(4.3.4)により，2つの S の演算子積は少なくとも1つの ψ 場を含まなければならないことがわかる：

$$S_\alpha(z)S^\beta(w) = \frac{1}{(z-w)^{1/4}}(\gamma^{\mu\nu})^\beta_\alpha\psi_\mu(z)\psi_\nu(w) + \text{他の項}. \tag{4.3.10}$$

ψ と S の演算子積を計算するために，3点関数

$$\langle 0|_{\rm NS}S_\alpha(z_1)\psi^\mu(z_2)S_\beta(z_3)|0\rangle_{\rm NS} \tag{4.3.11}$$

を考える．ここで真空は NS の真空である．$z_1 \to \infty$ と $z_3 \to 0$ の極限で，スピン場は NS の真空を，スピノール量子数をもつ真空，すなわち R 真空 $|0\rangle_{\rm R}$ に変える：

$$S_\alpha(0)|0\rangle_{\rm NS} = |0\rangle_{\rm R}u_\alpha; \quad \langle 0|_{\rm NS}S_\alpha(\infty) = u_\alpha\langle 0|_{\rm R}. \tag{4.3.12}$$

(スピン演算子により，NS 真空から R 真空に行けることに注意．これは前の NS-R 理論では不可能であった.)　このことは，(4.3.11)が

$$u_\alpha\langle 0|_{\rm R}\psi^\mu(z_2)|0\rangle_{\rm R}u_\beta \tag{4.3.13}$$

と書けることを意味している．この真空期待値では，ψ 場のゼロモードだけが残るので，ディラック行列の行列要素が得られる：

$$\psi^\mu(z)S_\alpha(w) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(z-w)^{1/2}}(\gamma^\mu)^\beta_\alpha S_\beta(z) + \cdots. \tag{4.3.14}$$

さらにこれは，2つの S の演算子積の中に ψ があることを意味している：

$$S_\alpha(z)S^\beta(w) \sim \frac{1}{\sqrt{2}(z-w)^{3/4}}(\gamma_\mu)^\beta_\alpha\psi^\mu(z) + \cdots. \tag{4.3.15}$$

最後に，2つのスピン場の間の短距離の振る舞いを知る必要がある．スピン場の共形ウェイトは $\frac{5}{8}$ であることをすでに見た．したがって，

$$S_\alpha(z)S^\beta(w) \sim -\delta^\beta_\alpha(z-w)^{-5/4} + \cdots \tag{4.3.16}$$

となる．

最終的に，(4.3.10), (4.3.14), (4.3.16)を合わせて，2つのスピン場の短距離の振る舞いが得られる．以上をまとめると，不変性の議論によりスピン場の短距離の振る舞いが決まり，

$$\begin{aligned} S_\alpha(z)S^\beta(w) \sim &\frac{-1}{(z-w)^{5/4}}\delta^\beta_\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}(z-w)^{3/4}}(\gamma_\mu)^\beta_\alpha\psi^\mu(z) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}(z-w)^{1/4}}(\gamma^{\mu\nu})^\beta_\alpha\psi_\mu(z)\psi_\nu(z) + \cdots \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

と表される．

スピン場は次元 $\frac{5}{8}$ をもつことを見た．しかしわれわれの欲しいものは，多重フェルミオン振幅に使える次元1のフェルミオン頂点である．足りない因子 $\frac{3}{8}$ を見つけるために，今度は理論のゴースト部分を見てみよう．このゴースト部分が最後の足りない部分を与えてくれることになるのである．

4.4 超共形ゴースト

共形変換の言葉を用いて，超共形ゲージ固定から生じる Faddeev-Popov 行列式を書き換えよう．(3.4.5)を用いれば，

$$\begin{aligned} \delta g_{zz} &= \nabla_z \delta\xi_z \\ \delta\chi_z &= \nabla_z \delta\varepsilon \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

とその複素共役が得られる．したがって，Faddeev-Popov 行列式は

$$\det{}_g(\nabla_z)\det{}_\chi(\nabla_z) \tag{4.4.2}$$

とその複素共役となる．最初はこれは，南部-後藤の弦に対して(2.4.3)で求めた行列式，すなわち ∂_z と $\partial_{\bar{z}}$ の行列式に大変よく似ているように思える．ところがいくつかの重要な差がある．ここではこれらの演算子の作用するヒルベルト空間が変わっている．この行列式を基底の状態で展開すれば，共形ウェイトが変わっており，共形群の下でのテンソル変換性が変わっており，場の統計が逆になっていることがわかる．

これらの行列式を指数化して作用に入れると((1.6.16)を見よ)，ゴーストの作用

$$S_{\text{gh}} = \frac{1}{\pi}\int d^2z\, d\theta\, d\bar{\theta}\, B\bar{D}C + \text{c.c.} \tag{4.4.3}$$

が得られる．ここで，

$$\begin{cases} B(z) = \beta(z) + \theta b(z) \\ C(z) = c(z) + \theta\gamma(z) \end{cases} \tag{4.4.4}$$

であり，β と γ は交換する演算子である．θ についての積分を実行すると，

$$S_{\text{gh}} = \frac{1}{\pi}\int d^2z(b\bar{\partial}c + \beta\bar{\partial}\gamma) + \text{c.c.} \tag{4.4.5}$$

$$\begin{aligned} \bar{D}B &= 0 \\ \bar{D}C &= 0 \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

を得る．ここで (b, c) は計量をゲージ固定して出るゴースト場であり，(β, γ) は(NS または R 部分のどちらの場合でも) χ_α 場を固定して出るゴースト場である．超共形ゴースト(その間に交換関係がある)は，NS-R 模型を量子化するとき(3.5.14)で初めて出てきたものである．ここではとくにそれらの場の共形変換の性質，すなわちそのウェイトを強調しておく．

これらの場のウェイトをまとめれば

場	ウェイト	統計
b	2	フェルミ
c	-1	フェルミ
β	$3/2$	ボーズ
γ	$-1/2$	ボーズ

(4.4.7)

となる．作用(4.4.5)が与えられているのでエネルギー運動量テンソルが求まり，それは2つの部分

$$\begin{cases} T_X = -\frac{1}{2}DX^\mu\partial X_\mu = T_F + \theta T_B \\ T_{\rm gh} = -C\partial B + \frac{1}{2}DC\,DB - \frac{3}{2}\partial CB \end{cases} \tag{4.4.8}$$

の和で与えられる．具体的に書くと，

$$\begin{aligned} T_F^{\rm gh} &= -c\partial\beta - \frac{3}{2}\partial c\beta + \frac{1}{2}\gamma b \\ T_B^{\rm gh} &= c\partial b + 2\partial cb - \frac{1}{2}\gamma\partial\beta - \frac{3}{2}\partial\gamma\beta \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

となる．

b と c と β と γ をいつでも別々に書かねばならないことは，とくにこのボソン的およびフェルミオン的場の方程式がこれほど似ている場合には不便である．そこで，任意のウェイトをもつすべてのゴーストを一度に記述できる方法を用いることにする．一般的なゴーストの作用を，交換あるいは反交換するゴーストのいずれをも太文字の場で表して，

$$S = \frac{1}{\pi}\int d^2z\,\boldsymbol{b}\bar\partial\boldsymbol{c} + \text{c.c.} \tag{4.4.10}$$

$$\bar\partial\boldsymbol{b} = \bar\partial\boldsymbol{c} = 0 \tag{4.4.11}$$

と書こう．ここで場 $\boldsymbol{b}$ は任意のウェイト λ をもち，場 $\boldsymbol{c}$ はウェイト $1-\lambda$ をもつと定義した．反交換する b,c ゴースト系は $\lambda=2$ をもち，交換する β,γ ゴースト系はウェイト $\lambda=\frac{3}{2}$ をもつことを記憶しておこう．この作用は(4.4.5)をコンパクトに表しているが，ここではすべての可能な共形ウェイトにも拡張されているのである．

この一般的作用から出発して，容易にエネルギー運動量テンソル

$$T^{bc}(z) = -\lambda\boldsymbol{b}\partial\boldsymbol{c} + (1-\lambda)\partial\boldsymbol{b}\boldsymbol{c} \tag{4.4.12}$$

を書き下すことができる．次に，分解

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}(z) &= \sum_{n\in\delta-\lambda+\mathbb{Z}} z^{-n-\lambda}\boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{c}(z) &= \sum_{n\in\delta+\lambda+\mathbb{Z}} z^{-n-1+\lambda}\boldsymbol{c}_n \end{aligned} \tag{4.4.13}$$

を行う．ここで δ は，NS 部分に対しては 0，R 部分に対しては $\frac{1}{2}$ である．この表示を用いると，Virasoro 生成子は，

$$L_n^{\boldsymbol{bc}} = \sum_k (k-(1-\lambda)n)\boldsymbol{b}_{n-k}\boldsymbol{c}_k \tag{4.4.14}$$

となる．任意の λ に対し，これらがふつうの交換関係を出すことを確かめることができる．

さらにエネルギー運動量テンソル以外に2つのカレント，BRST カレントとゴース

ト数カレントを構成することができる．

(1.9.12)に従ってBRSTカレントは，もとのゲージ作用とFaddeev-Popovゴーストの系がべき零の(さらに場を消すのにはつかえない)余分の大域的対称性をもっていることから出る．どんな対称性もそれに関係したカレントをもっているので，BRSTカレントは作用から直接求まり，

$$J_{\mathrm{BRST}}(\boldsymbol{z}) = DC(CDB - \frac{3}{4}DCB) \tag{4.4.15}$$

となる．(1.9.12)に従い，BRSTチャージはこのBRSTカレントの超積分

$$Q_{\mathrm{BRST}} = \frac{1}{2\pi i}\oint dz\, d\theta\, J_{\mathrm{BRST}} \tag{4.4.16}$$

となる．このチャージは3つの部分にわかれる：

$$Q_{\mathrm{BRST}} = Q^{(0)} + Q^{(1)} + Q^{(2)}. \tag{4.4.17}$$

ただし

$$\begin{aligned} Q^{(0)} &= \frac{1}{2\pi i}\oint dz (cT_B(X,\psi,\beta,\gamma) - c\partial cb) \\ Q^{(1)} &= \frac{1}{2\pi i}\oint dz \frac{1}{2}\gamma\psi_\mu\partial X^\mu \\ Q^{(2)} &= \frac{1}{2\pi i}\oint dz \frac{1}{4}\gamma^2 b \end{aligned} \tag{4.4.18}$$

各部分を注意深く分析すれば，この和がべき零

$${Q_{\mathrm{BRST}}}^2 = 0 \tag{4.4.19}$$

であることを示すことができる．

BRSTカレントに加え,「ゴースト数カレント」と呼ばれるU(1)カレントもある．単純には，ゴーストは作用にいつでも対で現れるから，バリオン数に似た情況となっていてある量子数が保存されると期待される．ところが驚いたことに，ゴースト数カレントに補正項があることがわかる．まずゴースト数カレントを書き下そう．それはゴースト場について2次であり，

$$\boldsymbol{j}(z) = -\boldsymbol{bc} = \sum_n z^{-n-1}\boldsymbol{j}_n \tag{4.4.20}$$

である．ここで，

$$\boldsymbol{j}_n = \sum_k \varepsilon \boldsymbol{c}_{n-k}\boldsymbol{b}_k \tag{4.4.21}$$

$\varepsilon = +1$ (フェルミ)または$\varepsilon = -1$ (ボーズ)である．ゴースト数カレントとエネルギー運動量テンソルの間の短距離の振る舞いを計算するのに必要な恒等式は，すでにすべて求めてある．それらを用いて，

$$T(z)\boldsymbol{j}(w) \sim \frac{Q}{(z-w)^3} + \frac{\boldsymbol{j}(z)}{(z-w)^2} + \cdots \tag{4.4.22}$$

を得る．ここで $Q=\varepsilon(1-2\lambda)$ である．（この Q 因子の項は，アノーマリーであることに注意せよ.）これは，

$$[L_m, \boldsymbol{j}_n] = -n\boldsymbol{j}_{m+n} + \frac{1}{2}Qm(m+1)\delta_{m,-n} \tag{4.4.23}$$

を意味する．このゴースト数カレントにより，各ゴースト場にゴースト数が割りあてられる．そしてこのゴースト数カレントは，複素共役をとると異常な性質を示す：

$$\boldsymbol{j}_m^\dagger = -\boldsymbol{j}_{-m} - Q\delta_{m,0}. \tag{4.4.24}$$

ここで，

$$\begin{aligned} &Q = \varepsilon(1-2\lambda) \\ &\lambda = \frac{1}{2}(1-\varepsilon Q) \\ &\varepsilon = +1 \ (\text{フェルミ統計})\ ;\quad -1\ (\text{ボーズ統計}) \end{aligned} \tag{4.4.25}$$

((4.4.24)で Q の項がなければ，このカレントはふつうの複素共役の性質をもっているはずである.）ゴースト場の量子数は，

$$\begin{aligned} &b, c: \quad \varepsilon = 1; \quad \lambda = 2; \quad Q = -3\ ; \quad c = -26 \\ &\beta, \gamma: \quad \varepsilon = -1; \quad \lambda = \tfrac{3}{2}\ ; \quad Q = 2\ ; \quad c = 11 \end{aligned} \tag{4.4.26}$$

である．また，ゴーストのアノーマリーへの寄与は $c=-2\varepsilon(6\lambda(\lambda-1)+1)$ である．このゴーストの構造のふつうにない特徴の 1 つは，**無限個の真空**が存在することで，これは(4.4.23)と(4.4.24)のために生じている．今，真空を

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{b}_n|q\rangle = 0; \quad n > \varepsilon q - \lambda \\ &\boldsymbol{c}_n|q\rangle = 0; \quad n \geq -\varepsilon q + \lambda \end{aligned} \tag{4.4.27}$$

により定義しよう．ゴースト数のカレントの 0 番目の成分と L_0 は，これらの状態に次のように作用する：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{j}_0|q\rangle &= q|q\rangle \\ L_0^{bc}|q\rangle &= \frac{1}{2}\varepsilon q(Q+q)|q\rangle. \end{aligned} \tag{4.4.28}$$

とくに最後の恒等式から，0 でない唯一の行列要素は

$$\langle -q-Q|q\rangle = 1 \tag{4.4.29}$$

であることがわかる．これを示すもっとも簡単な方法は，数 q でラベルされている異なる真空の間で，カレントの行列要素をとることである：

$$\langle q'|L_0|q\rangle;\ \ \langle q'|j_0|q\rangle. \tag{4.4.30}$$

(4.4.24)とこれから，$q'=-q-Q$ であるとき以外は行列要素が 0 となることがわかる．

これは非常に異常なことである．ふつうの Veneziano 模型では，唯一の真空があっ

た．今はNSとRの模型のゴースト部分に対し，q でラベルされた**無限個の真空**があるように見える！ **無限個のフェルミおよびボーズ真空が存在することが，共形場の理論のふつうでない特徴の1つである．**

このことはゴースト数カレントにアノーマリーがあることを意味している．問題は(4.4.22)と(4.4.23)にある．すなわちU(1)ゴーストカレントが，エネルギー運動量テンソルとアノーマリーのある交換関係をもっているのである．このアノーマリーの項は，ゴースト数の保存則の破れに対応している．実際そのカレントの発散は，$\partial_{\bar{z}} j_z = \frac{1}{8}Q\sqrt{g}R^{(2)}$ すなわち2次元の曲率密度となっている．これらすべての困難のもともとの原因は，∇_z と $\nabla_{\bar{z}}$ についてのFaddeev-Popov行列式を計算したときの(4.1.36)にさかのぼる．これらの演算子の固有値を注意して分析してみると，ゼロモードを除かなければ行列式が意味をもたないことがわかる．Faddeev-Popovゴーストを用いてこれらの行列式を指数化したときには，これらのゼロモードは方程式 $\partial_{\bar{z}} c^z = \partial_{\bar{z}} b_{zz} = 0$ の自明でない解に対応しているのである．しかし残念ながら，これらのゼロモードの詳しい議論は，ここで与えることはできない．というのは，第8章でアノーマリーを詳しく議論するまで論じない新しい知識が必要となるからである．(簡単にいうとこのアノーマリーは，弦の掃くリーマン面の位相に関係していることが示せる．U(1)ゴースト数カレントに対する発散の方程式を積分してガウス-ボネ定理を用いれば，$\int d^2z\sqrt{g}R^{(2)} = -8\pi(g-1)$ を得る．ここで g は閉じたリーマン面の穴またはハンドルの数である．そしてリーマン-ロッホの定理を用いれば，c のゼロモードの数引く b のゼロモードの数は，$(1-2\lambda)(g-1)$ となることがわかる．c のゼロモードは共形キリングベクトルに対応し，b のゼロモードはモジュライ(moduli)に対応する．これは有用な結果で，g 個のハンドルをもつ球面の複素モジュライの数が $3g-3$ 個であることを示している．これは第5章でよく用いることになる．これはまた，超モジュライ(supermoduli)の数が $4(g-1)$ 個であることも示しているが，他の方法でこれを示すのは困難である.)

さて，(ふつうの南部-後藤の弦のゴーストの)フェルミ真空は実は同等な真空であることが示せる．すなわち，フェルミ真空にいろいろな b と c の単項式をかければ，他の真空が再現できるのである．したがっていろいろな真空は同等な表現を与える．しかし(NS-R模型のゴーストの)ボーズ真空の場合の情況は異なっている．いろいろな真空は実は同等でない真空であることがわかる．つまり β と γ のどんな単項式をかけても，1つの真空から別の真空へ移ることはできない．

NS部分ではボーズ真空は整数でラベルされており，R部分ではボーズ真空は半整数でラベルされている．ふつうの真空の定義にもっとも近い真空状態(すなわち，振動子のすべての正振動部で消滅されるもの)は，

$$
\begin{aligned}
&\text{R:} \begin{cases} |-\frac{1}{2}\rangle \\ |-\frac{3}{2}\rangle \end{cases} \\
&\text{NS:} \ |-1\rangle
\end{aligned}
\tag{4.4.31}
$$

である．これらを，次のように規格化しておく：

$$\langle -\tfrac{3}{2}| -\tfrac{1}{2}\rangle = 1$$
$$\langle -1| -1\rangle = 1. \tag{4.4.32}$$

無限個の同等でない真空が現れることは最初は災難と思われるが，後でこれでまったく問題ない理論が得られることを示す．とくに質量殻条件のみたされているときは，このいろいろな真空のどれを選んでも実は何の差も生じないことを示す．真空を任意にとっても同じ物理的過程に対する質量殻条件をみたす行列要素はすべて同じになる．実は「描像変換」の演算子を作って，1つの真空から別の真空へ移ることができるのである．この情況は，前に(3.3.18)と(3.3.19)で論じた F_1 と F_2 の描像で見たものとまったく同じである．

これで NS-R 模型のゴースト部分の構造を調べ終わったので，次のステップとしてフェルミオンの頂点関数の足りない部分である共形ウェイト $\frac{3}{8}$ を与える場を求めなければならない．

新しい場 ϕ を理論に導入して，ゴーストカレントをボソン化しよう：

$$j(z) = \varepsilon\partial\phi(z). \tag{4.4.33}$$

調べたい新しい量は，

$$: e^{q\phi} : \tag{4.4.34}$$

である．その短距離の振る舞いは[1]，

$$j(z)e^{q\phi(w)} \sim \frac{q}{z-w}e^{q\phi(w)} + \cdots \tag{4.4.35}$$

と

$$T(z)e^{q\phi(w)} \sim \left[\frac{1}{2}\varepsilon q(q+Q)(z-w)^{-2} + (z-w)^{-1}\partial_w\right]e^{q\phi(w)} + \cdots \tag{4.4.36}$$

で与えられる．これから，

$$e^{q\phi(0)}|0\rangle = |q\rangle \tag{4.4.37}$$

$$\text{ウェイト}:\frac{1}{2}\varepsilon q(q+Q) \tag{4.4.38}$$

を得る．このことは，ボソン化した場 $e^{q\phi}$ をかけることにより，1つのゴースト真空から別の真空へ移れることを意味している．NS ゴースト真空は整数をもつが，R ゴースト真空は半整数をもつことに注意せよ．q は半整数でもよいので，$e^{q\phi}$ をかけることによりいろいろな NS と R の真空を行ったり来たりできることになる．

このボソン化の手法を用いて，反交換する b と c 場を新しいスカラーボソン場 σ により書こう：

$$b(z) = e^{-\sigma(z)};\quad c(z) = e^{\sigma(z)}. \tag{4.4.39}$$

(ここで，場が正しい共形ウェイトをもつことを確かめることができる．(4.4.38)から場 $e^{q\sigma}$ は共形ウェイト $\frac{1}{2}q(q-3)$ をもつ．$q=-1$ に対し $e^{-\sigma}$ はウェイト 2 をもち，

---

[1] $\phi(z)\phi(w) \sim \varepsilon\log(z-w)$ (フェルミ統計のとき $\varepsilon=+1$，ボーズ統計のとき $\varepsilon=-1$) を用いる．

$q=1$ に対し e^σ はウェイト -1 をもつ．したがって，正しいウェイトをもっていることがわかる.）σ 自身は交換する場であるが，左辺も右辺も両方とも反交換する場になっていることに注意せよ．これで容易に

$$\langle\sigma(z)\sigma(w)\rangle=\log(z-w); \quad e^{-\sigma(z)}e^{\sigma(w)}\sim\frac{1}{z-w}$$

を示せる．

しかしNS-Rのゴースト部分に対しては，これはもっと難しい．これらのゴーストは交換するので，ボソン化は不可能なように思える．しかし，トリック

$$\beta=e^{-\phi}\partial\xi\,; \quad \gamma=e^{\phi}\eta \tag{4.4.40}$$

を使う．ここで左辺は交換する場であり，右辺は2つの反交換する場の積になっている．つまり ξ と η は反交換する場(これはさらにボソン化できる)にしてある．こうすれば交換する場を反交換する場で書ける．またこの手続きを逆にして，

$$\eta=\partial\gamma e^{-\phi}; \quad \partial\xi=\partial\beta e^{\phi} \tag{4.4.41}$$

とすることもできる．

ξ と η はそれ自身反交換するので，ボソン化できることに注意せよ．この2つの反交換する場をボソン場 χ で表そう：

$$\xi=e^{\chi}; \quad \eta=e^{-\chi}. \tag{4.4.42}$$

共形場の理論ではすべての場が自由場であるという大きな利点があるが，それと引きかえに，これらの異なる自由場すべてに絶えず注意していなければならない．したがってこれらすべてのボソン場を明白に定義しておくことが重要なので，それらの量子数を表にしておく：

(4.4.43)

ボソン	チャージ	アノーマリー	ウェイト
ϕ	$Q=2$	$c=13$	$\mathrm{wt}(e^{q\phi})=-\frac{1}{2}q(q+2)$
χ	$Q=-1$	$c=-2$	$\mathrm{wt}(e^{q\chi})=\frac{1}{2}q(q-1)$
σ	$Q=-3$	$c=-26$	$\mathrm{wt}(e^{q\sigma})=\frac{1}{2}q(q-3)$

ボーズ的NS-Rゴーストの定義には，実は重要な問題がある．β は ξ の微分を用いて定義されていることに注意しよう．したがって，β は ξ 場のゼロモードを含んでいない．そのためふつうのフォック空間は，ξ 場のゼロモードによらない．それで2種類のフォック空間が可能となる.「小さな」フォック空間には ξ のゼロモードはない.「大きな」フォック空間には ξ のゼロモードがあり可約である．このことは，

$$\{\eta_0,\xi_0\}=1 \tag{4.4.44}$$

であるから，η,ξ 系の真空が縮退していることを意味している．

以上の構成を用いれば，フェルミオン頂点演算子の足りない部分を書き下すことができる．

4.5 フェルミオン頂点

さて，ボソン化した場の共形ウェイトを計算してみよう：

$$\begin{aligned}\mathrm{wt}(e^{-\phi/2}) &= \frac{1}{2}\varepsilon q(q+Q) = \frac{3}{8} \\ \mathrm{wt}(e^{\phi/2}) &= \frac{1}{2}\varepsilon q(q+Q) = -\frac{5}{8}.\end{aligned} \tag{4.5.1}$$

これで足りない部分がわかる．ボソン化した場 $e^{-\phi/2}$ はウェイト $\frac{3}{8}$ をもっているから，それを用いて**理論の本当のフェルミオン頂点を構成する**ことができる：

$$V_{-1/2} = u^\alpha e^{-\phi/2} S_\alpha e^{ik\cdot X}. \tag{4.5.2}$$

これは，共形ウェイト

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} + \alpha' k^2 \tag{4.5.3}$$

をもつ．外線のフェルミオンを質量殻上にもっていけば，

$$\begin{aligned}k^2 &= 0 \\ \gamma^\mu k_\mu u_\alpha &= 0\end{aligned} \tag{4.5.4}$$

なので，共形ウェイト 1 の頂点が得られることになる．この頂点は BRST 変換の下で，質量殻条件で消える項を除き正しい性質

$$\left\{Q_{\mathrm{BRST}}, V_{-1/2}\right\}_+ = 0 \tag{4.5.5}$$

をもっている．このような完全に自由場だけに基づいた共形ウェイト 1 の本当のフェルミオン頂点関数を作れることは，共形場の理論の大きな成果の 1 つである．ここで重要な点は，ゴースト部分を用いて足りない共形ウェイト $\frac{3}{8}$ を補ったことである．

これで目的を達成したが，話はこれで終わりではない．前節で ξ の無限のボーズ海 (Bose sea) に関連した問題があることを述べた．ボソンの散乱行列要素にこのフェルミオン頂点を挿入すると，0 になることがわかる：

$$\langle \cdots V_{-1/2} \cdots V_{-1/2} \cdots \rangle = 0. \tag{4.5.6}$$

これが 0 にならないために必要なものは，フェルミオン頂点に由来するゴーストのチャージ $-\frac{1}{2}$ を打ち消すチャージ $+\frac{1}{2}$ の頂点である．そしてこの新しい頂点 $V_{1/2}$ は，質量殻条件で消える項を除き BRST チャージと反交換しなければならない．ここで任意の Φ に対し，頂点

$$V = [Q_{\mathrm{BRST}}, \Phi] \tag{4.5.7}$$

は，Q_{BRST} がべき零であるために BRST チャージと反交換することが容易に示せる．しかしそのような頂点はすべて偽である．というのはこれらの状態はノルムが 0 であり，

$$Q_{\mathrm{BRST}}|R\rangle = 0 \tag{4.5.8}$$

をみたす実状態 $|R\rangle$ に結合しないからである．したがってそれらは頂点関数としては

使えない．それらと理論の物理的部分との行列要素は 0 にしかならないのである．ところがこの推論があてはまらない頂点関数がある．それは，

$$V_{1/2} = 2[Q_{\mathrm{BRST}}, \xi V_{-1/2}] \tag{4.5.9}$$

である．単純にはこのような頂点も偽であって，理論の実状態と結合しないと期待される．しかしすでに述べたように，$\xi V_{-1/2}$ は理論の既約なフォック空間の一部ではないので，この交換子を実状態と縮約して 0 になると単純に結論するわけにはいかない．つまり，

$$Q_{\mathrm{BRST}}\xi|0\rangle \neq 0 \tag{4.5.10}$$

であるので，この頂点は必ずしも 0 にならない．詳しく分析すると，この頂点は，

$$V_{1/2} = u^\alpha(k)e^{ik\cdot X}\left[e^{\frac{1}{2}\phi}\left(\partial X^\mu + \frac{1}{4}ik\cdot\psi\psi^\mu\right)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}S^\beta + \frac{1}{2}e^{3\phi/2}\eta b S_\alpha\right] \tag{4.5.11}$$

に等しいことがわかる．これが $V_{-1/2}$ と縮約することのできる正しいフェルミオン頂点である．

しかしここで少々困った問題が生じる．今度は，あまりにたくさんの頂点がありすぎるのである．たとえば，

$$\begin{aligned} V_{3/2} &= [Q_{\mathrm{BRST}}, \xi V_{1/2}] \\ V_{5/2} &= [Q_{\mathrm{BRST}}, \xi V_{3/2}] \\ V_{7/2} &= \cdots \end{aligned} \tag{4.5.12}$$

なども書くことができるからである．実際無限個のこういう頂点があって，それぞれが同等でないボーズ海の真空に結びついているのである．しかし実は $V_{1/2}$ と $V_{-1/2}$ だけを使えばよく，他の頂点は新しい行列要素を与えないことを示すことができる．それを見るために，次の恒等式

$$\begin{aligned} &\langle\cdots V_{-1/2}(u_1,k_1,z_1)\cdots V_{1/2}(u_2,k_2,z_2)\cdots\rangle \\ &\qquad = \langle\cdots V_{1/2}(u_1,k_1,z_1)\cdots V_{-1/2}(u_2,k_2,z_2)\cdots\rangle \end{aligned} \tag{4.5.13}$$

を以下で示すことにしよう．このように頂点のゴースト添字 $\frac{1}{2}$ と $-\frac{1}{2}$ を自由に変えられることの証明は，(ξ のゼロモードを含まない)既約な小さなフォック空間と，(ξ のゼロモードを含む)可約な大きなフォック空間の間を移る少々こみ入った議論を必要とする．

まず頂点 $V_{1/2}$ を同値な形

$$V_{1/2}(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\oint dw\, j_{\mathrm{BRST}}(w)\xi(z_2)V_{-1/2}(z_2) \tag{4.5.14}$$

に書き換える．今頂点が大きなフォック空間内で書かれているので，0 でない行列要素を得るには別の $\xi(z)$ を挿入して，真空を再定義しなければならない．しかし $\xi(z)$ の場所は関係ないので(そのゼロモードだけが必要だからである)，それを z_1 のところにおき行列要素を

$$\langle\cdots\xi(z_1)V_{-1/2}\cdots\frac{1}{2\pi i}\oint dw\, j_{\mathrm{BRST}}(w)\xi(z_2)V_{-1/2}(z_2)\cdots\rangle \tag{4.5.15}$$

と書き換えることができる．ここまでは何もしていない．単に ξ のゼロモードが決して現れない小さなフォック空間から，それが現れる大きなフォック空間へ移っただけである．しかし行列要素の値はまったく同じである．

ここで次のことに注意する．z_2 をまわる周回積分を自由に変形することができるので，それを大きくしていってリーマン面(球面)の裏側を通してもどし，点 z_1 をまわるようにする．もちろん積分路を大きくすると他のボソンの頂点を横切るが，質量殻条件を使えば j_{BRST} はそのどれとも交換するので，積分路と j_{BRST} の両方を自由に動かして，z_1 のまわりにできるのである．

次に，周回積分が今は $\xi V_{-1/2}$ のまわりをまわっていることに注意すれば，それが $V_{+1/2}$ と書けることがわかる．このようにして周回積分の位置を変えてしまい，すべての ξ を消して小さなフォック空間にもどることができる．象徴的に書くと，以上の手続きは次のように表される：

$$\begin{aligned}\langle\cdots V_{-1/2}\cdots V_{1/2}\rangle &\to \langle\cdots(\xi V_{-1/2})\cdots\left[\oint dw j_{\mathrm{BRST}}\xi V_{-1/2}\right]\cdots\rangle\\ &\to \langle\cdots\left[\oint dw j_{\mathrm{BRST}}\xi V_{-1/2}\right]\cdots(\xi V_{-1/2})\cdots\rangle\\ &\to \langle\cdots V_{1/2}\cdots V_{-1/2}\cdots\rangle.\end{aligned} \tag{4.5.16}$$

この変形により，$\frac{1}{2}$ と $-\frac{1}{2}$ の位置を行列要素の中でうまく入れ替えることができることが示された．こうして無限個のフェルミオンの頂点があっても，それらがすべて質量殻条件をみたす同じ行列要素を与えることがわかる．

4.6　スピノールと樹木

樹木振幅を計算するには，NS-R 演算子によるスピン場の具体的な表式を構成する必要がある．これらの場は GS 形式では非常に複雑な相互作用をもつ演算子であるが，共形場の理論の大きな利点として，相互作用しているスピン場が自由場で構成できその相関関数を具体的に計算できるのである．

さて，スピン場を SO(10) 代数の生成子で構成するが，後者は $\psi(z)$ で構成できるものである．SO(10) 代数はランク 5 のリー代数である(付録を見よ)．その意味は，SO(10) 代数の $10(10-1)/2=45$ 個の生成子のうち 5 個が互いに交換し，カルタン部分代数を構成するということである．これらの 5 つの交換する生成子と 40 個の交換しない要素の間の交換関係は，

$$\begin{aligned}[H_i,H_j]&=0\\ [H_i,E_\alpha]&=\boldsymbol{\alpha}_i E_{\boldsymbol{\alpha}}\\ [E_{\boldsymbol{\alpha}},E_{\boldsymbol{\beta}}]&=\varepsilon(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})E_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}\end{aligned} \tag{4.6.1}$$

である．最後の等式は，$E_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}$ が上昇または下降演算子であれば成り立つ式である．各 $\boldsymbol{\alpha}$ は群 SO(10) のルートベクトルである．ε の項は群の構造定数であり，いろいろな

対称性と結合則をみたす．

さて，5 つの互いに交換する場 ϕ_j を導入し，SO(10) の 45 個の生成子をそれで表そう．SO(10) の 5 つの交換する生成子は，

$$\partial\phi_j = H_j \tag{4.6.2}$$

と表すことができる．そこで残る 40 個の生成子を表すために，

$$E_{\boldsymbol{\alpha}} = :e^{i\beta^j_{\boldsymbol{\alpha}}\phi_j}: c_{\boldsymbol{\alpha}} \tag{4.6.3}$$

と書くことにする．ここで $\boldsymbol{\beta}$ はルートベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ を ϕ_j ベクトルの線形結合に移す行列

$$\beta_{\boldsymbol{\alpha}} = (\pm 1, \pm 1, 0, 0, 0) \tag{4.6.4}$$

である．またその巡回したものも含める．ここで + と − の符号の組み合わせが 4 つあり，5 つの場所にこの符号を入れるには 10 通りの方法があることに注意せよ．したがって，この行列は 40 個の要素をもつことになる．各場所は 5 つの ϕ_j のどれか 1 つに対応するものである．

(4.6.3) の中の因子 $c_{\boldsymbol{\alpha}}$ は，交換関係が正しく出るように入れてある．これらの表式を代数に入れると，

$$c_{\boldsymbol{\alpha}} c_{\boldsymbol{\beta}} = \varepsilon(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) c_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}} \tag{4.6.5}$$

としなければならないことがわかる．交換子の結合則を要求すれば，

$$\varepsilon(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\varepsilon(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \varepsilon(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})\varepsilon(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \tag{4.6.6}$$

も得られる．これらの 2 コサイクル (two cocycle) の 1 つの表示として，

$$\varepsilon(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (-1)^{\sigma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})} \tag{4.6.7}$$

をとろう．ここで，

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \tag{4.6.8}$$

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \sigma(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle \quad \mathrm{mod}\ 2 \tag{4.6.9}$$

である (他の表し方は，[9, 10] を見よ)．

このボソン化により，NS の反交換するベクトル場も表すことができる．そのために，

$$\psi^{\rho_\alpha} = :e^{i\rho^i_\alpha \phi_j}: c_{\rho_\alpha} \tag{4.6.10}$$

と書こう．ここで $\rho_{\boldsymbol{\alpha}}$ は

$$\rho_{\boldsymbol{\alpha}} = (\pm 1, 0, 0, 0, 0) \tag{4.6.11}$$

とその巡回したものである．ρ には 2×5 の要素があり，ψ^μ の要素の数と一致する．

このボソン化の描像でスピン場を表してみよう．行列

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1) \tag{4.6.12}$$

を定義しよう．この行列には，$2^5=32$ 個の項があることに注意する．そして，

$$S_\alpha = :e^{i\lambda^j_\alpha \phi_j}: c_\alpha \tag{4.6.13}$$

を定義しよう．この場 S_α は，10 次元のスピノールと同じ成分をもっている．さらにそれはウェイト $\frac{5}{8}$ をもつ．各因子がウェイト $\frac{1}{8}$ をもち，それが5つあるので，全体で $\frac{5}{8}$ になるからである．これは前に(4.3.9)で，完全に群論的議論によりスピン場 S_α がウェイト $\frac{5}{8}$ をもつとしたこととちょうど一致している．

場 $e^{-\frac{1}{2}\phi}$ はウェイト $\frac{3}{8}$ をもち，$e^{\frac{1}{2}\phi}$ はウェイト $-\frac{5}{8}$ をもっている．したがって，ウェイト1の頂点は，

$$V_{-1/2,\alpha} = S_\alpha e^{-\frac{1}{2}\phi} :e^{ik\cdot X}: \tag{4.6.14}$$

で与えられる．

これでスピン場の具体的な表示が得られたので，フェルミオン・フェルミオン散乱の行列要素を計算することができる．

そこで X, S_α, $e^{-\frac{1}{2}\phi}$ を含む3つの独立な因子の積で表される4体フェルミオン散乱振幅を計算しよう：

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1)V_{\alpha_2}(z_2)V_{\alpha_3}(z_3)V_{\alpha_4}(z_4)\rangle. \tag{4.6.15}$$

ここで $z_1=\infty, z_2=1, z_3=z, z_4=0$ とおく．

各因子を別々に計算しよう．前に第2章で導出した公式を用いて，まず X による因子は

$$\langle V(k_1,z_1)V(k_2,z_2)\cdots V(k_N,z_N)\rangle = \prod_{i\neq j}(z_i-z_j)^{k_i\cdot k_j} \tag{4.6.16}$$

に等しいことがわかる．ここで，

$$V(k,z) = :e^{ik\cdot X(z)}: \tag{4.6.17}$$

で，すべての k_i の和は0である．

次にゴーストの寄与に移ろう．それは，

$$\langle e^{-\frac{1}{2}\phi(\infty)}e^{-\frac{1}{2}\phi(1)}e^{-\frac{1}{2}\phi(z)}e^{-\frac{1}{2}\phi(0)}\rangle = [z(1-z)]^{-1/4} \tag{4.6.18}$$

である．最後に，スピン場の寄与は，

$$\langle S_\alpha(\infty)S_\beta(1)S_\gamma(z)S_\delta(0)\rangle = [z(1-z)]^{-3/4}\{(1-z)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\mu)_{\gamma\delta} - z(\gamma^\mu)_{\alpha\delta}(\gamma_\mu)_{\beta\gamma}\} \tag{4.6.19}$$

である．以上の3つの部分を合わせて，

$$A_4 = g^2\int_0^1 dz\, z^{k_3\cdot k_2-1}(1-z)^{k_3\cdot k_4-1}\{(1-z)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\mu)_{\gamma\delta} - z(\gamma^\mu)_{\alpha\delta}(\gamma_\mu)_{\beta\gamma}\} \tag{4.6.20}$$

が得られる．この振幅を書き換えて，最終的に

$$A_4 = g^2\left\{B\left(1-\frac{1}{2}t,-\frac{1}{2}s\right)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\mu)_{\gamma\delta} - B\left(-\frac{1}{2}t,1-\frac{1}{2}s\right)(\gamma^\mu)_{\alpha\delta}(\gamma_\mu)_{\beta\gamma}\right\} \tag{4.6.21}$$

を得る．この計算と N 点フェルミオン散乱振幅を含む他の計算は，共形場の理論を用いればそう難しくはない [9, 10] が，古い共変な NS-R や GS 形式では極めて困難なものである．

4.7 Kac-Moody 代数

共形場の理論の結果は強力であるが，初学者にはいろいろな規則や約束が少々任意で勝手なものに思えるかもしれない．一見共形場の理論は別に基本的なものではなく，賢いトリックと偶然によっているようにも思える．

実は共形場の理論にある無矛盾性と美しさは，Kac-Moody 代数 [11–22] と呼ばれる新しい無限次元リー代数によっている．これはふつうの有限次元リー代数を拡張したものである．数学者 V. G. Kac と R. V. Moody が 1967 年にこれらを発見したが，その 1 つの形はカレント代数として 1960 年代中頃に物理学者には知られていたものである．2 次元の超共形群とともに，SO(10) の Kac-Moody 代数が共形場の理論の数学的枠組みを与えるのである．実際共形場の理論の行列要素の多くは，Kac-Moody 代数のクレプシュ-ゴルダン係数と見なすことができるのである．

Kac-Moody 代数をふつうのリー代数の一般化として定義することにして，その生成子が

$$[T_m^i, T_n^j] = if^{ijl}T_{m+n}^l + km\delta^{ij}\delta_{m,-n} \tag{4.7.1}$$

をみたすとする．この代数はふつうのリー代数に非常に似ているが，各生成子に無限の整数添字 m がついていることと，レベルと呼ばれる定数 k がある点が違う．T の 0 番目の成分は，有限リー代数にほかならない．ここで Kac-Moody 代数の生成子を，円周上で定義された 1 つの関数のフーリエ成分として書くのが便利である：

$$T^i(\theta) = \sum_n T_n^i e^{-in\theta}. \tag{4.7.2}$$

また Kac-Moody 代数の生成子を，カルタン部分代数とその固有ベクトル

$$H_i(\theta); \quad E_\alpha(\theta) \tag{4.7.3}$$

に分解することもできる．こうすると Kac-Moody 代数は，円周上にのびたふつうのリー代数のように見える．

さて頂点演算子を用いて，Kac-Moody 代数のいわゆる「基本的表現」(basic representation) を構成しよう．この表現は，レベルが 1 ($k = 1$) の simply laced の群 (すなわち同じ長さのルートをもつ群で，A, D, E のリー群) に対してのみ存在する．まず，弦変数

$$\phi_i(\theta) = q_i + p_i\theta + i\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^i e^{-in\theta}}{n} \tag{4.7.4}$$

を定義しよう．そしてリー代数の格子の基底ベクトルで，

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{4.7.5}$$

なるものを導入する．これにより弦変数と頂点関数を，格子上のベクトルとして書く

ことができる：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}(\theta) &= \sum \boldsymbol{e}_i \phi_i \\ q_i(\theta) &=: e^{i\phi_i(\theta)} : c_i.\end{aligned} \tag{4.7.6}$$

ここで c_i は，正しい符号の交換関係を得るために(4.6.5)で導入したコサイクルである．それはいろいろな表示ができるが，その1つは，

$$c_i = \exp\left\{\frac{1}{2}i\pi\left(\sum_{k<i} - \sum_{k>i}\right)\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{p}\right\} \tag{4.7.7}$$

である．最後に，これにより Kac-Moody 代数の生成子が導入できる：

$$\begin{aligned}H_i(\theta) &= : q_i^*(\theta) q_i(\theta) : = -\frac{d\phi_i}{d\theta} \\ E_{\boldsymbol{\alpha}} &= : q_j^*(\theta) q_k(\theta) : = \pm i c_j^* c_k : e^{i\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\phi}(\theta)} : .\end{aligned} \tag{4.7.8}$$

ただし $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{e}_j$ であり，$k > j$ に対し + 符号，$k < j$ に対し − 符号を用いる．i 番目と j 番目の要素は交換するので，H はカルタン部分代数，すなわちリー代数の互いに交換する要素の集合を一般化したものになっている．

ここでこれらの生成子の間の交換関係を計算しよう．前とほとんど同様にして，2つの頂点関数の積が，

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{\alpha}, \theta) &=: e^{i\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\phi}(\theta)} : \\ V(\boldsymbol{\alpha}, \theta) V(\boldsymbol{\beta}, \theta) &= \Delta(\theta - \theta')^{-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}} : e^{i\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\phi}(\theta) + i\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\phi}(\theta')} :\end{aligned} \tag{4.7.9}$$

となることがわかる．ただし，

$$\Delta(\theta - \theta') = e^{-\frac{i}{2}(\theta-\theta')}\left[1 - (1-\varepsilon)e^{-i(\theta-\theta')}\right]^{-1} \sim \frac{-i}{\theta - \theta' + i\varepsilon} + \cdots \tag{4.7.10}$$

である．これですべての生成子の間の交換子を計算するのに必要な式はすべて得られた．直接計算により，

$$\begin{aligned}[H_i(\theta), H_j(\theta')] &= 0 \\ [H_i(\theta), E_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta')] &= -2\pi\delta(\theta - \theta')\boldsymbol{\alpha}_i E_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta)\end{aligned} \tag{4.7.11}$$

を得る．ふつうのリー代数のように H は互いに交換し，$\boldsymbol{\alpha}_i$ は H の固有値であることに注意せよ．またいろいろな E の間の交換子は，

$$[E_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta), E_{-\boldsymbol{\alpha}}(\theta')] = 2\pi\delta(\theta - \theta')\sum_i \boldsymbol{\alpha}_i H_i(\theta) + 2\pi i\delta'(\theta - \theta') \tag{4.7.12}$$

$$[E_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta), E_{\boldsymbol{\beta}}(\theta')] = \begin{cases} 2\pi\delta(\theta - \theta')E_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}(\theta) & \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in \Gamma \\ 0 & \text{その他}\end{cases} \tag{4.7.13}$$

となる(Γ はルート格子である)．こうして Kac-Moody 代数の交換子が，ふつうのリー代数のものと非常に似ているが，生成子が円周上に拡がっていることがわかる．

Virasoro 代数と Kac-Moody 代数の半直積(semidirect product)ができることも重要である．その場合，交換子は

$$[L_m, T^i_n] = -nT^i_{m+n}$$
$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n,-m} \tag{4.7.14}$$

となる．

選んだ代数の表現により，Kac-Moody 代数のレベル k と Virasoro 代数の中心項 c に関係をつけることができる．つまり Kac-Moody 代数の 1 つの著しい特徴として，Virasoro 代数の表現が Kac-Moody 代数によって構成できるのである．次に，円周上に拡がった Virasoro 生成子を書こう：

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \frac{1}{2}N\left(\sum_i : H_i(\theta)^2 : + \sum_{\boldsymbol{\alpha}} : E_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta)E_{-\boldsymbol{\alpha}}(\theta) :\right) \\ &= \frac{1}{2}N\left(\sum_{i=1}^{d} : T_i(\theta)^2 :\right). \end{aligned} \tag{4.7.15}$$

これは菅原形(Sugawara form)と呼ばれる．

これらを互いに交換させるために必要な式はすべて求めてあり，

$$[L(\theta), L(\theta')] = 2\pi i\delta'(\theta-\theta')(L(\theta)+L(\theta')) - \frac{c}{12}2\pi i(\delta'''(\theta-\theta')+\delta'(\theta-\theta')) \tag{4.7.16}$$

を得る．ただし[2]

$$N = \frac{1}{1+\frac{1}{2}c_2(G)}; \quad c = \frac{d}{1+\frac{1}{2}c_2(G)} \tag{4.7.17}$$

であり，d は群の次元，$c_2(G)$ は随伴(adjoint)表現の 2 次の Casimir 演算子の値である．

最後の交換子は，Kac-Moody と Virasoro 代数の半直積性を出す：

$$[L(\theta), E_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta')] = \delta'(\theta-\theta')E_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta). \tag{4.7.18}$$

いくつかの群に対し，セントラルチャージの値を次表に計算しておいた：

c	群
$n-1$	$\mathrm{SU}(n)$
$n+2$	$\mathrm{SO}(2n+1)$
n	$\mathrm{SO}(2n)$
n	E_n
$\frac{n(2n+1)}{n+2}$	$\mathrm{Sp}(n)$

(4.7.19)

ここで Kac-Moody 代数の視点から共形場の理論を再分析し，群論から共形場の理

[2] ここでは，レベル $k=1$ としてあり，2 次の Casimir の規格化が通常と 2 倍異なる．一般には，(4.7.17) の分母の 1 がレベル k に置き換わる．すぐ下の表も $k=1$ のものであり，一般の k では異なる．

論を再解釈してみよう．(4.6.13)に与えたスピン場は，SO(10) Kac-Moody 代数の下で 32 成分のスピノールとして変換することがわかる．同様に，(4.6.10)に与えた NS の反交換するベクトル場は，SO(10) Kac-Moody 代数の下で 10 成分のベクトルとして変換する．また共形場の理論の b, c, β, γ のゴーストも，(4.4.43)に与えた中心項の異なる値をもつ超共形群の表現を作っていると見なせる．最後に，共形場の理論の中核である相関関数も，超共形群と結合した SO(10) Kac-Moody 代数のいろいろな表現のテンソル積のクレプシュ-ゴルダン係数とも見なすことができるのである．

4.8 超対称性

ようやくこれで，この理論のフェルミオンとボソン部分をつなぐ超対称性演算子を構成することができる段階に達した．$V_{\pm 1/2}$ は共形ウェイト1をもつので，それを積分したものは共形群の下で不変量である．したがって $k=0$ ととれば，超対称性演算子

$$Q_{\pm 1/2,\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\oint dz V_{\pm 1/2,\alpha} \tag{4.8.1}$$

を得る．$+$ または $-$ のフェルミオン頂点のどちらをとるかにより，

$$\begin{aligned} Q_{-1/2,\alpha} &= S_\alpha e^{-\frac{1}{2}\phi} \\ Q_{1/2,\alpha} &= e^{\frac{1}{2}\phi} S^\beta (\gamma^\mu)_{\beta\alpha} \partial_z X_\mu \end{aligned} \tag{4.8.2}$$

を得る．これらの演算子は実際にフェルミオン部分をボソン部分に変え，またその逆を行う性質をもっていることがわかる：

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, V_F(u,k,z)\} &= V_B(\zeta^\mu = u^\beta (\gamma^\mu)_{\beta\alpha}, k, z) \\ [Q_\alpha, V_B(\zeta,k,z)] &= V_F(u^\beta = ik^\mu \zeta^\nu (\gamma_{\mu\nu}), k, z). \end{aligned} \tag{4.8.3}$$

ところが再び，いろいろなボーズ海状態をつなぐ無限個の超対称性演算子があるという問題が生じる．しかし前に与えた議論により，これに悩む必要はない．無限個の同等でないボーズ海が存在するが，その間の行列要素は同じ答を与えるからである．

4.9 まとめ

超共形場の理論の大きな長所は，NS-R と GS 模型の良い点を取り入れていることである．超共形場の理論は明白に共変的であり，自由場のみを用いており，共変的な超対称性生成子をもち，ウェイト $\frac{5}{8}$ のスピン場とウェイト1のフェルミオン頂点があり，容易に取り扱えるという利点がある．

しかし，共形場の理論には2つの欠点がある．第1に，たくさんのボソン化したゴーストに注意しておかなければならない．幸いなことに，これらのゴーストは自由場であり，異なるヒルベルト空間に作用する．第2に，無限個の「描像」がある．幸いなことに，最終的な S 行列はどの「描像」をとるかにはよらない．

共形場の理論の本質は，いろいろな場の相関関数をその変換性と短距離の振る舞いを知ることだけで計算できることである．たとえば，相関関数

$$\langle e^{ikX(w)}e^{-ikX(z)}\rangle \sim (w-z)^{-k^2}$$

は，2つの弦場の短距離の振る舞いがわかれば計算できるのである．

共形場の理論の成果の1つは，共形ウェイト1をもつフェルミオン頂点関数が構成できることである．この頂点関数はスピン場 S_α によっており，それは SO(10) ローレンツ群の下で本当のスピノールとして変換する：

$$j^{\mu\nu}(z)S_\alpha(w) \sim \frac{1}{4}\frac{1}{z-w}(\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]})_\alpha^\beta S_\beta(w)+\cdots . \tag{4.9.1}$$

場が次元 $\frac{5}{8}$ をもつことなど，他の考察により，

$$\begin{aligned}\psi^\mu(z)S_\alpha(w) &\sim \frac{1}{\sqrt{2}(z-w)^2}(\gamma^\mu)_\alpha^\beta S_\beta(z)+\cdots\\ S_\alpha(z)S^\beta(w) &\sim \frac{-1}{(z-w)^{5/4}}\delta_\alpha^\beta+\frac{1}{\sqrt{2}(z-w)^{3/4}}(\gamma_\mu)_\alpha^\beta\psi^\mu(z)\\ &\quad+\frac{1}{\sqrt{2}(z-w)^{1/4}}(\gamma^{\mu\nu})_\alpha^\beta\psi^\mu(z)\psi^\nu(z)+\cdots\end{aligned} \tag{4.9.2}$$

が求まる．このようにスピン場の短距離の振る舞いがすべてわかれば，ウェイト1をもつ頂点を構成できる．ウェイト $\frac{3}{8}$ をもつ余分の部分が必要であり，それはゴースト部分から来る：

$$S_{\rm gh}=\frac{1}{\pi}\int d^2z\,d\theta\,d\bar\theta\,B\bar{D}C+\text{c.c.} . \tag{4.9.3}$$

ここで，

$$\begin{cases}B(z)=\beta(z)+\theta b(z)\\ C(z)=c(z)+\theta\gamma(z)\end{cases} \tag{4.9.4}$$

である．さらに，ゴースト部分は

$$\beta=e^{-\phi}\partial\xi\,;\quad \gamma=e^{\phi}\eta \tag{4.9.5}$$

によりボソン化できる．さらにこれにより，質量殻条件をみたすとき共形ウェイト1をもつ頂点関数が書き下せる：

$$V_{-1/2}=u^\alpha e^{-\frac{1}{2}\phi}S_\alpha e^{ik\cdot X}. \tag{4.9.6}$$

これは共形ウェイト

$$\frac{5}{8}+\frac{3}{8}+\alpha' k^2 \tag{4.9.7}$$

をもつ．

ゴースト数 $-\frac{1}{2}$ の頂点関数と縮約できる振幅を書き下すためには $+\frac{1}{2}$ の頂点関数が必要で，それは

$$V_{1/2}=u^\alpha(k)e^{ik\cdot X}\left[e^{\frac{1}{2}\phi}(\partial X^\mu+\frac{1}{4}ik\cdot\psi\psi^\mu)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}S^\beta+\frac{1}{2}e^{3\phi/2}\eta bS_\alpha\right] \tag{4.9.8}$$

で与えられる．

こうしてこれらの2つの頂点が得られたので，多重フェルミオンの散乱振幅が構成できる．

しかしこの形式の1つの欠点は，無限個の真空と，したがって無限個の頂点関数があることである．それらの真空は，

$$e^{q\phi(0)}|0\rangle = |q\rangle \tag{4.9.9}$$

$$\text{ウェイト}：\ \frac{1}{2}\varepsilon q(q+Q) \tag{4.9.10}$$

により構成されるものである．さらにこのために，無限個のフェルミオン頂点関数が構成できる．たとえば，

$$\begin{aligned} V_{3/2} &= [Q_{\mathrm{BRST}}, \xi V_{1/2}] \\ V_{5/2} &= [Q_{\mathrm{BRST}}, \xi V_{3/2}] \\ V_{7/2} &= \cdots \end{aligned} \tag{4.9.11}$$

は，どれもウェイト1をもつよい頂点である．これではいろいろありすぎて困る．しかし少なくとも質量殻条件がみたされていれば，これらの頂点はみな互いに同等であることが示せる．したがってこれらのどれをとってもよく，それでフェルミオン・フェルミオン散乱振幅を構成できる．

この形式の大きな長所の1つは，超対称性生成子が構成できることであり，それは z について積分した頂点関数にほかならない．実は無限個の同等でない超対称性演算子があるが，どれも質量殻条件で同等になっていることがわかる：

$$\begin{aligned} Q_{-1/2,\alpha} &= S_\alpha e^{-\frac{1}{2}\phi} \\ Q_{1/2,\alpha} &= e^{\frac{1}{2}\phi} S^\beta (\gamma^\mu)_{\beta\alpha} \partial_z X_\mu, \text{等々}. \end{aligned} \tag{4.9.12}$$

最後に，共形場の理論を無限次元 Kac-Moody 代数と超共形代数に対し行列要素を計算する1つの方法と見なすことにより，統一的な全体像を得ることができる．Kac-Moody 代数は，交換関係

$$[T^i_m, T^j_n] = if^{ijl}T^l_{m+n} + km\delta^{ij}\delta_{m,-n}$$

をもつものである．ここで f は有限次元リー群の構造定数である．レベル1の simply laced の代数に対しては，Kac-Moody 代数の基本的表現が構成できる．その基本的表現は，弦理論で最初に発見された頂点演算子である．

この形式では，スピン場 S_α と NS-R 場 ψ は，SO(10) Kac-Moody のスピノールおよびベクトル表現と見なすことができ，いろいろな (b,c) および (β,γ) ゴースト，超共形代数の異なる表現であると見なせる．相関関数は，SO(10) Kac-Moody 代数と超共形代数を組み合わせたもののクレプシュ-ゴルダン係数と見なすことができるのである．

参考文献

[1] D. Friedan, in *Unified String Theories* (edited by M. B. Green and D. Gross), World Scientific, Singapore, 1986.

[2] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B247**, 83 (1984).

[3] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B241**, 333 (1984).

[4] D. Friedan, E. Martinec, and S. Shenker, *Nucl. Phys.* **B271**, 93 (1986).

[5] D. Friedan, E. Martinec, and S. Shenker, *Phys. Lett*, **160B**, 55 (1985).

[6] V. G. Knizhnik, *Phys. Lett.* **160B**, 403 (1985).

[7] S. Mandelstam, *Pnys. Rev.* **D11**, 3026 (1975).

[8] S. Coleman, *Phys. Rev.* **D11**, 2088 (1975).

[9] J. Cohn, D. Friedan, Z. Qiu, and S. Shenker, *Nucl. Phys.* **B278**, 577 (1986).

[10] V. A. Kostelecky, O. Lechtenfeld, W. Lerche, and S. Samuel, *Nucl. Phys.* **B288**, 173 (1987).

[11] V. Kac, *Functional Anal. Appl.* **1**, 328 (1967).

[12] R. V. Moody, *J. Algebra* **10**, 211 (1968).

[13] P. Goddard and D. Olive, *Int. J. Mod. Phys.* **A1**, 303 (1986).

[14] P. Goddard, W. Nahm, and D. Olive, *Phys Lett.* **160B**, 111 (1958).

[15] P. Goddard, A. kent, and D. Olive, *Comm. Math. Phys.* **103**, 105 (1986).

[16] J. Lepowsky and S. Mandelstam, in *Vertex Operators in Mathematicsand Physics*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[17] K. Bardakçi and M. B. Halpern. *Phys, Lett.* **160B**, 111 (1985).

[18] M. B. Halpern, *Phys. Rev.* **D3**, 2493 (1971).

[19] P. Goddard, W. Nahm, and D. Olive, *Phys. Lett.* **160B**, 111 (1985).

[20] P. Goddard, A. Kent, and D. Olive, *Comm. Math. Phys.* **103**, 105 (1986).

[21] V. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, Birkhauser, Boston, 1983.

[22] R. V. Moody, *Bull. Am. Math. Soc.* **73**, 217 (1974).

第5章

多重ループとタイヒミュラー空間

5.1 ユニタリー性

弦理論のもっとも面白い側面の1つは，完全に有限で，したがって通常のくりこみ理論にはよらない重力理論の可能性があることである．弦理論によって，量子重力の有限な理論の枠組みが初めて得られるかもしれない．とくに興味のもたれるのは，すべての可能な発散を相殺する機構，すなわちある種の発散を除くのに**位相的な議論**が使えることである．再び弦理論に組み込まれている対称性の強力さがわかる．たとえば発散し得る図は，ディラトン(dilaton)の放出に位相的に同等であることが示せる．したがって理論からディラトンの放出を除くことにより，明らかな発散のない理論が得られる．こうして点粒子の場の量子論では今までになかった機構により，あぶないグラフを除くことができる．

今までは，ループのない相互作用する弦の第1量子化した理論だけを展開してきた．これではもちろんユニタリーな理論はできない．すでに見たように，オイラーのベータ関数は s 平面実軸上に極はもつが，虚部やカットをもたないのでこの理論は樹木図だけを記述している．初期には共鳴状態の質量に虚部を加え，

$$A(s,t) \to \sum_J \frac{\alpha_J}{s - M_J^2 + i\Gamma_J} \tag{5.1.1}$$

のようにベータ関数を修正することが試みられたが，そうするとベータ関数のすばらしい性質がどうしても損なわれてしまうのである．

最終的に1969年に吉川，崎田，Virasoro (KSV) [1] によって模型をユニタリーにする正しい方法が考えられ，摂動論的に S 行列を定義することにして，ベータ関数をボルン項と考えてループの寄与を加えることが提案された．実際の多重ループ振幅は，Kaku, Yu, Lovelace, Alessandrini [2–8] によって計算された．(しかしKSVのユニタリー化のプログラムは，M理論を議論するときには破れてしまう．メンブレインについては相互作用する場合は言うまでもなく，自由理論でさえどのように構成したらよいのかわからない．M理論の励起状態を理解するのにDブレインは役に立つが，M理論の相互作用を完全に理解することはまだできていない.)

どのように摂動論を行うかを理解するために，$t=-\infty$ での始状態を $t=\infty$ での終状態に変換する時間発展演算子 U を考えよう．S 行列は U の行列要素である：

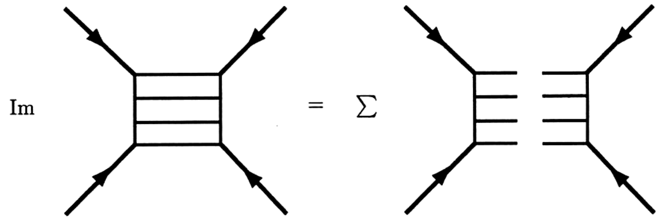


図 5.1：S 行列のユニタリー性．散乱振幅の虚部はその絶対値 2 乗に比例する．この事実を使えば低次の樹木図から高次のループが構成できる．これが吉川，崎田，Virasoro が最初に与えたユニタリー化の図式である．

$$S_{if} = \langle i|U(-\infty,\infty)|f\rangle. \tag{5.1.2}$$

時間発展演算子はユニタリーなので，S 行列自身もユニタリーになる：

$$S^\dagger S = SS^\dagger = 1. \tag{5.1.3}$$

行列の形では，これは

$$\sum_n \langle i|S|n\rangle\langle n|S^\dagger|j\rangle = \delta_{ij} \tag{5.1.4}$$

となる．ここで n は中間状態の完全系である．散乱のない状態を分離すれば T 行列が得られる：

$$S = 1 - iT. \tag{5.1.5}$$

すると，

$$i(T - T^\dagger) = TT^\dagger \tag{5.1.6}$$

となる．多重粒子の始状態 $\langle i|$ が，多重粒子の終状態 $|j\rangle$ にいく散乱の行列要素をとれば，

$$\mathrm{Im}T_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_n \langle i|T|n\rangle\langle n|T^\dagger|j\rangle \tag{5.1.7}$$

を得る（図 5.1 を見よ）．4 弦散乱振幅を $\langle i|T|k\rangle$ で表せば，明らかにいろいろな 4 点関数を組み合わせて摂動の次の次数が得られるのである．弦が 2 次元の面を掃く際に「トゥイスト」できるので，ループのファインマン図の集合は単純な平面の図よりも多い．実際図 5.2 に示したように，光学定理を用いて構成できる 3 種類の図がある．

開いた弦に対しては，相互作用は位相的に穴のあいた円板と同等な世界面を掃くことになる．さらに円板に「トゥイスト」も入れられる．（トゥイストは，2 つの穴の間に切れ線を入れ，その切れ目にそった点の方向を変えて再びつなぐことにより作れる．）3 種類の開弦の図は次のものである．

1. 平面図（planar diagram）．これは内部に N 個の穴があいていて，外線が外側の辺についている円板と位相的に同等なもの．

2. 非平面向きづけ可能な図（nonplanar orientable diagram）．これは外線が，外側の辺とともにいくつかの内部の穴にあるもの，または穴が重なっているもの．

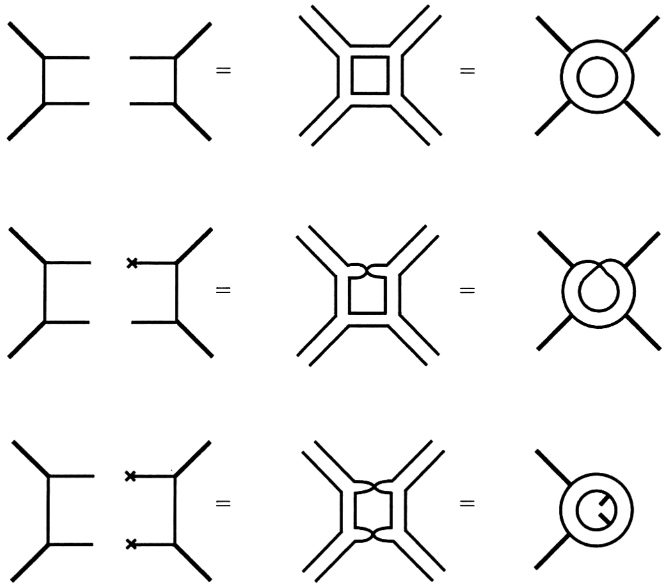


図 5.2：平面，非平面および向きづけできない 1 ループ開弦図．ユニタリー性により，3 種類のグラフをつながなければならない．（弦上の × は足のトゥイストに対応する．） 向きづけできない図はメビウスの帯に対応する．非平面の図はループの内部の境界にいくつかの外線のタキオンをつけることに対応している．

3. 向きづけ不可能な図(nonorientable diagram)．これは円板の面に奇数個のトゥイストのあるもの．メビウスの帯は向きづけ不可能な図の 1 例である．

閉じた弦に対しては，相互作用する弦の掃く樹木図は位相的に球面と同等である．そして閉じた弦から作れるループ図には 2 種類のものがある．球面に $2N$ 個の穴をあけ，各穴の円周にそった点に注意して方向をつけよう．そして穴の N 対をつないで，N 個のハンドルのある球面を作る．2 種類の図とは次のものである．

1. 平面図．これは図を作るとき，穴の各対の円周辺の方向を保持したもの．たとえばドーナツは，平面の 1 ループ図である．

2. 向きづけ不可能な図．これは穴の円周辺にそった点の対を，穴の方向を反対にしてつないだもの．たとえばクラインのつぼは向きづけ不可能な図である(図 5.3 に，平坦な 2 次元面からその境界を同一視して，どうやってクラインのつぼができるかを示してある)．(方向をもっていない I 型の弦だけに，摂動論でクラインのつぼがあることに注意しておく．II 型の弦は方向をもっており，クラインのつぼは作らない.)

すでに汎関数形式では，すべての樹木図が円板あるいは球面に対するノイマン関数を計算することにより構成されることを見た [9–11]．このノイマン関数を計算するもっとも容易な方法は，円板または球面を複素上半平面または全面に共形写像することで

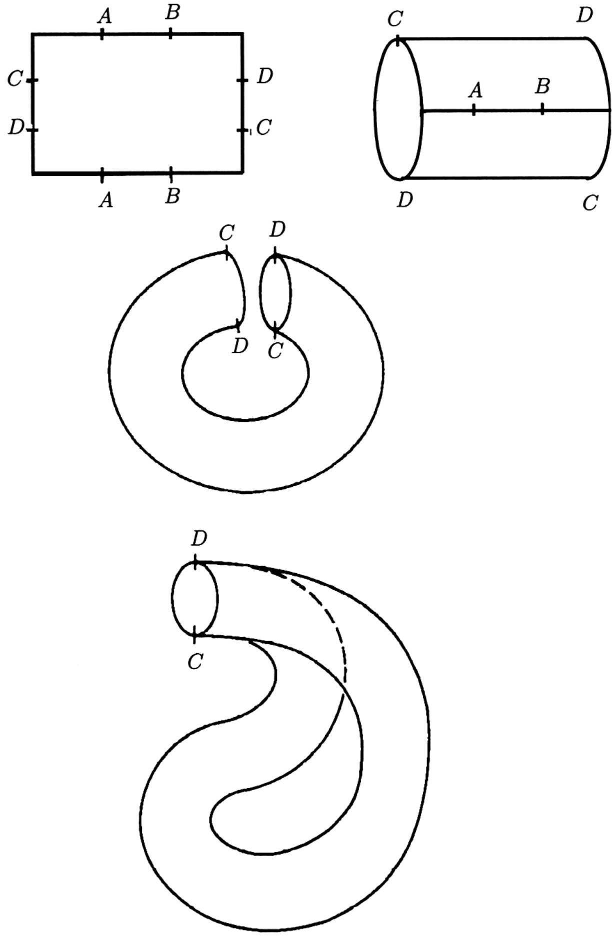


図 5.3：クラインのつぼ．長方形の対辺を同一視すれば，トーラスか（辺の方向を反対にすれば）ここに示したクラインのつぼが得られる．クラインのつぼは 1 つの側面しかない 2 次元の閉曲面である

あった．そして静電気学で開発された鏡像法を借りてきて，ノイマン関数

$$G(z, z') = \ln|z - z'| + \ln|z - \bar{z}'| \tag{5.1.8}$$

を書き下した．ここではこの議論を穴のあいたリーマン面に拡張する．幸いなことに，数学者がずっと以前に N 個の穴のあいた円板と球面のノイマン関数を書き下している．実際 Burnside [12] はこの問題を 1891 年に解いているのである！ この古典的な問題の解答は**保型関数**(automorphic function)によって与えられるので，これからそれを分析することにしよう．

5.2　1ループ振幅

まず，1ループ図に対する汎関数積分

$$A = \int_s DX\, d\mu e^{iS} \prod_{i=1}^{N} e^{ik_i X^i} \tag{5.2.1}$$

から始めよう．ここで有限の長さをもつ複素平面内の水平な帯(図5.4を見よ)について汎関数積分して，左と右の端を同一視する．こうして位相的に穴のあいた円板と同等な面が構成できる．もちろん汎関数積分は具体的に実行でき，因子

$$\exp\left[\sum k_i N(z_i, z'_j) k_j\right] \tag{5.2.2}$$

を与える．ここで N はノイマン関数である．

さて水平な帯を次の面に位相的に変形しよう．外半径 r_b と内半径 r_a と比 $w = r_b/r_a$ をもつ上半平面内の領域として定義された円環を考えよう．そして外周と内周を同一視することにする．つまり外周の面上の点 z を，同じ極座標角をもつ内周上の点と同一視するのである：

$$z \to wz. \tag{5.2.3}$$

この同一視により上半平面内に半円形の管ができる．水平な帯からこの管への共形写像は単に指数関数で与えられる．

さらに管の一端を拡げて大きな円にし他端を小さくしてやれば，管は穴のあいた円板に写像できる．この円環内のノイマン関数を構成するときには，明らかに

$$\psi(z) = \psi(wz) \tag{5.2.4}$$

という性質をもつ関数だけに興味があることになる．

もし w の任意のべきをとれば，この同一視は上半平面を無限個の同心円に分割することになる．各同心円は半径 w^n をもつ．一つの円環の外周と内周を同一視すると，無限に続く管が作れる．こうして**全上半平面を無限に続く管に分割できるが，われわれはその1つだけに興味がある．**

こうして上半平面を分割した数 w は穴のあいた円板を規定する．これを1ループ図のタイヒミュラーパラメーターと呼ぶ．このパラメーターは，N 個の穴のある面にも自然に拡張される．

一般に，任意の射影変換を用いて上半平面を分割することもできる．これはすでに見たように，実軸を実軸に写像するからである．(一般に射影変換の下で円周は円周に写像される．) **保型関数**(automorphic function)を，

$$\psi(z) = \psi(z') \tag{5.2.5}$$

の性質をもつものとして定義する．ただし，実の a, b, c, d に対し射影または $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 変換を

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) : \begin{cases} z' = \frac{az+b}{cz+d} \\ ad - bc = 1 \end{cases} \tag{5.2.6}$$

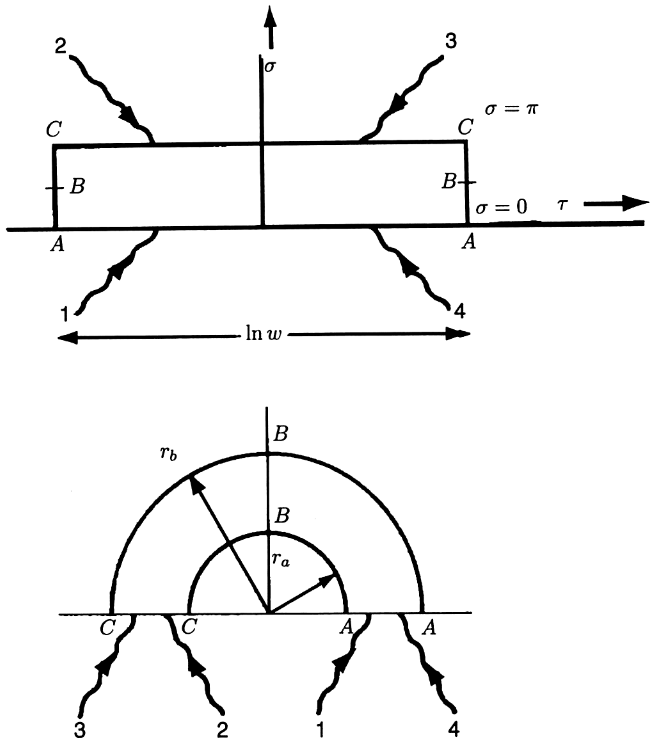


図 5.4：1 ループ開弦図の共形面．ρ 平面では，面は幅 π で任意の長さの長方形で両端を同一視したものに対応する．一定の幅をもち，いろいろな長さの長方形はすべて共形的に同等でないので，経路積分ではすべての長さについて積分しなければならない．波線は「ゼロ幅」の弦すなわちタキオンに対応し，これは上下の境界のいずれかにつけられる．z 平面では，面は半円にまげられた細い管に対応し外線は両端から出る．

とした．(場合によりこれらの関数の周期性には位相が入ることもある．)　幸いなことに，数学者がこの関数を計算してくれている．ノイマン関数は，

$$N(z,z') = \ln|\psi(z'/z,w)| + \ln|\psi(\bar{z}'/z,w)| \tag{5.2.7}$$

となる．ここで位相を除いて，関数が周期的

$$\psi(z,w) = \psi(wz,w) \tag{5.2.8}$$

であることを要求している．具体的には，この周期的関数は，

$$\begin{aligned}\ln\psi(x,w) &= \ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln x + \frac{\ln^2 x}{2\ln w} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}[\ln(1-w^n x) + \ln(1-w^n/x) - 2\ln(1-w^n)]\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

である．この関数は明らかにすでに述べた必要な周期性をもっていることに注意せよ．

こうしてノイマン関数を指数にのせたとき，被積分関数の運動量因子は，

$$\prod_n \prod_{i<j}^{N} (z_i - w^n z_j)^{k_i \cdot k_j} \tag{5.2.10}$$

のような因子を含むことになる．

この関数は Jacobi のテータ (theta) 関数で書き換えられる：

$$\psi(x, w) = -2\pi i \exp(i\pi\xi^2/\tau) \frac{\Theta_1(\xi|\tau)}{\Theta_1'(0|\tau)}. \tag{5.2.11}$$

ここで，

$$\xi = \frac{\ln x}{2\pi i}; \quad \tau = \frac{\ln w}{2\pi i} \tag{5.2.12}$$

である．

4種類の Jacobi のテータ関数があり，次で与えられる：

$$\begin{aligned}
\Theta_1(\nu|\tau) &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1/2)^2} e^{i\pi(2n-1)\nu} \\
&= 2f(q^2) q^{1/4} \sin \pi\nu \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n} \cos 2\pi\nu + q^{4n}) \\
\Theta_2(\nu|\tau) &= \Theta_1 \left(\nu + \frac{1}{2} \,\middle|\, \tau \right) \\
\Theta_3(\nu|\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2i\pi n\nu} \\
&= f(q^2) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n-1} \cos 2\pi\nu + q^{4n-2}) \\
\Theta_4(\nu|\tau) &= \Theta_3 \left(\nu + \frac{1}{2} \,\middle|\, \tau \right) = -ie^{i\pi(\nu+(1/4)\tau)} \Theta_1 \left(\nu + \frac{1}{2}\tau \,\middle|\, \tau \right).
\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

ここで，

$$f(q^2) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}); \quad q = e^{i\pi\tau} \tag{5.2.14}$$

は分配関数である．

こうして振幅は，

$$A_{\text{loop}} = \int d\mu \int d^{26}p \Delta \prod_n \prod_{i<j} (z_i - w^n z_j)^{k_i \cdot k_j}$$

となる．共形不変性を用いれば因子 Δ と $d\mu$ も決められる．しかしここで調和振動子のやり方を説明し，それにより正しい積分の測度を与えることにする．

5.3 調和振動子

平面，非平面および向きづけ不可能な1ループ図を議論するもっとも便利な形式は演算子によるものであるが，これはもちろん汎関数積分の特殊な表示にすぎない．まず複素平面 $\tau + i\sigma$ 内の帯，すなわち $\sigma = 0$ から π のすべての点の集合を考える．そして x 軸にそって外線との相互作用を入れる．前のようにこれを汎関数積分する面にとって，いたるところに中間状態の完全系

$$|X\rangle \int DX_\mu \langle X| = 1 \tag{5.3.1}$$

を入れてやれば，汎関数積分に対し

$$\cdots \int DX_1 \langle X_1|V_0|X_2\rangle \int DX_2 \langle X_2| \frac{1}{L_0 - 1} \cdots \tag{5.3.2}$$

を得る．

前のように汎関数積分のこの表式は調和振動子の基底でハミルトニアンが対角であるために得られる．帯にそったすべての中間状態で汎関数積分を行えば，演算子で表した平面の1ループ振幅

$$A_P = \int d^D p \,\mathrm{Tr}[V_0 D V_0 D \cdots V_0 D] \tag{5.3.3}$$

が得られる．

多重ループの計算では注意してゲージを選ぶことが大切である．樹木振幅に対しては(2.9.5)でゴースト状態が樹木に結合しないことを見たので，本質的に無視することができた．ところが因子化した樹木には，(2.9.9)のためにゴーストが結合するので，注意して除いておかなければゴーストがループの中を伝播する．Yang-Mills 理論を量子化するときにも同じ問題がある(Yang-Mills も弦もゲージ理論なので，これは驚くにあたらない)．

ループ振幅のゴーストを除くには3つの標準的方法がある．第1は，ヒルベルト空間からゴーストを除いてしまう射影演算子を入れるのである．しかしこの手法は少々面倒であり，フェルミオンのループにはとても困難である．第2は，Faddeev-Popov ゴースト状態が伝播するのを許し，ゴースト状態を相殺するものである．これによれば，BRST と共形場の理論を用いて高次フェルミオンループ振幅さえも計算できる．第3は，光錐ゲージを使うもので，本章ではこれを用いることにする．

光錐ゲージを選ぶ利点は計算がとても簡単になることである．ほとんどの場合，ゴースト状態は無視できるからである．

光錐ゲージをとる以外に，特別の座標系をとり多重粒子振幅の外線が，

$$k^+ = 0 \tag{5.3.4}$$

となるようにする．

(任意個数の任意スピンの外線粒子にこれを課すことには問題があることに注意せねばならない．たとえば，この運動量を保つためには外線運動量の解析接続をしなけれ

ばならないかもしれない．注意深く分析してみると，外線ボソン数が 26 より少ない場合と超対称な外線が 10 より少ない場合は，いつでもこういう系を選ぶことができることがわかる．しかし頂点関数にローレンツ回転を行って，＋成分が 0 でない系に移ることがいつでもできるので，光錐のアプローチに内在する問題点があるわけではない．光錐ゲージは運動量の＋成分が任意の値であることと矛盾はしないのである．そのため以下の議論ではこの微妙な問題は議論しないことにする.)

幸いなことに，樹木図に対して用いたコヒーレント状態の形式(2.6.18)を用いれば，このトレースは容易に求まる：

$$A_N = \int \prod_{i=1}^{N} dx_i \int d^D p\, \mathrm{Tr}[V_0(k_1, x_1) V_0(k_2, x_1 x_2) \cdots V_0(k_N, x_1 x_2 \cdots x_N) w^{L_0 - 2}]. \tag{5.3.5}$$

ここで，

$$w = x_1 x_2 \cdots x_N \tag{5.3.6}$$

である．コヒーレント状態の方法を用いて，このトレースは具体的に計算できる．恒等式

$$\mathrm{Tr}(M) = \frac{1}{\pi} \int d^2\lambda\, e^{-|\lambda|^2} \langle \lambda | M | \lambda \rangle \tag{5.3.7}$$

を用いて，異なる因子を注意して計算すれば，

$$A_N = \int d^D p \prod_{i=1}^{N} dx_i\, x_i^{(1/2) p_i^2 - 2} T \tag{5.3.8}$$

$$T = f(w)^{2-D} \prod_{i<j} \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1 - w^{m-1} c_{ij})(1 - w^m c_{ij}^{-1})}{(1 - w^m)^2} \right\}^{k_i \cdot k_j} \tag{5.3.9}$$

を得る．ここで，

$$\rho_i = x_1 x_2 \cdots x_i; \quad f(w) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - w^n); \quad c_{ij} = \rho_j / \rho_i \tag{5.3.10}$$

である．さらに，p 積分も実行できる：

$$\int d^D p \prod_{i=1}^{D} x_i^{p_i^2/2} = \left(\frac{-2\pi}{\ln w} \right)^{D/2} \prod_{1 \le i < j \le N} \left[c_{ij}^{-1/2} \exp \frac{\ln^2 c_{ij}}{2 \ln w} \right]^{k_i \cdot k_j}. \tag{5.3.11}$$

以上をまとめて，

$$A_N = \pi^{-1} \int_0^1 \prod_{i=1}^{N-1} \theta(\nu_{i+1} - \nu_i) d\nu_i \int_0^1 \frac{dq}{q^3} \left(\frac{-2\pi^2}{\ln w} \right)^N f(q^2)^{-24} \prod_{i<j} (\psi_{P,ij})^{k_i \cdot k_j} \tag{5.3.12}$$

を得る [13, 14]．ここで

$$\psi_{P,ij} = \psi(c_{ij}, w); \quad \nu_i = \ln \rho_i / \ln w; \quad q = e^{2\pi^2 / \ln w} \tag{5.3.13}$$

であり，θ 関数は単に ν_i を実軸上に順に並べているだけである．

これが平面1ループ振幅の最終結果である．この結果には，次のいろいろな特徴があることに注意しよう．

1. 経路積分の方法で予言されたように，被積分関数は保型関数である．
2. 測度は調和振動子のアプローチでは容易に求まった．(経路積分ではこの計算はもう少し難しい.)
3. 積分は $q=0$ で発散する．これは内部の穴が半径ゼロに縮むことに対応している．発散はゆるやかなもので，弦に超対称性の相棒を入れると相殺される．

将来の参考のために，平面(P)，非平面(NP)および向きづけ不可能(NO)の被積分関数を同時に定義しよう：

$$\psi_{\mathrm{P}}(x,w)=\frac{1-x}{\sqrt{x}}\exp\left(\frac{\ln^2 x}{2\ln w}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(1-w^n x)(1-w^n/x)}{(1-w^n)^2}\right\} \tag{5.3.14}$$

$$\psi_{\mathrm{NP}}(x,w)=\frac{1+x}{\sqrt{x}}\exp\left(\frac{\ln^2 x}{2\ln w}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(1-w^n x)(1+w^n/x)}{(1-w^n)^2}\right\} \tag{5.3.15}$$

$$\psi_{\mathrm{NO}}(x,w)=\frac{1-x}{\sqrt{x}}\exp\left(\frac{\ln^2 x}{2\ln w}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(1-(-w)^n x)(1-(-w)^n/x)}{(1-(-w)^n)^2}\right\}. \tag{5.3.16}$$

さらにこれらの関数は，Jacobiのテータ関数との関係がもっと明らかなように書ける：

$$\psi_{\mathrm{P}}(x,w)=\frac{-2\pi}{\ln q}\sin\pi\nu\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(1-2q^{2n}\cos 2\pi\nu+q^{4n})}{(1-q^{2n})^2}\right\} \tag{5.3.17}$$

$$\psi_{\mathrm{NO}}(x,w)=\frac{-4\pi}{\ln q}\sin\frac{1}{2}\pi\nu\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(1-2(-\sqrt{q})^n\cos\pi\nu+q^n)}{(1-(-\sqrt{q})^n)^2}\right\} \tag{5.3.18}$$

$$\psi_{\mathrm{NP}}(x,w)=-\frac{\pi}{\ln q}q^{-1/4}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(1-2q)^{2n-1}\cos 2\pi\nu+q^{4n-2})}{(1-q^{2n})^2}\right\}. \tag{5.3.19}$$

テータ関数で具体的に書けば，

$$\psi_{\mathrm{P}}(x,w)=-2\pi i\exp\left(\frac{\ln^2 x}{2\ln w}\right)\Theta_1\left(\frac{\ln x}{2\pi i}\middle|\frac{\ln w}{2\pi i}\right)\Theta_1'^{-1}\left(0\middle|\frac{\ln w}{2\pi i}\right) \tag{5.3.20}$$

$$\psi_{\mathrm{NP}}(x,w)=2\pi\exp\left(\frac{\ln^2 x}{2\ln w}\right)\Theta_2\left(\frac{\ln x}{2\pi i}\middle|\frac{\ln w}{2\pi i}\right)\Theta_1'^{-1}\left(0\middle|\frac{\ln w}{2\pi i}\right) \tag{5.3.21}$$

$$\psi_{\mathrm{NO}}(x,w)=-2\pi i\exp\left(\frac{\ln^2 x}{2\ln w}\right)\Theta_1\left(\frac{\ln x}{2\pi i}\middle|\frac{\ln w}{2\pi i}+\frac{1}{2}\right)\Theta_1'^{-1}\left(0\middle|\frac{\ln w}{2\pi i}+\frac{1}{2}\right) \tag{5.3.22}$$

となる．

以上で平面の1ループ図を計算したので，次に向きづけ不可能の1ループ関数を計

算しよう．評価したいトレースは，

$$A_{\mathrm{NO}} = \int d^D p \mathrm{Tr}(\Omega V_0 D V_0 \cdots V_0 D) \tag{5.3.23}$$

である．ここで Ω は，(2.7.13)のトゥイストの演算子である．トゥイストはこのトレースの中のどこにおいてもよく，そうしても何も変化しないことに注意せよ．トレースは同じコヒーレント状態の手法を用いて評価でき，主な変化は w が $-w$ に変わることである．したがって最終的結果は，

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{NO}} &= \int_0^1 \prod_{i=1}^{N} dx_i w^{-2} f(-w)^{-24} \left(\frac{-2\pi}{\ln w}\right)^{13} \prod_{i<j} (\psi_{\mathrm{NO},ij})^{k_i \cdot k_j} \\ &= \int_0^2 \prod_{i=1}^{N-1} \theta(\nu_{i+1} - \nu_i) d\nu_i \int_0^1 \frac{dq}{q^3} (-\ln q)^{-N} f(-q^2)^{-24} \prod_{i<j} (\phi_{\mathrm{NO},ij})^{k_i \cdot k_j} \end{aligned} \tag{5.3.24}$$

となる．積分領域がふつうの 0 から 1 の **2 倍**になっていることに注意せよ．これは外線がメビウスの帯を完全に一周するには，端を 2 回まわらなければならないからである(図 5.5 を見よ)．このことは，第 9 章でアノーマリーの相殺において重要な役割を果たす．

非平面の図も同じように評価できる．ループ上に偶数個のトゥイストを入れると外線が 2 つの種類にわかれ，外端についているものと内端についているものができることに注意する．最終的な答は，どの線が内端でどの線が外端についているかにより異なる．最初の L 番目までの線が他と分離するようにトゥイストを入れたとしよう：

$$A_{\mathrm{NP}} = \int d^D p \mathrm{Tr}(\Omega D V_1 D \cdots V_L \Omega D V_{L+1} \cdots D V_N). \tag{5.3.25}$$

この積分は実行でき，答は [15]

$$A_{\mathrm{NP}} = \int_R \prod_{i=1}^{N-1} d\nu_i \int_0^1 \frac{dq}{q^3} \left(\frac{-2\pi^2}{\ln q}\right)^N [f(q^2)]^{-24} \prod_{i<j} (\psi_{\mathrm{NP},ij} \text{ または } \psi_{\mathrm{P},ij})^{k_i \cdot k_j} \tag{5.3.26}$$

となる．ここで，i と j の線が円板の反対側にあれば ψ_{NP} を用い，同じ側にあれば ψ_{P} を用いる．ν_i の積分領域は，円板に 2 つの異なる領域があることを反映している．今は 2 つの異なる領域があることを除いては，外線は順番に積分するものとする．

便宜上 3 つの振幅をすべて同じ一般表式

$$A_J \sim \int_{R_J} \prod_{i=1}^{N-1} d\nu_i \int_0^1 \frac{dq_J}{q_J^3} \left(\frac{-2\pi^2}{\ln q_J}\right)^N f_J(q)^{-24} \prod_{i<j} (\psi_{J,ij})^{k_i \cdot k_j} \tag{5.3.27}$$

に書こう．ここで

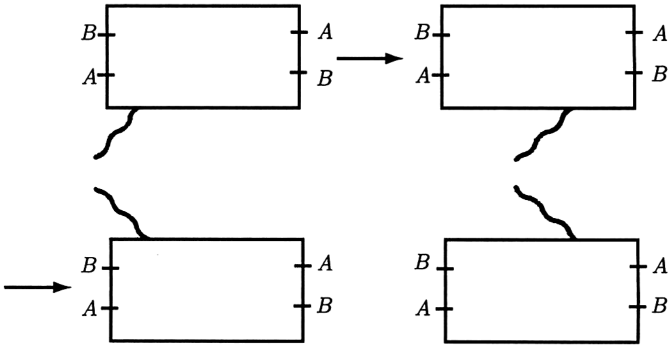


図 5.5：メビウスの帯のまわりの積分．メビウスの帯に対しては，境界を完全に一周するには，帯の長さの 2 倍まわらなければならない．したがって向きづけ不可能な帯は，平面の範囲の 2 倍の積分領域をもつ．

$$
\begin{aligned}
&J = \mathrm{P, NO, NP} \\
&R_{\mathrm{P}} = \{0 \le \nu_1 \le \cdots \le \nu_N = 1\}\,; \quad R_{\mathrm{NO}} = \{0 \le \nu_1 \le \cdots \le \nu_N = 2\} \\
&f_{\mathrm{P}}(q^2) = f_{\mathrm{NP}}(q^2); \quad f_{\mathrm{NO}}(q^2) = f(-q^2) \\
&q = q_{\mathrm{P}} = q_{\mathrm{NP}} = q_{\mathrm{NO}}^4
\end{aligned}
\tag{5.3.28}
$$

であり，積分の非平面領域は 2 つの異なる積分領域があることを反映している．

これでいろいろな開弦振幅の具体的表式を書き下したので，これらの振幅から重要な結論が引き出せる．

開いた弦から出る閉じた弦

非平面の 1 ループ図の奇妙な特徴の 1 つに，ふつうの開いた弦のチャンネルで因子化して得られる以上に極があることがある [16]．因子

$$\int_0^1 dq\, q^{-3-\frac{1}{4}s} \tag{5.3.29}$$

(ここで $\frac{1}{4}s$ の因子は，運動量に依存する被積分関数から来る)を調べてみると，$\frac{s}{4} = -2, 0, 2, 4, 6, \ldots$ に余分の極があることがわかる．これらはちょうど閉じた弦の部分の極の位置になっている．このように開いた弦は自動的に閉じた弦も含んでいるのである．これを双対図でもっとも容易に示すには，非平面図がシリンダーであって，2 組の外線がシリンダーの上下の端のまわりについていると考えるとよい．因子化によりシリンダーを水平に切ることができ，中間状態に閉じたループがあることがわかる．したがって**閉じた弦は開いた弦の「束縛状態」として現れる**のである(図 5.6 を見よ)．閉じた弦はそれだけで完全にユニタリーな理論である．ところが開いた弦はそれだけではユニタリーでない．開いた弦が存在すれば，中間状態として閉じた弦がなければな

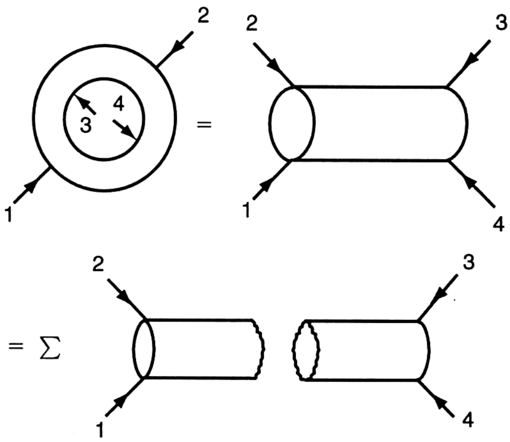


図 5.6：開いた弦から出る閉じた弦の理論．開いた弦理論の面白い点は，1 ループのレベルですでに「束縛状態」として閉じた弦理論を含むことである．開いた弦の非平面図は拡げてシリンダーにでき，それはさらに 2 つの小さなシリンダーに因子化できる．こうすると，中間状態は閉じた弦でなければならない．

らない．そうでなければ理論がユニタリーにならないのである．実際 Lovelace [17] が初めて気付いたように，非平面図の複素平面でのこの不要な特異性は，実は一般にはカットであるが(これはとてもまずいことである)，26 次元でのみ極になる．実はこれが弦模型が 26 次元でのみ矛盾がないことの最初の徴候だったのである．

スロープのくりこみ

平面図の発散は，

$$\int_0^1 \frac{dq}{q^3}; \quad \int_0^1 \frac{dq}{q} \tag{5.3.30}$$

から出てくることに注意せよ．

$q \to 0$ でのこの発散は，円板の穴がゼロに縮むことに対応している．この発散はループの中を伝播する中間状態を無限個足し上げていることから生じる．

しかしこれは通常われわれがファインマン図に結びつける紫外発散ではない．点粒子の場合いろいろな振幅の発散は，特定の図の局所的な位相を変え伝播関数が点になるときに生じる．したがってファインマン図の**発散は，グラフの局所的位相の変形に結びついたものである．**

しかし弦理論では，共形不変性のために伝播関数を点にすることはできない．したがって**世界面上の共形不変性のために，紫外発散はあり得ないのである．**しかしながら内部の穴が点に縮むための赤外発散はある．

再び共形不変性により，縮む穴を真空に消えるディラトンかタキオンに常に写像することができる．いつでもこの縮む穴を「ピンチ」して，真空に消える真空の量子数をもつ閉じた弦の共鳴状態を取り出せるのである．このように共形不変性により，弦

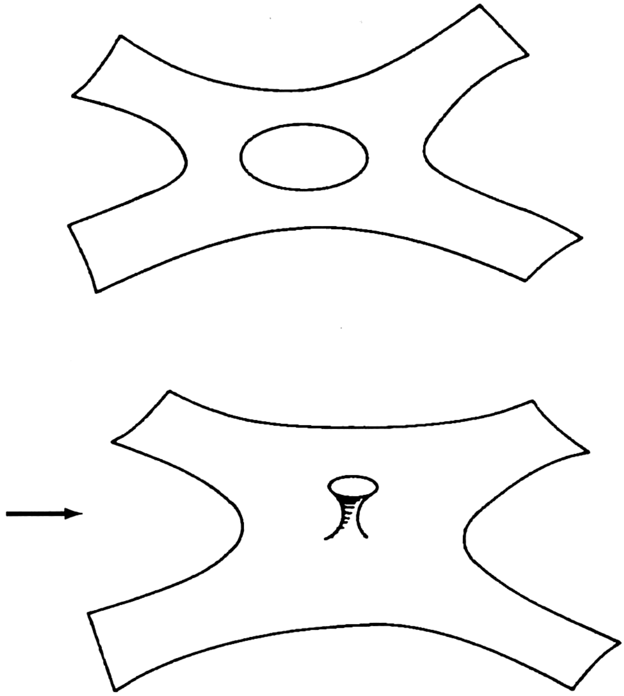


図 5.7：ディラトンの放出．共形不変性により，1 ループ開弦図を変形して内部のループをつまみ出すことができる．得られる図は，タキオンまたはディラトンが真空に放出されることに対応し赤外発散を出す．超弦理論はこれらの極が存在しないように構成されており，したがって形式的には有限である．

理論の発散のまったく新しい解釈が得られる．この新しい解釈では，各発散に穴から「つまみ」出された閉じた弦状態で運動量ゼロのものが付随している．すなわち q^{-3} の発散には真空に消えるタキオンが，q^{-1} の発散には真空に消えるディラトンが対応しているのである(図 5.7 を見よ)．

縮む穴をつまみ出して 0 運動量の閉じた弦の状態を取り出すとき，残りの図がちょうど穴のない樹木のように見えることがわかる．したがって発散する極の寄与を取り出すと，残るのは有限の樹木である．このことはさらに，任意パラメーター，すなわちレッジェスロープ α' の再定義により発散を取り扱えることを意味している．この手続きは「スロープのくりこみ」と呼ばれるもので，ディラトンの q^{-1} の極にはうまくいくが，タキオンの極の寄与 q^{-3} はどう取り扱ったらよいか明らかではない．したがってボソン的理論には完全に発散がないわけではないかもしれない．

有限の超弦

点粒子理論の超対称ループ計算の経験では，ボソンの内線がフェルミオンの内線を相殺して予想よりずっと発散の弱い振幅が得られた．同じことが超弦に対しても起こる．超弦に移って「スロープのくりこみ」[18, 19] が実際にできる場合を考える．開いた弦の I 型理論の q^{-3} の発散はそれ自身で消えること(これは理論にタキオンがないことからも期待される)を後で見る．これにより q^{-1} の極だけ残るので，スロープのくりこみができる．しかし本当にすごいのは，II 型の理論はスロープのくりこみをしないでも実は有限であることである．

5.4　1 ループ超弦振幅

1 ループ開超弦は GS か NS-R 形式のどちらでも計算できる．まず GS 形式では，満足のいく共変な定式化がないので光錐ゲージを用いなければならない．しかしこの形式は長所として，グラフが明白に時空の超対称性をもっている．一方 NS-R 形式では，ゴーストを除くために射影演算子を用いるか，BRST 形式を用いてゴーストを伝播させ負計量のゴーストと相殺させねばならない．この形では残念ながら，ボソンとフェルミオンのループの寄与を加え，各ループに GSO 射影演算子を入れて初めて超対称性が明らかとなるようになっている．

3.9 節で展開した超対称性の明白な GS 形式を用いよう．前のように質量 0 のベクトルボソンの頂点は，

$$V_B(\zeta, k, \tau) = \zeta^i B^i(\tau) : e^{ik\cdot X} : \tag{5.4.1}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned} B^i(\tau) &= P^i(\tau) + k^i R^{ij}(\tau) \\ R^{ij}(\tau) &= \frac{1}{8}\bar{S}(\tau)\gamma^{ij-} S(\tau) \\ S^a(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a e^{-in\tau} \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

で，質量 0 のボソンの偏極ベクトルを $\zeta^+ = 0$ とした．

フェルミオンの頂点は，

$$V_F(u, k, \tau) = \bar{F}(\tau) u : e^{ik\cdot X} : \tag{5.4.3}$$

である．ここで，

$$\bar{F}^a(\tau) = i(p^+)^{-1/2}\left(\bar{S}(\tau)\gamma\cdot P(\tau) - \frac{1}{3} : R^{ij}(\tau) k^i \bar{S}(\tau)\gamma^j :\right)^a \tag{5.4.4}$$

である．

外線のボソンについてのトレースを考えよう．その場合非常に簡単になることがたくさんある．たとえば S_0 演算子についてのトレースは，これらの演算子が少なくとも 8 個必要である．したがって，2 つあるいは 3 つの外線の振幅はそれ自身で 0 にな

る．その結果理論には自己エネルギーと頂点補正はまったくない．

最初に0でなくなる振幅は，4つの外線をもつものである．その場合，

$$\zeta^i k^j R_0^{ij} : e^{ik\cdot X} : \tag{5.4.5}$$

の項からの寄与以外は0になる．実際トレースへの唯一の発散する寄与は，

$$\mathrm{Tr}(w^{\sum \frac{1}{2}n\bar{S}_{-n}\gamma^- S_n}) = f(w)^8 \tag{5.4.6}$$

だけである．ところが予想通り，これはボソンループから来る別の寄与と相殺する．したがって最終的な1ループ開超弦振幅は，

$$A_{\mathrm{loop}} = K\int_0^1 \prod_{I=1}^{3}\theta(\nu_{I+1}-\nu_I)d\nu_I \int_0^1 \frac{dq}{q}\prod_{I<J}(\psi_{IJ})^{k_I\cdot k_J} \tag{5.4.7}$$

となる．ここで，K は質量をもたないボソンの外線をもつ樹木図で得たのと同じ因子(3.9.11)である．予期したように，理論には q^{-3} の発散を与えるタキオンがないので，グラフは q^{-1} のようにしか発散しない．

そこでこのグラフの無限大の部分を取り出そう．$q=0$ の近くの有限部分を注意して取り出してやることにより，ψ 関数がふつうの正弦関数に帰着することがわかるので，有限の部分 $\bar{A}$ は，

$$\bar{A}_{\mathrm{loop}} = K\int_0^1 \prod_{I=1}^{3}\theta(\nu_{I+1}-\nu_I)\prod_{I<J}[\sin\pi(\nu_J-\nu_I)]^{k_I\cdot k_J}d\nu_I \tag{5.4.8}$$

となる．次にこのグラフでスロープのくりこみができることを示すために，ν_2 と ν_3 の積分を実行しよう．今

$$x = \frac{\sin\pi(\nu_2-\nu_1)\sin\pi\nu_3}{\sin\pi(\nu_3-\nu_1)\sin\pi\nu_2} \tag{5.4.9}$$

と定義すれば，積分の結果

$$\bar{A}_{\mathrm{loop}} \sim K\int_0^1 \left(\frac{\ln x}{1-x}+\frac{\ln(1-x)}{x}\right)x^{-\alpha' s}(1-x)^{-\alpha' t}dx \tag{5.4.10}$$

を得る．これはちょうどボルン項をスロープについて微分したものであることが容易に確かめられる．こうして

$$\bar{A}_{\mathrm{loop}} \sim \frac{1}{(\alpha')^2}\frac{\partial}{\partial\alpha'}A_{\mathrm{tree}} \tag{5.4.11}$$

が得られる．したがってこの発散はスロープのくりこみに吸収できる．これが望んでいた結果で，**I 型の超弦理論はレッジェスロープの再定義により1ループでくりこみできるのである．**

次に閉じた弦の振幅の場合を考えよう．ここでは，もっと驚くべきことが起こる．

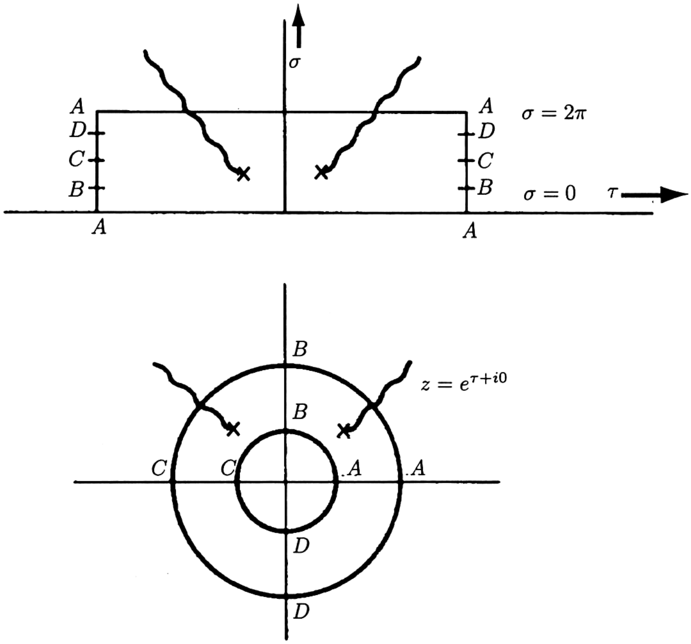


図 5.8：1 ループ閉弦図の共形面．ρ 平面では面は幅 2π で任意の長さの長方形で，反対の端が同一視されたものである．z 平面では面はドーナツに対応する．外線は面内のどの点にもつき得る．

5.5 閉じた弦のループ

閉じたボソン的弦の 1 ループ振幅を計算するのはやはり容易である．ここでは単にその違いを述べておこう．

1. 弦の世界面は開いた弦の場合は位相的に上半平面と同等であったが，閉弦の場合は全複素平面となる．

2. 伝播関数が σ の積分を含んでいて，振幅が σ 空間の原点に依存しないようになっていなければならない．

3. 頂点関数の異なる順序について和をとらねばならない．

4. 前は帯の境界だけについていた外線は，今は複素面の内部にもつく．

図 5.8 に $\sigma = 0$ から $\sigma = 2\pi$ で定義された水平な帯で，上と下の端が互いに同一視されたものを示しておいた．1 ループでは左右の端も同一視しなければならない．指数写像によりこの有限の水平の帯を全複素平面に写像することにする．

通常のコヒーレント状態の方法により，($\alpha' = \frac{1}{4}$ として)

$$A = \int d^D p \,\mathrm{Tr}(V_1 D V_2 \cdots V_N D)$$
$$= \int \prod_{i=1}^{N} d^2 z_i |w|^{-4} |f(w)|^{-48} \left(\frac{-4\pi}{\ln|w|}\right)^{13} \prod_{i<j} \chi_{ij}^{(1/2)k_i \cdot k_j} \tag{5.5.1}$$

が得られる．ここで

$$\nu_j = (2\pi i)^{-1} \ln z_1 z_2 \cdots z_j; \quad \nu_{ji} = \nu_j - \nu_i$$
$$\tau = \nu_N = (2\pi i)^{-1} \ln w \tag{5.5.2}$$
$$w = z_1 z_2 \cdots z_N; \quad c_{ji} = z_{i+1} z_{i+2} \cdots z_j$$

および

$$\chi(z, w) = \exp\left(\frac{\ln^2|z|}{2\ln|w|}\right) \left| z^{-1/2}(1-z) \prod_{m=1}^{\infty} \left\{\frac{(1-w^m z)(1-w^m/z)}{(1-w^m)^2}\right\}\right|$$
$$\chi_{ij} = \chi(c_{ji}, w) \tag{5.5.3}$$
$$= 2\pi \exp\left(\frac{-\pi(\mathrm{Im}\,\nu_{ji})^2}{\mathrm{Im}\,\tau}\right) \left|\frac{\Theta_1(\nu_{ji}|\tau)}{\Theta_1'(0|\tau)}\right|$$

である．これを

$$A = \int d^2\tau (\mathrm{Im}\,\tau)^{-2} C(\tau) F(\tau) \tag{5.5.4}$$

と書き換えよう．ここで，

$$C(\tau) = 4\left(\frac{1}{2}\mathrm{Im}\,\tau\right)^{-12} e^{4\pi\,\mathrm{Im}\,\tau} |f(e^{2\pi i\tau})|^{-48}$$
$$F(\tau) = \pi^N \mathrm{Im}\,\tau \int \prod_{i=1}^{N-1} d^2\nu_i \prod_{i<j} (\chi_{ij})^{(1/2)k_i \cdot k_j}$$

である．被積分関数が2重周期をもつこと

$$\chi(\nu+1, \tau) = \chi(\nu+\tau, \tau) = \chi(\nu, \tau) \tag{5.5.5}$$

に注意せよ．これは Θ 関数が次の性質をもつので容易にわかる：

$$\Theta_1(\nu+1|\tau) = \Theta_1(\nu|\tau)$$
$$\Theta_1(\nu+\tau|\tau) = -e^{-i\pi(2\nu+\tau)} \Theta_1(\nu|\tau). \tag{5.5.6}$$

これは ν 変数について単純に積分すると，正しい積分領域を多数回積分しすぎることを示しているので重要な関係である．そこで原点，$1, \tau$ と $1+\tau$ で作られる平行四辺形を考える．反対側辺を同一視すれば，これは位相的にはトーラスすなわちドーナツと同等になる．上の2重周期性により，複素平面が無限個のこれらの平行四辺形に分割されることに注意しよう．この1つの平行四辺形についてのみ積分するべきで，そうしないと無限回数えすぎることになる．そこで一定の τ に対し，ν 変数についての積分を制限する．ここでは次の領域を選ぼう：

$$0 \le \mathrm{Im}\,\nu_i \le \mathrm{Im}\,\tau; \quad -\frac{1}{2} \le \mathrm{Re}\,\nu_i \le \frac{1}{2}. \tag{5.5.7}$$

驚くべきことに，ν 空間をこう制限するだけでなく τ 空間も制限しなければならないことがわかる．閉じた弦のループ図の被積分関数は，実は別の変換

$$\tilde{\tau} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{5.5.8}$$

の下で不変だからである．ここで a, b, c, d はすべて**整数**で $ad - bc = 1$ である．これはいわゆる**モジュラー群**(modular group) $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ を生成する．積分が実際この変換の下で不変であることを示そう．

$$\begin{aligned} d^2\tau &\to |c\tau + d|^{-4} d^2\tau \\ \mathrm{Im}\,\tau &\to |c\tau + d|^{-2}\,\mathrm{Im}\,\tau \end{aligned} \tag{5.5.9}$$

となるので，次の量はこのモジュラー変換の下で不変になる：

$$\frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}^2\,\tau} = \frac{d^2\tilde{\tau}}{\mathrm{Im}^2\,\tilde{\tau}}. \tag{5.5.10}$$

次に，他の項がモジュラー変換の下でどのように変換するかを計算しよう：

$$e^{-\frac{\pi}{4}\,\mathrm{Im}\,\tau}|f(e^{2\pi i\tau})|^3 \to |c\tau + d|^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\pi}{4}\,\mathrm{Im}\,\tau}|f(e^{2\pi i\tau})|^3. \tag{5.5.11}$$

したがって

$$C(\tau) = C(\tilde{\tau}) \tag{5.5.12}$$

となる．最後に，

$$\chi\left(\frac{\nu}{c\tau + d}, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = |c\tau + d|^{-1}\chi(\nu, \tau) \tag{5.5.13}$$

も得られる．したがって，

$$F(\tau) = F(\tilde{\tau}) \tag{5.5.14}$$

となる．したがって被積分関数は，モジュラー変換の下で不変である．このことは Shapiro が最初に指摘した [20]．この対称性の意味は何であろうか？

Polyakov の作用によると，すべての共形的に同等でない面について積分しなければならなかった．まず τ の異なる 2 つの平行四辺形は対辺を同一視したとき共形的に同等でないことに注意する．したがって単純には τ についての積分は自動的にすべての共形的に同等でない面について積分することになると期待される．ところが実はそうではない．

実は面の 2 種類の座標のつけかえがあるので，それらを注意して区別しておかなければならない．第 1 のものは，恒等変換になめらかに変形できるパラメーターつけかえの集合である．第 2 のものは，恒等変換になめらかに変形できないパラメーターつけかえの集合である．大域的な微分同相写像(diffeomorphism)はこの種のものである．たとえば平行四辺形をとって，1 対の対辺だけを同一視する．これで管ができる．ふつうは管の両端をつないでトーラスを作る．しかし今は，管の一つの開端を 2π まわして(トゥイストして)から両端をくっつける．こうして得られる面を調べてみると，これは面に単に座標変換をしているだけであることがわかるが，恒等写像はこのように

は表せない．このトゥイストは「Dehn トゥイスト」と呼ばれ，不連続群を生成する．トーラスに対しては，Dehn トゥイストの生成する群はモジュラー群 SL$(2,\mathbb{Z})$ であることが示せる．

具体的には，積分は $\tau \to -1/\tau$ と $\tau \to \tau+1$ の下で不変である．これらの2つの変換を続けて行えば，モジュラー群全体を生成することを示すことができる．しかしこれら2つの変換の効果を注意深く分析してみると，それらは単に平行四辺形の境界を交換し，Dehn トゥイストを起こしているにすぎないことがわかる．

まとめると，モジュラー不変性(modular invariance)と呼ばれるこの第2の対称性は恒等写像になめらかにつながるパラメーターつけかえだけでなく，恒等写像につながらない大域的な微分同相写像もゲージ固定しなければならないことに由来する．こういうわけで複素 τ 平面を分割して，$\tau \to \tau+1$ と $\tau \to -1/\tau$ の変換の下で不変な1つの面についてのみ積分しなければならないのである．こうして複素 τ 平面は，無限個の同様なコピーに分割される．この無限回の数えすぎを除くために，次の積分の基本領域(fundamental region)

$$\text{基本領域} = \left\{ -\frac{1}{2} \le \mathrm{Re}\,\tau \le \frac{1}{2};\quad \mathrm{Im}\,\tau \ge 0;\quad |\tau| \ge 1 \right\} \tag{5.5.15}$$

をとることにする(図5.9を見よ)．

新しい弦のコンパクト化の無矛盾性を確かめる際に，モジュラー不変性がもっとも強力な道具の1つであることをすぐに見ることになろう．

すでに述べたように，モジュラー変換は Dehn トゥイストをする，すなわち平行四辺形の境界条件を変える．たとえば平行四辺形上で定義されている $X(\sigma_1,\sigma_2)$ という弦があれば，モジュラー変換は境界条件を，

$$X(\sigma_1,\sigma_2) \to X(a\sigma_1 + b\sigma_2, c\sigma_1 + d\sigma_2) \tag{5.5.16}$$

により変えてしまうのである．とくに $\tau \to \tau+1$ と $\tau \to -1/\tau$ の変換は，境界条件を次のように変えることが確かめられる：

$$\begin{cases} \tau \to \tau+1 \\ \tau \to -1/\tau \end{cases} \to \begin{cases} X(\sigma_1,\sigma_2) \to X(\sigma_1+\sigma_2,\sigma_2) \\ X(\sigma_1,\sigma_2) \to X(\sigma_2,-\sigma_1). \end{cases} \tag{5.5.17}$$

そこで閉じた弦の振幅の発散の構造を調べてみよう．まず $\nu \to 0$ で

$$\chi(\nu,\tau) \to 2\pi|\nu| \tag{5.5.18}$$

であることがわかる．したがって予期したように，外線が一致するとき振幅に極が出る．その極は $s=-8,0,8,16$ 等々にある．この発散は，実は(質量殻条件をみたしている)外線の自己エネルギー図に由来すると解釈できる．

次にこの計算をII型の超弦に拡張しよう．これは同じ手法により容易にできる．頂点はすべて

$$W = V\tilde{V} \tag{5.5.19}$$

という形をしている．ここで V は2種類の振動子による(運動量が半分の)開いた弦の頂点に対応している．再び S_0 モードのトレースのため，2点と3点のループは0にな

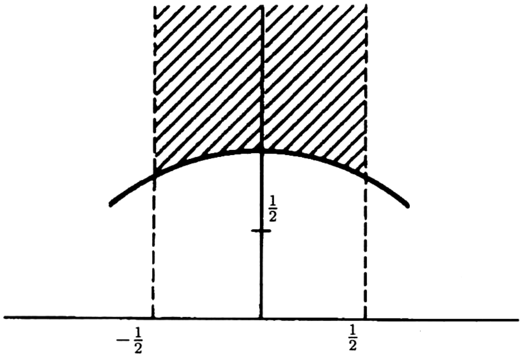


図 5.9：1 ループ閉弦振幅の基本領域．振幅のモジュラー不変性により複素平面が無限個の同等な領域に分割され，その領域の 1 つだけを選ばなければならない．そうしなければ振幅は無限大となる．もっとも便利な領域は，Re $\tau = -\frac{1}{2}$ と $+\frac{1}{2}$ の間で $\mathrm{Im}\,\tau \geq 0$ の $|\tau|$ が 1 以上のところである．

ることがわかる．このトレースは開いた弦の場合とまったく同様に計算できるが，今は振動子の数が 2 倍ある．ボソン散乱振幅の答は

$$A_{\text{loop}} = K \int_F d^2\tau (\mathrm{Im}\,\tau)^{-2} F_S(\tau) \tag{5.5.20}$$

となる．ここで，

$$F_S(\tau) = (\mathrm{Im}\,\tau)^{-3} \int \prod_{I=1}^{3} d^2\nu_I \prod_{I<J} (\chi_{IJ})^{\frac{1}{2}k_I \cdot k_J} \tag{5.5.21}$$

である．この表式には因子 $C(\tau)$ がなく，$\mathrm{Im}\,\tau$ のべきが変わっていることに注意しよう．著しい点は**この振幅は完全に有限**であることである．この有限性は次のいくつかの理由による．

1. 2 点と 3 点の振幅がないために，外線にタドポール(tadpole)[1]や自己エネルギーをつけることができない．それで前に閉じた弦にはあった極がなくなっている．

2. 発散のない基本領域をとることにより，発散をおさえられる．

3. タキオンがないので，タキオンが真空に消える寄与はない．

4. フェルミオンの内線がボソンの内線を打ち消して，グラフの発散を下げている．

5.6 多重ループ振幅

穴のあるリーマン面についての経路積分により，多重ループ振幅も具体的に書き下すことができる．これらの振幅を構成する際の主な問題点は，リーマン面のパラメー

[1] 粒子が真空へ消えるような 1 点関数のこと(図 5.7 を参照せよ)．

ターづけの選び方である．多重ループ振幅に対しては，4種類のパラメーターづけが考えられている．

1. **ショットキー群**．この節で議論する多重ループ振幅は，もともとこの形式で計算された [2–8]．リーマン面のこのパラメーターづけにはいくつかの利点がある．第1に具体的である．積分変数の取り方に当て推量はなく，正確にわかっている．実際積分変数は，リーマン面の位相的な構造に直観的に関係しているのである．第2に振幅が因子化する(この表示はもともと多重共鳴頂点関数をぬい合わせて計算したものであるため)．したがってユニタリー性を容易に示すことができる．この形式の欠点は，他の形式同様にモジュラー不変性がまったく不明な点である．そのため積分領域は手で制限しなければならない．

2. **一定曲率の計量**．次節で議論するこの形式は，一定のガウス型曲率をもつリーマン面に基づいている．この形式の長所は，Polyakov の作用を量子化すれば自然に出てくる点である．他の利点は，一定曲率のリーマン面にはたくさんの数学の文献がある点である．一方このアプローチの欠点は，ショットキー表示と同様に高次ループ振幅のモジュラー不変性が不明である点である．したがって積分領域は手で制限しなければならない．ショットキー表示と違って，一定計量の任意の面の $6N-6$ 個のモジュラーパラメーターの具体的表現があまりわかっていない．さらにこの形式は，3共鳴頂点関数をぬい合わせて得たものではないので，因子化と，したがってユニタリー性が明らかでない．

3. **テータ関数**．これはモジュラー不変性が最初から入っているので，多分もっとも自然な形式であろう．これは5.11節で議論する．この方法は，1ループ振幅に対して(5.2.11)に導入したテータ関数をいくつかの変数につき擬周期的(quasi-periodic)な関数に一般化するものである．ここでの自然な積分変数は，任意のリーマン面に対して定義できる周期行列(period matrix)Ω_{ij} である．この形式はいろいろなスピン構造をもつテータ関数を含むようにも容易に拡張できる．この形式は大変有望であり多くの研究が行われているが，いくつかの欠点もある．たとえば3ループ以上では，モジュライ空間を特徴づける方法として周期行列は極めて不便である．(3ループ以上で周期行列によりモジュライ空間を特徴づけることの困難は，「ショットキー問題」と呼ばれている．最近になって，やっと数学者はこの問題を解決した．残念ながらこの解は非常に非線形で，3ループ以上でこの形式をおしすすめるにはもっと多くの努力が必要である.) 前の形式のように，ここでも因子化(したがってユニタリー性)が不明である．高次ループのテータ関数は高度の推量と最終結果の一意性にたよって構成しており，頂点関数をぬい合わせて得たものではないからである．

4. **光錐形式**．光錐の方法では，ゴーストはなく物理的変数のみを用いているので，この形式は明白にユニタリーであり，したがってモジュライ空間を自動的に1度だけおおうことが直観的に期待される．数学者のモジュライ空間の研究で以前にこの予想が考察されたことはなかったが，最近全次数で証明された．この章の終わりで光

錐形式を簡単に論じるが，次章で弦の場の理論を展開する際にこの形式をさらに論じる．光錐形式の長所は，それが明白にユニタリーであり，因子化でき，モジュラー不変であり，容易に第2量子化できることである．欠点は，それがゲージ固定してしまっている点である．

もちろん4つの形式のすべてが最後には同等な結果を与えるはずである．

まずショットキー群を議論して，1ループの振幅を多重ループにもっとも容易に拡張できる形に書き換えることにしよう．(Θ 関数の方法は 5.11 節で論じる.) そこで群 SL(2, $\mathbb{R}$) をなす射影変換 (2.7.1) を，その幾何学的性質が明白になるように定義しよう．まず射影変換の**不動点** (lnvariant points) x_1 と x_2 をこの変換で不変な点として定義しよう：

$$\text{不動点}：\begin{cases} P(x_1) = x_1 \\ P(x_2) = x_2. \end{cases} \tag{5.6.1}$$

3つの任意パラメーターを含む任意の射影変換を，2つの不動点と**乗数** (multiplier) X によって次のように書き換えることができる：

$$P(z) = \frac{z(x_2 - Xx_1) - x_1x_2(1-X)}{z(1-X) + x_2X - x_1}. \tag{5.6.2}$$

射影変換の別の便利な形は，

$$\frac{P(z) - x_2}{P(z) - x_1} = X\frac{z - x_2}{z - x_1} \tag{5.6.3}$$

である．射影変換を乗数を用いて書くことの利点は，射影変換の積が次のように単純な乗数をもつことである：

$$\begin{aligned} (X_P)^n &= X_{(P^n)} \\ X_{PQ} &= X_{QP} \\ (X_P)^{-1} &= X_{(P)^{-1}}. \end{aligned} \tag{5.6.4}$$

射影変換の下で，どのような P も

$$P \to \begin{pmatrix} \sqrt{X} & 0 \\ 0 & \sqrt{X^{-1}} \end{pmatrix} \tag{5.6.5}$$

という形にもっていける．P のトレースは

$$\mathrm{Tr}P(z) = \sqrt{X} + \frac{1}{\sqrt{X}} \tag{5.6.6}$$

と書けることに注意する．さらに「共役類」(conjugacy class) を次のように定義する．すなわち2つの射影変換 P_1 と P_2 が同じ乗数をもつとき，同じ共役類に属するという．

この乗数の違いにより，次の4種類の射影変換を定義することができる．

1. X が実で正で1でないとき，P は双曲的 (hyperbolic) という．

2. X が実で1のとき，P は放物的 (parabolic) という．

3. $|X|$ が 1 だが X は 1 でないとき，P は楕円的(elliptic)という．

4. X が複素数で上以外のとき，P は斜航的(loxodromic)という．

実射影変換に対しては，$x_1 < x_2$ かどうかにより乗数は 1 より大か小になる．したがって射影変換がすべて双曲的で，乗数が 1 より小になるようにとる自由度がある．そして 1 ループに対しては，射影変換が

$$P(z) = wz$$
$$P(z) = \begin{pmatrix} \sqrt{w} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{w}} \end{pmatrix} \tag{5.6.7}$$

となることがわかる．したがって 1 ループの変換の乗数は，単に w そのものである．

N 個の射影変換には $3N$ 個のパラメーターがあることに注意せよ．しかし前に射影不変性のために，実軸上にそって 3 つの点をいつでも固定できることに注意した．したがって開いた弦の N ループ振幅は，面を記述する $3N-3$ 個のパラメーターをもつ．これらは**タイヒミュラーパラメーター**と呼ばれ，境界をもつ同等でないリーマン面を特徴づけるのに必要な最少のパラメーターである．閉じた弦に対しては，面が球面になり変換は複素射影変換になるので，$6N-6$ 個のパラメーターになる．これをまとめると，

$$\text{タイヒミュラーパラメーター}: \begin{cases} \text{閉じた弦}: \ 6N-6 \\ \text{開いた弦}: \ 3N-3 \end{cases} \tag{5.6.8}$$

となる．(直観的には，穴の中心を決めるのに 2 パラメーター，半径を与えるのに 1 パラメーター必要となる．したがって N 個の穴をもつ面を記述するには，$3N$ パラメーターが必要となる．これから外線を実軸上におく共形的に同等な場合を除くために，3 を引かねばならない．したがって全体で $3N-3$ パラメーターとなる．)

さて 1 ループ関数を，明白に不変な関数で書き換えよう．(5.6.4)から分配関数は，

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-w^n) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-(X_P)^n) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-X_{P^n}) \tag{5.6.9}$$

と書けることがわかる．これで分配関数は，射影変換 P^n の集合で書かれた．

次に，運動量積分は射影変換で書き換えられる．すでに，

$$d\mu \prod_{i<j}(z_i - z_j)^{k_i \cdot k_j} \Delta \tag{5.6.10}$$

の組み合わせが，運動量保存則と外線が質量殻条件をみたしている場合，射影変換のもとでうまく変換することを示しておいた．そこで 1 ループでは，不変な積分

$$d\mu \prod_{n=1, i<j}^{\infty} (z_i - w^n z_j)^{k_i \cdot k_j} \Delta = d\mu \prod_{n=1, i<j}^{\infty} (z_i' - P^n z_j')^{k_i \cdot k_j} \Delta' \tag{5.6.11}$$

と書けることを示したい．こうすると 1 ループの積分は，

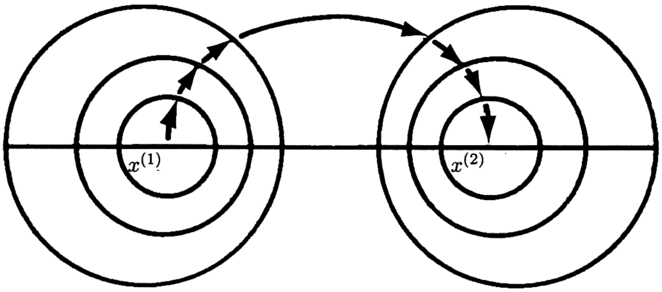


図 5.10：射影変換の作用．同じ射影変換を続けて行うと，1 つの不動点のまわりの円周は他の不動点のまわりの円周に写像される．無限回射影変換をした後では，これらの円周の 1 つ上の点は不動点にいくらでも近づく．

$$\int d\mu \prod_{\substack{n=1 \\ i<j}}^{\infty} (z_i - P^n z_j)^{k_i \cdot k_j} (1 - X_{P^n})^{-24} \Delta \tag{5.6.12}$$

と書き換えられることになる．

積分している複素平面の領域を同一視していることがここでは重要である．図 5.10 に演算子 P の作用で，複素上半平面がどのように分割されるかを示した．射影変換が円周を円周に写像することに注意せよ．したがって不動点の近くの点は，P を何度もかけた後，だんだん他の不動点へと移っていくことになる．その過程で上半平面は，共通点のない領域に分割される．これらのばらばらの領域のどれを積分領域にとってもよい．図では 2 つの不動点の中間の領域をとった．図中の矢印は，ある点が P によりどのように移っていくかを示している．すなわち面にそった点の同一視され方を示してある．外線を付け加えるとそれらは x 軸上にのみ乗っており，これらの円周の端までしか動けない．

この手続きは多重ループ振幅へも容易に拡張できる．そのとき以下のことを要求する．

1. SL(2, $\mathbb{R}$) 変換の下での射影不変性．N ループ振幅には，N 個の射影演算子があるはずである．

2. 閉弦のモジュラー不変性．パラメーター空間の 1 つの基本領域についてのみ積分する．

これらの不変性の議論だけから，ほとんど 1 通りしかない多重ループ振幅を書き下すことができるのである．

まず多重ループの発散を書き下そう．

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_N \tag{5.6.13}$$

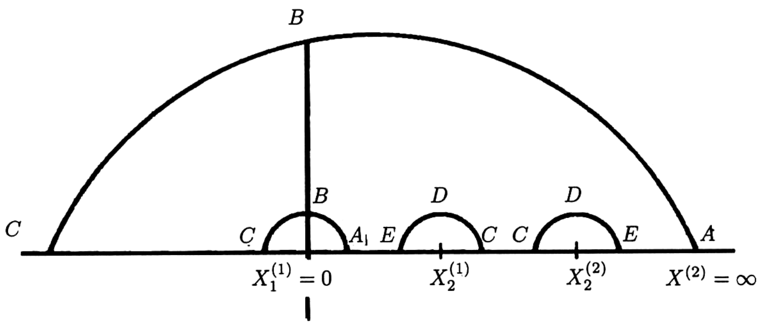


図 5.11：2 重ループ開弦図のショットキー表示．2 つの射影変換の各々に対応する実軸上の不動点が 2 組ある．不動点をかこむ円周は互いに同一視する．

を N 個の実射影変換として，その不動点が実軸上に順番に並んでいるとしよう．$\{P\}$ を，いろいろな P 変換の正あるいは負のべきの可能なすべての異なる積の集合とする．(図 5.11 に，不動点がすべて実軸上に並んでいる場合を示してある.)　この集合 $\{P\}$ は群をなす．われわれの積分領域は，$\{P\}$ の要素の間にある実軸の領域である．$\{P\}$ のすべての要素の極限点が全複素平面をみたす場合は，興味のない場合である．その場合はわれわれの変数の積分領域がないからである．

興味があるのは，極限点が実軸上の不連続な集合となるような群 $\{P\}$ である．この性質をもつ群は，ショットキー群と呼ばれる．

ここで $\{\tilde{P}\}$ を，巡回置換を除いたこれらの変換の異なる積すべてとしよう．すると N ループ振幅の発散項は，集合 $\{\tilde{P}\}$ についての積 [4, 5]

$$\prod_{\{\tilde{P}\}} (1 - X_{\{\tilde{P}\}})^{-24} \tag{5.6.14}$$

であり，運動量による項は集合 $\{P\}$ についての積

$$\prod_{i<j,\{P\}} (z_i - \{P\}\, z_j)^{k_i \cdot k_j} \tag{5.6.15}$$

で与えられる．

したがって N ループ振幅の積分は，驚くほど容易に書き下せる．ここで唯一困難なのは，射影不変性を保つように積分領域を決定することである．こうして M 個のタキオンの外線をもつ N ループ振幅の最終的な公式は [2–8]

$$A_N = \int \prod_{\alpha=1}^{N} d^{26}k_\alpha \, d\mu \prod_{\{P\}} \prod_{\{\tilde{P}\}} (1 - x_{\{\tilde{P}\}})^{-24}$$
$$\times \prod_{1=i<j=M} (z_i - \{P\}\, z_j)^{k_i \cdot k_j} \prod_{\substack{\beta,\lambda=1 \\ \beta\neq\lambda}}^{N} dX_\beta X_\beta^{-\alpha(k_\beta)-1}$$
$$\times \prod_{i=1}^{M} \left(\frac{z_i - \{P\}\, x_\lambda^{(2)}}{z_i - \{P\}\, x_\lambda^{(1)}} \right)^{k_i \cdot k_\lambda} \left\{ \frac{x_\beta^{(1)} - \{P\}\, x_\lambda^{(1)}}{x_\beta^{(2)} - \{P\}\, x_\lambda^{(1)}} \frac{x_\beta^{(2)} - \{P\} x_\lambda^{(2)}}{x_\beta^{(2)} - \{P\} x_\lambda^{(2)}} \right\}^{(1/2)k_\beta \cdot k_\lambda} \tag{5.6.16}$$

となる．ここで，

$$d\mu = \prod_{i=1}^{M} dz_i dV_{abc}^{-1} \prod_{\alpha=1}^{N} dx_\alpha^{(1)} dx_\alpha^{(2)} (x_\alpha^{(1)} - x_\alpha^{(2)})^{-2} \tag{5.6.17}$$

であり，ローマ字 i と j はタキオンの外線を表し，ギリシア文字はループ変数のみを表している．各射影変換 P_α は，2 つの不動点と乗数

$$x_\alpha^{(1)}; \quad x_\alpha^{(2)}; \quad X_\alpha \tag{5.6.18}$$

をもっている．そして $\{P\}$ についての積は，射影演算子 P_α の同等でない積すべてについてとる．(数えすぎがある積は入れない．すなわち $\{P\}$ の要素が変換 P_α で終わるような変換の積ならば，P_α の不動点に作用することは許さない．そうしないと数えすぎになるからである.)

この積分の重要なところは積分領域であって，それは**共形的に同等でない面を必らず 1 回だけ**加えるようになっていなければならない．

実軸上では射影変換をしてすべての外線が 1 つの側にまとまり，すべての不動点が別の側にまとまるように常にできる．(点 z が射影変換 P_α の不動点の左側にあれば，$P_\alpha(z)$ は z を不動点を越えて反対側に移す．したがって，射影変換を次々に行ってすべての外線を実軸の一方の側へ，すべての不動点を反対側へ押しやることができるのである.) しかし 1 点を図のまわりにぐるりとまわす射影変換の可能性を除いておくように注意しなければならない．つまり変換

$$P = \prod_{\alpha=1}^{N} P_\alpha \tag{5.6.19}$$

は，すべての不動点を起えて点を実軸上をぐるりと動かすという性質をもっている．したがって，実軸を何回もまわることにより入ってくる周期性を除いておくように注意せねばならないのである．

さて，$x^{(1)}$ と $x^{(2)}$ がこの積の不動点としよう．すると積分領域は，

$$x^{(1)} < P(z_1) < z_M < z_{M-1} < \cdots < z_1 < x_1^{(1)} < x_1^{(2)} < x_2^{(1)} < \cdots x_N^{(2)} \tag{5.6.20}$$

で，積 P を含む P_α のすべての乗数は 1 以下としたものになる．もちろんこれは特別な 1 つの取り方にすぎず，別の同等な積分領域の取り方もある．とくに異なる射影

演算子の不動点の間に，外線を入れることもできるはずである．集合 $\{P\}$ はショットキー群であるから，われわれの変数には有限の積分領域があることが保証されている．(多重ループ振幅の計算は，1970 年に主要な軌跡のゴーストを除く射影演算子を用いて計算されたことを指摘しておく．今は BRST ゴースト場を用いて，すべてのゴーストを消すように計算をやり直すこともできる．その方法でも面のノイマン関数の一意性により，同じ答が期待される．)

今までは開いた弦の多重ループ振幅だけを論じてきた．今度は前の議論を拡張して，閉じた弦に対して N 個のハンドルまたは穴をもつ球面のノイマン関数を実際に書き下そう [21].

まず $2N$ 個の穴が切り出されている複素平面を考えよう．$2N$ 個の穴の外側にあるこの領域を領域 S と呼ぶ．これらの穴の対を a サイクル，a_i と $\bar{a}_i (i = 1 \sim N)$ と呼ぼう．すでに射影変換が円周を円周に写像することを見たので，1 つの a サイクルをその相棒に写像する N 個の射影変換 P_i を考えよう (図 5.12 を見よ)：

$$P_i : a_i \to \bar{a}_i. \tag{5.6.21}$$

これらの射影変換 P_i はもちろん，2 つの不動点 $z_i^{(1)}$ と $z_i^{(2)}$ と乗数 X_i で決まる．不動点は各 a サイクルの中にあるので，穴を切り出した複素平面内にはない．一般に面 S (すべての a サイクルの外の領域) の中の点は，射影変換 P_i の作用により a サイクルの 1 つの内部に写像される．

a サイクルに加えて，a_i と $\bar{a}_i$ の間に線を入れるのに対応する b サイクルもある．したがって b サイクルは，N 個のハンドルのついた球面を考えたとき，その i 番目のハンドルをまわる円になる．ここで 1 ループ図の射影変換 $z \to wz$ は，円環の内半径を外半径に写すことに注意せよ．一般に射影変換 P_i は a サイクルの点をその相棒に写像するので，b サイクルにそった動きに対応する．

さて，V_I をいろいろな P_i のすべての異なる積としよう．i は 1 から N まで動き，I は無限個の添字を動くことに注意する．ここで関数 ψ を定義しよう：

$$\ln \psi(z, z') = \ln(z - z') + \sum_I{}' \ln \frac{(z - V_I z')(z' - V_I z)}{(z - V_I z)(z' - V_I z')}. \tag{5.6.22}$$

ここで和についているプライムは，V_I か V_I^{-1} のどちらかを含めるが，両方は入れないことを示す．ふつうはノイマン関数を

$$N(z, z') = \ln |\psi(z, z')| \tag{5.6.23}$$

と定義することになると思われる．ところが実はこの関数は，正しい性質をもっていない．z 平面でいろいろなループをまわったとき，定数を除いて不変な保型関数を定義するのが望ましい．ところが上の表式は，ノイマン関数の重要な基準であるこの周期性をもっていないのである．したがってこの関数は保型関数ではない．

これに対し 1 ループの関数はこの性質をもっていた．たとえば関数 $\ln z$ は，a サイクルをまわるとき $2\pi i$ だけ変化し，

$$\ln(z e^{2\pi i}) = \ln z + 2\pi i \tag{5.6.24}$$

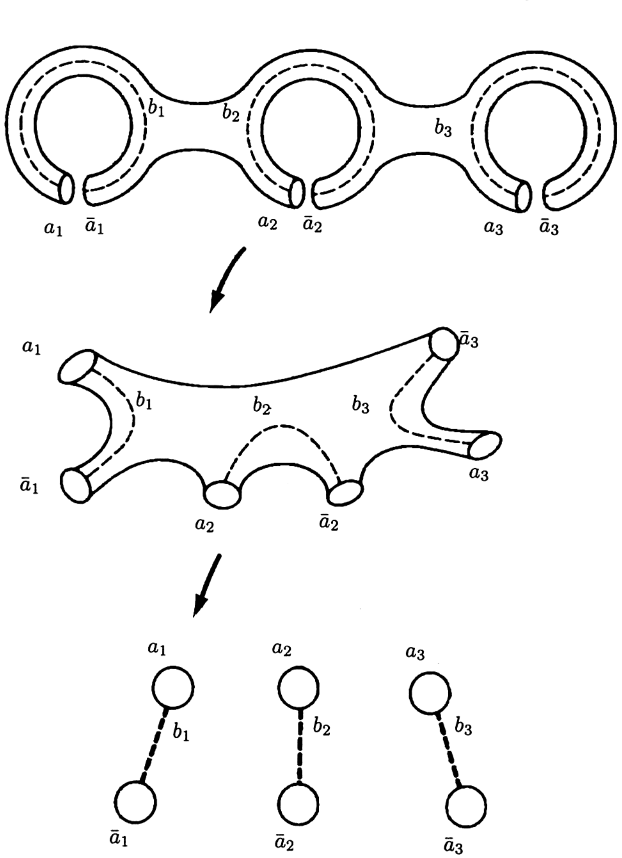


図 5.12：任意の閉じたリーマン面のホモロジーサイクル．a および b サイクルは，連続的に点に縮めることができない種数(genus) g の面上の $2g$ 個の閉曲線のことである．面を a サイクルにそって切って平坦にして，$2g$ 個の穴の切り出された平面にできる．そうすると b サイクルは穴の対をつなぐ線になり，その穴が a サイクルになっている．

b サイクルをまわるとき $\ln w$ だけ変化する：

$$\ln wz = \ln w + \ln z. \tag{5.6.25}$$

これらの因子は，関数 $\ln z$ の**周期**(period)と呼ばれる．これら 2 つの周期の比は，

$$\frac{\ln w}{2\pi i} = \tau \tag{5.6.26}$$

であり，**周期行列**(period matrix)と呼ばれる．すなわち τ **は 1 ループの周期行列である．**

このようにして 1 ループのノイマン関数全体は，a または b サイクルをまわったとき定数だけしか変化しないことが示せる．

さて，前の N ループのノイマン関数の候補は，r 番目の a サイクルをまわるときには不変であることが示せる：

$$\delta_{ar}\psi(z,z')=0. \tag{5.6.27}$$

ところが変換 $z\to P_r(z)$ をして b サイクルをまわるときは，この関数は不変でないことが示せる．すなわち，

$$\delta_{br}\ln\psi(z,z')=-v_r(z)+v_r(z')-\frac{1}{2}i\pi\tau_{rr}+\frac{1}{2}i\pi-\ln(c_rz+d_r) \tag{5.6.28}$$

なので，周期的でない．ここで，

$$v_r(z)=\sum_I^{(r)}\ln\frac{z-V_Iz_r^{(1)}}{z-V_Iz_r^{(2)}} \tag{5.6.29}$$

(和の記号の (r) は，組み合わせ $V_Iz_r^{(1,2)}$ で2重の数えすぎを避けるため，不動点 $z_r^{(1,2)}$ に作用するような P_r を除くことを意味している)であり，c と d は射影変換のもとの定義にあった因子に対応するものである．そこで関数 $v_r(z)$ をとり，z を s 番目の a または b サイクルのまわりを動かすと，

$$\begin{aligned}\delta_{as}v_r(z)&=2\pi i\delta_{rs}\\ \delta_{bs}v_r(z)&=2\pi i\tau_{rs}\end{aligned} \tag{5.6.30}$$

を得る．ここで，

$$\tau_{rs}=\frac{1}{2\pi i}\sum_I^{(rs)}\ln\frac{(z_s^{(1)}-V_Iz_r^{(1)})(z_s^{(2)}-V_Iz_r^{(2)})}{(z_s^{(1)}-V_Iz_r^{(2)})(z_s^{(2)}-V_Iz_r^{(1)})} \tag{5.6.31}$$

である．v_r を s 番目の b サイクルのまわりに動かして得たこの行列 τ_{rs} は，やはり**周期行列**と呼ばれる．これは(5.5.2)と(5.6.26)で1ループの図に対し見つけた周期行列 τ の自然な一般化となっているからである．

この一般化した周期行列を用いれば，正しい周期性をもつ完全なノイマン関数を書き下すことができる．それには ψ を

$$\ln\bar{\psi}(z,z')=\ln\psi(z,z')-\frac{1}{2\pi}\sum_{r,s}\mathrm{Re}(v_r(z)-v_r(z'))\left[(\mathrm{Im}\,\tau)^{-1}\right]_{rs}\mathrm{Re}(v_s(z)-v_s(z')) \tag{5.6.32}$$

と修正する．そうすると，ノイマン関数は，

$$N(z,z')=\ln|\bar{\psi}(z,z')| \tag{5.6.33}$$

となる．

以上をまとめれば，閉じた弦の N ループ振幅を書き下すことができる．1ループ振幅との違いは次の通りである．

1. 1ループの分配関数は，今は

$$\prod_I|1-X_I|^{-48} \tag{5.6.34}$$

となる．ここで V_I の同等でないすべての共役類の積の乗数をとる．

2. 周期行列に関係した因子 $(\ln|w|)^{-1}$ は，今はループの周期行列の行列式

$$\det|\mathrm{Im}\,\tau|_{rs} \tag{5.6.35}$$

で置き換えられる．

3. 別の因子

$$\prod_r |z_r^{(1)} - z_r^{(2)}|^{-4} \tag{5.6.36}$$

が振幅に入っている．

したがって最終的な結果は［21］

$$\begin{aligned} A_{N-\mathrm{loop}} = \int_F \prod_{rs} \frac{d^2 z_r d^2 z_s^{(1)} d^2 z_s^{(2)} d^2 X_s}{dV_{abc}} \prod_s |X_s(z_s^{(1)} - z_s^{(2)})|^{-4} \\ \times |\mathrm{Im}\,\tau|^{-13} \prod_I |1 - X_I|^{-48} \prod_{r>r'} |\bar{\psi}(z_r, z_r')|^{k_i\cdot k_j} \end{aligned} \tag{5.6.37}$$

となる．ここで，積分は N 個の穴のあいた面の基本領域 F について行う．

5.7 リーマン面とタイヒミュラー空間

前の計算によりショットキー群による多重振幅の具体的公式が得られたが，数えすぎを避けるために積分領域を制限しなければならなかった．これは南部-後藤の形式に固有の問題と思われる．というのは汎関数積分が，積分領域を一意的に決めていないからである．

しかし Polyakov の形式では，リーマン面に対する強力な定理を用いて最初から数えすぎを避ける方法がある．この形式の最大の長所の 1 つは，リーマン面の数学的研究の前世紀の成果を最大限に使えることである．とくに重要なのは，前に求めた行列式は N ループ図の特異点の構造を含んでいるものであるが，それを Selberg のゼータ関数で表せることである．

Polyakov の作用は(2.1.35)で与えられることを思い出そう：

$$L = -\frac{1}{2\pi}\int d^2 z \sqrt{g}\, g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu. \tag{5.7.1}$$

生成汎関数は，

$$Z = \sum_{\text{位相}} \int_{\text{計量}} Dg_{ab} \int_{\text{埋め込み}} DX^\mu e^{-S} \tag{5.7.2}$$

で与えられる．ここで共形変換で同等なリーマン面は割り出すように注意する．以下では閉じた弦に対する Alvarez の導出法［22］に従おう．

弦変数 X についての汎関数積分は，ガウス型なので容易に実行できる((1.7.10)を見よ)：

$$\int DX \exp\left(-\int d^2 z \sqrt{g} g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu\right) = \left(\frac{2\pi}{\int d^2 z \sqrt{g}} \det{}'(-\nabla^2)\right)^{-\frac{1}{2}D}. \tag{5.7.3}$$

ここで

$$\nabla^2 = \frac{-1}{\sqrt{g}}\partial_m\sqrt{g}g^{mn}\partial_n \tag{5.7.4}$$

で，行列式についているプライムは，ゼロモードを除くことを意味している．

前の1ループの発散を含んでいた分配関数(5.2.14)は，この行列式から出てきたものである．

ところが計量についての汎関数積分は，ゲージパラメーターがあることと，ループがあることのためにずっと複雑になる．(2.4.1)で見たように測度は2次元一般座標変換とリスケーリング

$$\delta g_{ab} = g_{ac}\partial_b\delta v^c + \partial_a\delta v^c g_{cb} - \partial_c\delta v^c g_{ab} + 2\delta\sigma g_{ab} \tag{5.7.5}$$

の下で不変である．この表式は Christoffel 記号を加えて，

$$\delta g_{ab} = \nabla_a\delta v_b + \nabla_b\delta v_a + 2\delta\sigma g_{ab} \tag{5.7.6}$$

と共変的に書き換えることができる．ここで $\delta\sigma$ はワイルリスケーリング，δv_a は2次元面のパラメーターつけかえを与える．一般にこの不変性は，g_{ab} の積分の測度が実は無限大であることを意味している．g_{ab} は3つの独立成分をもち，δv_a と $\delta\sigma$ も3つの成分をもっていることに注意しよう．したがって単純には，計量のすべての成分を平坦の場合

$$g_{ab} = \eta_{ab} \tag{5.7.7}$$

にすることができると期待される．単純には共形ゲージをとることは，ワイルリスケーリングと面上の2次元パラメーターつけかえによる無限体積についての積分を割り出すことと同等である．したがってゲージ固定とは，計量についての汎関数積分を

$$Dg_{ab} \to Dg_{ab}(\Omega_{\text{Diff}})^{-1}(\Omega_{\text{Weyl}})^{-1} \tag{5.7.8}$$

で置き換えることになる．ここで空間の無限の体積は

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{Diff}} &= \int Dv_a \\ \Omega_{\text{Weyl}} &= \int D\sigma\end{aligned} \tag{5.7.9}$$

と表される((1.6.7)を見よ)．

穴のない球面と円板に対してはこれは確かに正しい．しかし多数のループまたはハンドルをもつ面に対しては，ループのパラメーターによる問題のためにこれが正しくなくなる．

一般に N 個の穴またはハンドルをもつ球面は，各穴の位置と大きさを記述するための多数のパラメーターを必要とする．基本的には穴のある円板に対しては，各穴の半径を表すのに1パラメーター，各穴の中心の座標を与えるのにもう2つのパラメーターが要る．したがって N 個の穴を記述するのに $3N$ パラメーターが必要となる．(ハンドルのある球面に対しては，N 対の穴を記述するのに $3N$ 複素パラメーターが必要

である.） すでに見たように，全体で 3 つのパラメーターが固定できる（そしてたとえば，0, 1, 無限大における）ので，N 個の穴のある円板は

$$3N-3 \tag{5.7.10}$$

個の実パラメーターで記述できる．面が N 個のハンドルをもつ球面ならその 2 倍である．したがって高い種数（穴）をもつ面に対しては，g_{ab} は η_{ab} とはおけないのである．けれどもどんな 2 次元計量も，定曲率の計量に共形的に同等である．共形変換によりいつでも曲率を定数にできるのである．したがって積分したい計量の空間は，定曲率の計量の空間を面 M 上の微分同相写像（diffeomorphism）で割ったものということになる．**モジュライ空間**（Moduli space）とは，パラメーターつけかえ不変性に由来する数えすぎを除いたときの定曲率の計量の空間のことである：

$$\text{モジュライ空間} = \frac{M_{\text{const}}}{\text{Diff}(M)}. \tag{5.7.11}$$

しかし 5.5 節の 1 ループの議論で見たように，実は 2 種類のパラメーターつけかえ，すなわち恒等変換とつながるものとそうでないものとがある．前の等式では，面のすべての微分同相写像の集合で割っておいた．今は恒等変換につながる微分同相写像 $\text{Diff}_0(M)$ だけで割る可能性もある．こうして得られる空間は**タイヒミュラー空間**と呼ばれる：

$$\text{タイヒミュラー空間} = \frac{M_{\text{const}}}{\text{Diff}_0(M)}. \tag{5.7.12}$$

モジュライ空間とタイヒミュラー空間の関係は，もちろん必然的に非常に密接なものである．実はそれらは，**写像類群**（mapping class group）と呼ばれる不連続群の作用を除いて同等なものである：

$$\text{モジュライ空間} = \frac{\text{タイヒミュラー空間}}{\text{MCG}}. \tag{5.7.13}$$

したがって，

$$\text{MCG} = \frac{\text{Diff}(M)}{\text{Diff}_0(M)} \tag{5.7.14}$$

となる．言い換えるとタイヒミュラー空間とモジュライ空間の唯一の差は，恒等変換につながらない**大域的**な微分同相写像になっている．たとえば図 5.13 のようにトーラスを切って，切断した片方の端を 2π ひねって，再び 2 つの端をつなぐと考えよう．これは Dehn トゥイストと呼ばれる操作である．この変換は恒等変換につながらない微分同相写像を起こすことに注意せよ．これは**大域的**な微分同相写像である．このようにタイヒミュラー空間をモジュライ空間にするには，大域的な微分同相写像または Dehn トゥイストで割らねばならないので，モジュライ空間よりは「大きい」．これらの両方の空間の次元は，

$$\text{dim Teich=dim Moduli} = \begin{cases} 0, & N=0 \\ 2, & N=1 \\ 6N-6 & N\geq 2 \end{cases} \tag{5.7.15}$$

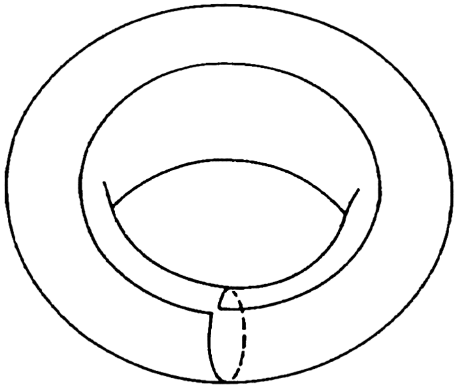


図 5.13：Dehn トゥイストの作用．トーラスを a サイクルで切って，片瑞を完全に 1 回転して再びつなぐ．もとの b サイクルが a と b サイクルの和になることに注意せよ．このトーラスからそれ自身への写像は，連続的に恒等写像にもどせない．すべての Dehn トゥイストの集合が写像類群を生成する．

で与えられる．これはもちろん，N 個の穴のある球面を記述するのに必要なパラメーターの数とちょうど同じである．したがってこの記述法は，N ループの図を決めるのに必要なパラメーターを与えてくれる．（モジュラー群と写像類群は同じものなので，この 2 つの言葉は区別せず使う．）

実際には写像類群による体積因子は簡単に取り出すことができるので，われわれの目的にはタイヒミュラー空間とモジュライ空間は本質的に同じとして取り扱ってよい．

今までは一般的に議論してきた．リーマン面の穴を記述するこれらの余分のパラメーターを実際に取り出すためには，タイヒミュラー空間の理論が必要となる．

以下の取り扱いのいくつかは少々複雑になるので，常に目的に留意しておく方がよい．それは，汎関数の測度 Dg_{ab} をパラメーター $Dv_a D\sigma$ と $3N-3$ 個のタイヒミュラーパラメーター Dt_i で書き換えることである．つまりわれわれの目標は，

$$\text{目標：}\ Dg_{ab} = \mu Dv_a\, D\sigma\, Dt_i \tag{5.7.16}$$

を示すことである．こう書ければ単に Dv_a と $D\sigma$ を割り出すことにより，座標変換とスケール不変性で入っていた無限の数えすぎをうまく除くことができる．

さて，計量テンソルの変分(5.7.6)をもっと便利な形に書き換えて，g_{ab} がタイヒミュラーパラメーター t_i の関数であることも示そう．チェイン則を用いて計量のタイヒミュラーパラメーターへの依存性を $\delta t_i\ \delta/\delta t_i$ で形式的に表すことができる：

$$\delta g_{ab} = [\nabla_a \delta v_b + \nabla_b \delta v_a - (\nabla_c \delta v^c) g_{ab}] + (\nabla_c \delta v^c) g_{ab} + 2\delta\sigma g_{ab} + \delta t^i T^i_{ab}.$$

ここで

$$T^i_{ab} = \frac{\partial g_{ab}}{\partial t^i} - (\text{トレース}) \tag{5.7.17}$$

であり，N ループの $3N-3$ 個のパラメーター（タイヒミュラーパラメーター）t^i の関

数として計量の変分を書いておいた．括弧の中でトレースを引いておいたことと，今の時点では計量がどのようにいろいろな t_i に依存するかを正確に与える必要はないことに注意せよ．

この変分は，

$$\delta g_{ab} = P_1(\delta v)_{ab} + 2\delta\sigma g_{ab} + \delta t^i T^i_{ab} \tag{5.7.18}$$

$$P_1(\delta v)_{ab} = \nabla_a \delta v_b + \nabla_b \delta v_a - g_{ab}\nabla_c \delta v^c \tag{5.7.19}$$

である．この演算子 P_1 は，タイヒミュラー空間の理論で重要な働きをするものである．これはベクトルを，トレースのない対称テンソルに写像する楕円型演算子(elliptic operator)であることに注意せよ．ここで ker P_1 が，この演算子の核(kernel)，すなわちこの演算子で 0 に写像されるベクトルの集合を表すとする．この ker P_1 は「共形キリングベクトル」の集合と呼ばれる．種数 N の面に対しては，この演算子の核の次元は，

$$\begin{aligned} N = 0 \text{ に対し} \quad & \dim \ker P_1 = 6 \\ N = 1 \text{ に対し} \quad & \dim \ker P_1 = 2 \\ N \geq 2 \text{ に対し} \quad & \dim \ker P_1 = 0 \end{aligned} \tag{5.7.20}$$

で与えられる．

また P_1 の共役を定義して，$P_1^\dagger$ と呼ぶことにする．このためにはもちろん，まず内積のとり方を定義しなければならない．そこで，

$$\|\delta g_{ab}\|^2 = \int d^2z \sqrt{g} g^{ac} g^{bd} \delta g_{ab} \delta g_{cd} \tag{5.7.21}$$

$$\|\delta v_a\|^2 = \int d^2z \sqrt{g} g_{ab} \delta v^a \delta v^b \tag{5.7.22}$$

を定義しよう．内積を定義したら，共役 $P_1^\dagger$ は $\langle a|Pb\rangle = \langle P^\dagger a|b\rangle$ により定義する．こうして，

$$P_1^\dagger(\delta g)_a = -2\nabla^b \delta g_{ab} \tag{5.7.23}$$

となる．ここで ker $P_1^\dagger$ の空間，すなわち $P_1^\dagger$ で消滅されるベクトルの空間を分析しよう．すべての量を z と $\bar{z}$ で書き換えれば，ker $P_1^\dagger$ の要素は

$$\nabla^z \delta g_{zz} = \partial_{\bar{z}} \delta g_{zz} = 0 \tag{5.7.24}$$

をみたすことになる．この $P_1^\dagger$ の核はいわゆる **2 次微分**(quadratic differentials)によって張られている．幸いなことに，リーマン面の 2 次微分の空間の次元は，

$$\begin{aligned} \text{種数 } 0 \text{ に対し} \quad & \dim \ker P_1^\dagger = 0 \\ \text{種数 } 1 \text{ に対し} \quad & \dim \ker P_1^\dagger = 2 \\ \text{種数 } N \text{ に対し} \quad & \dim \ker P_1^\dagger = 6N - 6 \end{aligned} \tag{5.7.25}$$

であることが知られている．したがって $P_1^\dagger$ の核のパラメーターの数は，N ループま

たはハンドルを記述するのに必要なタイヒミュラーパラメーターの数と等しいことがわかる．図式的には，積分の測度をその成分にわけるわけ方は，

$$\{\delta g_{ab}\} = \{\delta\sigma\} \oplus \{P_1\delta v_a\} \oplus \left\{\ker P_1^\dagger\right\} \tag{5.7.26}$$

とまとめられる．この式は結構簡単な意味をもっている．つまり g_{ab} の中の成分がディラトンの部分，トレースのない部分，隠されたタイヒミュラーパラメーターという3つの部分にわけられる．これはまたわれわれの目標(5.7.16)がほとんど達成できていることも示しているが，まだ少し微妙な問題が残っている．

ここで，変数変換を具体的に行って変換のヤコビアンを計算してみよう．まず面倒なタイヒミュラーパラメーターはないものと仮定しよう．そこで(計量のトレースのない部分である) h_{ab} と(g_{ab} のトレースである) τ から v_a と σ に変数変換を行う：

$$Dg_{ab} = \det\left[\frac{\partial(\tau,h)}{\partial(\sigma,v)}\right] D\sigma Dv_a. \tag{5.7.27}$$

ここで，

$$\det\left[\frac{\partial(\tau,h)}{\partial(\sigma,v)}\right] = \det\begin{bmatrix}1 & X\\ 0 & P_1\end{bmatrix} = \det P_1 = \left[\det P_1 P_1^\dagger\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.7.28}$$

であり，X の値は行列式から落ちるので何でもよい．

$P_1P_1^\dagger$ の行列式の平方根はまさに，共形ゲージの Faddeev-Popov 行列式であり，それはさらに BRST ゴーストで書けることに注意する．したがって(2.4.3)で最初に求めた Faddeev-Popov 行列式は

$$\det{}^{1/2} P_1 P_1^\dagger = \Delta_{\rm FP} = \int DbDc\, e^{-S_{\rm gh}} \tag{5.7.29}$$

と書くことができる．

次に，測度がタイヒミュラーパラメーター t_i に依存しているために出てくるヤコビアンの因子を計算したい．そのときの問題は，タイヒミュラーパラメーターが $P_1\delta v_a$ と直交していないために，割り出しておかなければならない**交差項**(cross term)をヤコビアンが含んでいることである．

まず ker $P_1^\dagger$ の直交基底をなす $3N-3$ 個の複素場 ψ^a の集合を導入しよう．そして因子

$$T^i_{ab} = \frac{\partial g_{ab}}{\partial t_i} - (\text{トレース}) \tag{5.7.30}$$

を次の式に分解する [22, 23]：

$$T^i = \left(1 - P_1\frac{1}{P_1^\dagger P_1}P_1^\dagger\right)T^i + P_1\frac{1}{P_1^\dagger P_1}P_1^\dagger T^i. \tag{5.7.31}$$

ここまでは何もしていない．単に同じ項を加えて引いただけである．しかし今導入した項は，別の状態に作用する演算子 P_1 を含んでいる．上の恒等式が有用なのは，これにより P_1 の方向に向いている T^i の部分をひき出すことができるからである：

$$T^i \equiv \psi^a(\psi^a, T^i) + P_1 v^i. \tag{5.7.32}$$

ここで,

$$v^i = \frac{1}{P_1^\dagger P_1} P_1^\dagger T^i \tag{5.7.33}$$

$$(\psi^a, T^i) = \int d^2z \sqrt{g}\, g^{bc} g^{de} T^i_{bd} \psi^a_{ce} \tag{5.7.34}$$

である．予期したように，ヤコビアンを書き下すときに考慮しなければならない P_1 方向に向いている T^i の部分がある．そこでこの表式を δg_{ab} の測度に入れよう：

$$\|\delta g_{ab}\|^2 = \|\delta\sigma\| + (T^i, \psi^a)(\psi_a, \psi_b)^{-1}(\psi^b, T^j)\delta t_i \delta t_j + \|P_1 \delta v_a\|^2. \tag{5.7.35}$$

こうしてようやく，タイヒミュラーパラメーターからの寄与を含むヤコビアンが得られる．ここでまた，T^i が P_1 の方向を向いている部分をもともと含んでいたことも考慮しておいた：

$$Dg_{ab} = D\sigma D v_a D t_i \det{}^{1/2}(P_1^\dagger P_1) \frac{\det(\psi_a, T^i)}{\det^{1/2}(\psi_a, \psi_b)}. \tag{5.7.36}$$

さらに，これにより全体の汎関数積分が次の形に書ける：

$$\int DX e^{-S} Dg_{ab} \Omega^{-1}_{\text{Diff}} \Omega^{-1}_{\text{Weyl}} = \int Dv_a \Omega^{-1}_{\text{Diff}} D\sigma \Omega^{-1}_{\text{Weyl}} Dt_i \det{}^{1/2}(P_1^\dagger P_1) \frac{\det(\psi^a, T^i)}{\det^{1/2}(\psi^a, \psi^b)}$$
$$\times \left(\frac{2\pi}{\int d^2z\sqrt{g}} \det{}'(-\nabla^2) \right)^{-\frac{1}{2}D}. \tag{5.7.37}$$

こうしてようやく，スケール不変性を破り得るアノーマリーの問題を除いて，目標(5.7.16)を達成できた．

この議論は長くて難しく思えるかもしれないが，最後の結果は極めて簡単である．最後の答によれば，積分の測度は Faddeev-Popov 行列式を含めて，演算子 P_1 とその共役の行列式で完全に書けている．この測度には次の 3 つの部分がある．(1) 第 1 は，Faddeev-Popov の項で $P_1 P_1^\dagger$ の行列式の平方根として書ける．(2) 第 2 は T^i を含む項で，これはモジュライパラメーター t_i が ker $P_1^\dagger$ の直交基底をなす基底ベクトル ψ^a に垂直でないために出ている．(3) 第 3 の因子はラプラシアンの行列式で，後でこれも演算子 P_1 によって書けることを示す．

しかし(5.7.37)の中のスカラーパラメーター σ についての積分を除くことはまだできていない．残念ながらいろいろな測度の項が，スケールパラメーターを含むからである．実はスケール因子は一般に測度の項から除くことはできず，共形不変性が破れてしまうことがわかる．次節でスケール不変性には共形アノーマリーと呼ばれる障害があり，これは時空の次元が 26 のときだけ除けることを示す．これにより時空の次元が決まるのである．

この過程で，すべての行列式を P_1 演算子だけで書く方法も示すことにする．

5.8 共形アノーマリー

座標変換の群の体積についての積分は,

$$\Omega_{\text{Diff}}^{-1}\int Dv_a = 1 \tag{5.8.1}$$

なので，消すことができることがわかる．

次に，ワイルリスケーリングの項も除きたい：

$$\Omega_{\text{Weyl}}^{-1}\int D\sigma = 1. \tag{5.8.2}$$

ところが σ の積分は，測度の他の因子にも σ 依存性があるためにかなり複雑である．したがって，他の因子からすべての σ による項を注意して引き出して初めて，リスケーリングの項を除くことができるのである．ワイル因子も測度から割り出すことができるが，それは時空の次元が 26 の場合だけであることが以下でわかる．共形アノーマリーの計算はかなり複雑なので，計算の要点だけを示すことにする．

まず，(T^i, ψ^a) の項はすでにワイル不変であることに注意する．これはたとえ

$$\begin{aligned}\hat{g}_{ab} &= e^{\sigma} g_{ab}\\ \hat{T}^i &= e^{\sigma} T^i\end{aligned} \tag{5.8.3}$$

とリスケーリングしても，まさに (T^i, ψ^a) の定義によりこの項が不変であることがわかるからである．(ψ 変数はワイルリスケーリングの下で不変である．)

したがって，考えなければならない唯一の項は，

$$\left\{\frac{\det' P_1^\dagger P_1}{\det(\psi^a, \psi^b)}\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{\det'(-\nabla^2)}{\int d^2z\sqrt{g}}\right\}^{-\frac{1}{2}D} \tag{5.8.4}$$

である．(プライムは，行列式のゼロモードを取り除いていることを意味する．)

幸いなことに，リーマン面に関する 2, 3 の事実を用いれば，両方の項からワイルリスケーリングのパラメーターを同時に引き出すことができる．そのやり方は，$P_1, P_1^\dagger, \nabla^2$ を同じ微分演算子によって書けるようにするのである．

2 次元リーマン面の任意のテンソルを

$$T_{abcdef\cdots}^{ijklmn\cdots} \tag{5.8.5}$$

で表すことにする．もちろんいつでもテンソルを，複素座標 z と $\bar{z}$ で書き換えることができる．この座標で，

$$K^n = \left\{T : T \to \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^n T\right\} \tag{5.8.6}$$

のように変換するすべてのテンソル T の集合を K^n と表す．(たとえば(2.7.6)と(4.1.7)を見よ．)　明らかに演算子

$$\nabla_z^q T = (g^{z\bar{z}})^q \partial_z[(g_{\bar{z}z})^q T] \tag{5.8.7}$$

は，テンソル T を別のテンソルに写像する．もっと正確には，K^q を K^{q-1} に写像するのである：

$$\nabla_z^q : K^q \to K^{q-1}. \tag{5.8.8}$$

また，反対方向に作用する演算子を定義することもできる．演算子

$$\nabla_q^z T = g^{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}} T \tag{5.8.9}$$

は，K^q を K^{q+1} に写像するのである：

$$\nabla_q^z : K^q \to K^{q+1}. \tag{5.8.10}$$

そこで，演算子

$$P_q = \begin{pmatrix} \nabla_q^z & 0 \\ 0 & \nabla_z^{-q} \end{pmatrix} \tag{5.8.11}$$

および

$$P_q^\dagger = \begin{pmatrix} -\nabla_z^{q+1} & 0 \\ 0 & -\nabla_{-q-1}^z \end{pmatrix} \tag{5.8.12}$$

を定義しよう．この表記法を用いれば，

$$-P_1^\dagger P_1 = \begin{pmatrix} \nabla_z^2 \nabla_1^z & 0 \\ 0 & \nabla_{-2}^z \nabla_z^{-1} \end{pmatrix} \tag{5.8.13}$$

を示すことができる．したがって，

$$\begin{aligned} \det P_1^\dagger P_1 &= \det(\nabla_z^2 \nabla_1^z) \det(\nabla_{-2}^z \nabla_z^{-1}) \\ &= \det \Delta_1^+ \det \Delta_{-1}^- \end{aligned} \tag{5.8.14}$$

となる．＋のラプラシアンは，－のラプラシアンの複素共役なので，

$$\det{}^{1/2} P_1^\dagger P_1 = \det \Delta_1^+ \tag{5.8.15}$$

を得る．最後に，

$$\Delta_0^+ \equiv \nabla_1^z \nabla_z^0 \tag{5.8.16}$$

も定義できる．これらの定義ができたので，行列式を

$$\left[\frac{\det' P_1^\dagger P_1}{\det(\psi^a, \psi^b)}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\det'(-\nabla^2)}{\int d^2\sigma \sqrt{g}}\right]^{-\frac{1}{2}D} = \frac{\det \Delta_1^+}{\det^{1/2}(\psi^a, \psi^b)} (\det \Delta_0^+)^{-\frac{1}{2}D} \tag{5.8.17}$$

という形に表せることがわかる．言い換えると，最初は似ていなかったヤコビアンの両方の因子が，今は同じ演算子 Δ_q^+ の $q = 1$ と $q = 0$ で表されたのである．これで後は，ワイルリスケーリングをしたときの表式の変化を計算することだけが残っている．この式は行列式の熱核関数(heat kernel)の形

$$\log \det H = -\int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{t} \mathrm{Tr}' e^{-tH} \tag{5.8.18}$$

で書いておくのが便利である．ここで ε は小さな数である．この式を用いれば，ワイルリスケーリングによる行列式の変化を表すことができる．実際の計算は非常に複雑なので，最後の結果だけを引用することにする [22–24]：

$$\delta \log \frac{\det \Delta_q^+}{\det^{1/2}(\psi^a, \psi^b)} = \frac{1 + 6q(1+q)}{12\pi} \int d^2 z \sqrt{g} R \delta\sigma. \tag{5.8.19}$$

ここで R は2次元の縮約した曲率テンソルである．ここでは $q=1$ と $q=0$ の場合にこの因子を計算する必要がある．最終的な結果は，

$$\delta \log \left[\frac{\det^{1/2} P_1^\dagger P_1}{\det^{1/2}(\psi^a, \psi^b)} \left(\frac{\det'(-\nabla^2)}{\int d^2 z \sqrt{g}} \right)^{-\frac{1}{2}D} \right] = \frac{13 - \frac{1}{2}D}{12\pi} \int d^2 z \sqrt{g} R \delta\sigma \qquad (5.8.20)$$

となる．$D=26$ の場合は共形アノーマリーが消えることに注意せよ．こうして，

$$D = 26: \quad \Omega_{\mathrm{Weyl}}^{-1} \int D\sigma = 1 \qquad (5.8.21)$$

を示すことができた．したがって汎関数の最終的結果は，

$$Z = \int Dt_i \frac{\det(\psi^a, T^i)}{\det^{1/2}(\psi^a, \psi^b)} \det\nolimits_g^{1/2} P_1^\dagger P_1 \left(\frac{\det'(-\nabla^2)}{\int d^2 z \sqrt{\hat{g}}} \right)^{-13} \qquad (5.8.22)$$

となる．ここではすべての項は，σ の項を完全に割り出した計量 $\hat{g}_{ab}$ で計算する．こうして少なくとも26次元では，(5.7.16)を達成するという目標は完了した．

こうしてこの強力な形式が得られたので，これを1ループの場合に適用してリーマン面上の新しい視点から，前の結果(5.3.12)を再導出してみる [25]．

1ループのグラフでは考える領域はドーナツである．平坦な空間の計量 $\hat{g}_{ab}$ は，C の中の格子に対応している：

$$\omega_1 \mathbb{Z} + \omega_2 \mathbb{Z}. \qquad (5.8.23)$$

ここで $\mathbb{Z}$ は整数に対応する．したがって考えている領域は，比

$$\tau = \omega_2 / \omega_1 \qquad (5.8.24)$$

と，領域が単位面積をもつように規格化するということから完全に決まる．そうすると写像類群は単に $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ であり，前のように基本領域は $(\tau = \tau_1 + i\tau_2)$

$$\begin{cases} |\tau| \geq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq \tau_1 < \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (5.8.25)$$

にとれる．また測度

$$(\det{}'^{1/2} P_1^\dagger P_1) \left(\frac{2\pi}{\int d^2 z \sqrt{g}} \det{}' \Delta_0^+ \right)^{-13} \qquad (5.8.26)$$

は，さらに簡単になる．たとえば(5.8.26)の因子は

$$\frac{1}{2} (\det{}' \Delta)^{-12} (2\pi \tau_2^{-1})^{-13} \qquad (5.8.27)$$

に等しく，

$$\det{}' \Delta = e^{-\pi \tau_2 / 3} \tau_2^2 \left| \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau}) \right|^4 \qquad (5.8.28)$$

となる．前のように不変測度は，

$$dt_i = d^2 \tau / \tau_2^2 \qquad (5.8.29)$$

と書ける．以上をすべてまとめれば，(5.5.4)と同様に，

$$Z = \int_{\text{基本領域}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\tau_2^2}(2\pi\tau_2)^{-12} e^{4\pi\tau_2} \left| \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i n\tau}) \right|^{-48} \tag{5.8.30}$$

が得られる．

5.9 超弦理論

幸いなことに，多重ループ振幅を超弦へ拡張することは，種数 g のリーマン面上にスピノールを定義することによる問題を除いては簡単である．

平行四辺形の対辺を同一視することにより構成した 2 次元 σ_1, σ_2 内のトーラスを考えよう．平行四辺形上に定義された弦 X は，周期性

$$X(\sigma_1, \sigma_2) = X(\sigma_1 + 2\pi, \sigma_2) = X(\sigma_1, \sigma_2 + 2\pi) \tag{5.9.1}$$

をみたさねばならない．ところがこの面にスピノールを加えると，いろいろな可能性が出てくる．スピノールは σ_1 と σ_2 のどちらかで，周期的 R 境界条件 $(+)$ または反周期的 NS 境界条件 $(-)$ のどちらかをみたせばよいからである．（今までは，(3.2.16) の σ 方向だけに異なる境界条件を考え τ 方向には考えなかった.） したがって境界条件の異なる組み合わせは全部で 4 通りある．トーラス上でスピノールを定義する取り方に，$(\pm, \pm)$ の可能性があるわけである．このトーラス上の 4 つの可能な取り方が，**スピン構造**(spin structure)を定義するという．

さらにモジュラー変換により，境界条件したがってスピン構造が混ざることがわかっているので，4 つのすべてが最後の振幅に寄与し得る．たとえば変換

$$(\sigma_1, \sigma_2) \to (\sigma_1 + \sigma_2, \sigma_2) \tag{5.9.2}$$

は，$(-,-)$ を $(+,-)$ に変える．同様に，変換

$$(\sigma_1, \sigma_2) \to (\sigma_2, -\sigma_1) \tag{5.9.3}$$

は，$(+,-)$ と $(-,+)$ を入れ替える．このようにモジュラー不変性は，境界条件を入れ替えるので，振幅に $(+,-)$, $(-,+)$, $(-,-)$ があることを要求する必要がある．$(+,+)$ はそれ自身で不変である．

各スピン構造の 1 ループ振幅への寄与を計算するために，4 つの可能性すべてについてハミルトニアンのトレースを計算しよう．NS と R 部分のハミルトニアンは，

$$H_{\mathrm{NS}} = \sum_{r=1/2}^{\infty} r\psi_{-r}^i \psi_r^i - \frac{1}{48} \tag{5.9.4}$$

$$H_{\mathrm{R}} = \sum_{n=1}^{\infty} n\psi_{-n}^i \psi_n^i + \frac{1}{24} \tag{5.9.5}$$

である．（$\frac{1}{24}$ は，ゼータ関数の正則化に由来する．第 10 章を見よ.） これらのハミルトニアンは，σ 方向の周期性により NS または R である．ところがこれらのハミルト

ニアンのトレースをとると，τ 方向の中間状態の完全系を挿入していることになる．τ についての経路積分は，反周期的境界条件だけを選び出してしまうので不完全である．それで和がすべての可能なスピン構造を含むように修正しなければならない．これは F をフェルミオン数として，$(-1)^F$ の因子を挿入することによりできる．最終的な振幅は，4つすべてのトレースに対し定義された振幅 $A(\pm,\pm)$ にある係数 C をかけたものの和

$$A(\tau)=\sum_{\pm}C(\pm,\pm)A(\pm,\pm) \tag{5.9.6}$$

になる．具体的には，各トレースは次のように書ける：

$$\begin{aligned}
A(-,-)&=\mathrm{Tr}\,e^{2\pi i\tau H_{\mathrm{NS}}}=[\Theta_3(0|\tau)/\eta(\tau)]^4\\
A(+,-)&=\mathrm{Tr}\,e^{2\pi i\tau H_{\mathrm{R}}}=[\Theta_2(0|\tau)/\eta(\tau)]^4\\
A(-,+)&=\mathrm{Tr}(e^{2\pi i\tau H_{\mathrm{NS}}}(-1)^F)=[\Theta_4(0|\tau)/\eta(\tau)]^4\\
A(+,+)&=\mathrm{Tr}(e^{2\pi i\tau H_{\mathrm{R}}}(-1)^F)=0.
\end{aligned} \tag{5.9.7}$$

ここで η は Dedekind のエータ関数

$$\eta(\tau)=e^{\pi i\tau/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i\tau n}) \tag{5.9.8}$$

である．最後のトレースは，それ自身で0になることに注意せよ．（最初の3つのテータ関数 $\Theta_{2,3,4}$ はすべて $z\to -z$ の下で偶であるが，Θ_1 は奇である．したがって，偶のスピン構造だけがトレースで残る．）

この意味は次の通りである．たとえば NS 部分に対しては，$(-,+)$ と $(-,-)$ の両方を含めて，そのトレースへの寄与は，

$$\mathrm{Tr}((1+(-1)^F)e^{2\pi i\tau H}) \tag{5.9.9}$$

としなければならない．ところがこれはまさに GSO 射影［26］であり，$(-1)^F$ の下で偶の状態に射影する！ したがって，NS-R 理論の超対称でない部分を除くために (3.6.12) で導入した GSO 射影演算子の新しい物理的解釈が得られたことになる．モジュラー不変性と超対称性と GSO 射影が，これほど密接に関係しているのは驚くべきことである．

外線のない（また宇宙定数の計算で現れる）真空振幅を計算するときには，4つのスピン構造の全部の寄与を加えねばならない．ところが，そうすると Jacobi の著しい結果

$$\Theta_2^4(0|\tau)+\Theta_4^4(0|\tau)-\Theta_3^4(0|\tau)=0 \tag{5.9.10}$$

が使える．これによると超弦の真空のエネルギー，すなわち宇宙定数への1ループの補正が厳密に0になる！

以上をまとめると，モジュラー不変性と GSO 射影をすることとは，閉じた超弦に対しては本質的に同じであることを証明した．境界条件を混ぜ合わせるモジュラー不変性のために最終の振幅に4つのスピン構造を全部加える必要があり，それは GSO に従いトレースに演算子 $(-1)^F$ を挿入することにちょうど対応しているのである．もと

もとGSO射影は，超対称性を得るためにNS-R超弦に課したものであった．今GSO射影が，モジュラー不変性をも保証することがわかったのである [27].

余得として，宇宙項への1ループの寄与が0になることもわかった．(しかしこれで超弦が0の宇宙定数の問題を解くことにはならない．超対称性が破れた後には，真空への寄与が0になるとは期待できないので，超対称性の破れの後でも何故宇宙定数が0になるのかは超弦も説明していないのである.)

これらのことは，超弦理論の内的な無矛盾性が非常にすばらしいものであることの確信を強めてくれる．

さて以上のことを，外線のある多重ループ振幅に拡張しよう．

幸いなことに模型のNS-R形式を用いれば，リーマン面に対して構成した手法は超弦にほとんどあてはまるのである．

(5.7.2)を拡張して相関関数は，

$$Z = \sum_{\text{位相}} \sum_{\text{スピン構造}} \int_{\text{計量}} Dg_{ab} \int_{\text{埋め込み}} DX^\mu \int D\psi^\mu \int D\chi_\alpha e^{-S} \tag{5.9.11}$$

から計算できる [28]．ここで新しく付け加わっているのは，2つの反交換するベクトル ψ と χ ついての積分と，すべてのスピン構造についての和である．

すでに(3.4.5)で，NS-Rの作用は，

$$\delta\chi_\alpha = D_\alpha \varepsilon \tag{5.9.12}$$

の下で不変であることを示した．今度はボソン的弦との類推により，2つの演算子 $P_{1/2}$ と $P_{1/2}^\dagger$ を，

$$(P_{1/2}\varepsilon)_\alpha = 2D_\alpha\varepsilon - \rho_\alpha\rho^\beta D_\beta\varepsilon \tag{5.9.13}$$

と定義しよう．モジュライについての積分に加えて，今は**超モジュライ**(supermoduli)について積分しなければならない．これは局所的超対称性変換によって除けないトレースがない χ_α の空間として定義されるものである．したがってそれらは，

$$P_{1/2}^\dagger \chi = -2D_\alpha\chi^\alpha = 0 \tag{5.9.14}$$

をみたす．種数が N の面に対しては，超モジュライ空間の次元は ker $P_{1/2}^\dagger$ の次元である：

$$\dim \ker P_{1/2}^\dagger : \begin{cases} N = 0 \text{ なら } 0 \\ N = 1 \text{ (周期的–周期的) なら} 2 \\ N = 1 \text{ (その他) なら } 0 \\ N \geq 2 \text{ なら } 4N-4. \end{cases} \tag{5.9.15}$$

(ここで周期的–周期的は，NS-R場の境界条件を表す.) 次に，

$$Dg_{ab}\, D\chi_\alpha \tag{5.9.16}$$

のヤコビアンを構成しよう．フェルミオン場のヤコビアンは前のように計算できて

$$D\chi_\alpha = (\det \hat{P}^\dagger_{1/2}\hat{P}_{1/2})^{-1/2} e^{-(11/2)S(\sigma)} D\zeta\, D\lambda \prod_{i=1}^{4N-4} da_i \tag{5.9.17}$$

となる．ここで a_i は超モジュライであり，タイヒミュラーパラメーターに相当する．またフェルミオン的 λ と ζ についての積分は，超対称性と超ワイル変換のためにある余分の積分である．そこで，

$$S = \frac{1}{48\pi}\int d^2z\sqrt{\hat{g}}(\hat{g}^{ab}\partial_a\sigma\partial_b\sigma - \frac{1}{2}i\lambda\gamma^\alpha\hat{D}_\alpha\lambda + \mu^2(e^\sigma - 1) + 2^{-3/2}\mu\lambda\lambda e^{\sigma/2} + \frac{1}{2}R_{\hat{g}}\sigma) \tag{5.9.18}$$

と定義する．ここで R は曲率である．以上をまとめれば，

$$\begin{aligned} &Dg_{ab}D\chi_\alpha \\ &= (\det{}^{1/2}\hat{P}^\dagger_1\hat{P}_1)(\det{}^{-1/2}\hat{P}^\dagger_{1/2}\hat{P}_{1/2})e^{-15S}D\sigma\, D\,v_a\, D\lambda\, D\zeta \prod_{i=1}^{4N-4} Da_i \prod_{j=1}^{6N-6} Dt_j \end{aligned} \tag{5.9.19}$$

を得る．$D\sigma, Dv_a, D\lambda, D\zeta$ を割り出すことにより，超弦の作用の対称性のために存在する無限の数えすぎを落とすことができる．しかし実際には，モジュライを具体的に書くことは，とくに3ループ以上ではとても困難である．さらに残念なことに，超モジュライの性質はあまりわかっていない．多重振幅をちゃんと理解する上での主な障害となっているのが，これらの点，すなわち種数 g のリーマン面上のモジュラーおよび超モジュラー不変性と矛盾しない座標の取り方である．

5.10　行列式と特異性

リーマン面の方法の利点は，少なくとも形式的には N ループ振幅の一般的特異性の構造に対する結果を得られることである．N ループ振幅の特異性を含む行列式は，Selberg のゼータ関数であることがわかっているのである．

すでに射影変換が自然に共役類にわかれることを見た．すなわち2つの射影変換が同じ乗数をもてば，同じ共役類にあるという．したがって，同じ共役類のどんな2つの要素も射影変換によって，

$$z \to e^l z \tag{5.10.1}$$

という形にもっていける．l の値はときどき，閉じた測地線の「長さ」と呼ばれる．z と z' が複素平面内の2つの点を表すとしよう．そしてこれら2つの点の間の「距離」を

$$d(z, z') = 1 + \frac{|z - z'|^2}{2\mathrm{Im}\, z\, \mathrm{Im}\, z'} \tag{5.10.2}$$

と定義する．2点間の「距離」のこの定義は，同じ共役類のすべての要素に対して同じであるという利点をもっている．

1ループの例から乗数 w をかけることにより，b サイクルにそって動くことを見た．位相的には，これはリーマン面上の閉じた測地線を動くことになっている．したがって l は面上の単純な閉じた測地線の長さになっている．ある変換が射影変換の集合の

他のどの要素の(2以上の)べきでもないとき，それをプリミティブ(primitive)という．したがってわれわれの興味のあるのはプリミティブな測地線の集合である．Selberg のゼータ関数［23］を，

$$Z_\nu(s) = \prod_{l\ \text{プリミティブ}} \prod_{p=0}^{\infty} [1 - \nu(\gamma) e^{-(s+p)l}] \tag{5.10.3}$$

で定義する．ここで面上の閉じたプリミティブな測地線 γ の長さについての積をとっており，ボソンに対しては $\nu(\gamma) = 1$，フェルミオンに対してはスピン構造により $\nu(\gamma) = \pm 1$ である．

すばらしいことに，多重ループの計算で前に得たいろいろな行列式を Selberg のゼータ関数で書けることがわかる［28］：

$$\begin{aligned} \det{}'\Delta_0^+ &= Z'(1) e^{-c_0 \chi(M)} \\ \det\Delta_1^+ &= Z'(2) e^{-c_1 \chi(M)}. \end{aligned} \tag{5.10.4}$$

フェルミオンの行列式も次のように表せる：

$$\begin{aligned} (\det \hat{P}_{1/2}^\dagger \hat{P}_{1/2})_\nu^{1/2} &= e^{-c_{(1/2)}\chi(M)} Z_\nu \left(\frac{3}{2}\right) \\ (\det{}'\gamma^\alpha D_\alpha \gamma^\beta D_\beta)_\nu^{1/2} &= \frac{e^{-c_{(1/2)}\chi(M)}}{(2p)!} Z_\nu^{(2p)} \left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{5.10.5}$$

ここで，χ はオイラー数(p は $\gamma^\alpha D_\alpha$ のゼロモードの数)である．定数 c は，

$$\begin{aligned} 2c_n = &\sum_{0 \le m < |n| - \frac{1}{2}} (2|n| - 2m - 1) \log(2|n| - m) \\ &- \left(|n| + \frac{1}{2}\right)^2 + (n - [n])^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log 2\pi + 2\zeta'(-1) \end{aligned} \tag{5.10.6}$$

で与えられる．こうして1つの関数の構造を調べることにより，N ループ超弦の特異性の構造が得られるのである！

数学的には Selberg のゼータ関数は，リーマン面が位相的に縮退しなければ特異性をもたないことが知られている．たとえば，プリミティブな測地線の長さが0に近づくと発散することがわかる．これは，球面のハンドルの1つの「首」が無限大に拡がるのに対応している．プリミティブな測地線の長さの1つが0に行くときの Selberg のゼータ関数を注意深く分析すると，

$$\det{}^{1/2} P_1^\dagger P_1 \left(\frac{\det{}'(-\Delta_0^+)}{\int d^2 z \sqrt{g}}\right)^{-13} \sim l^{-2} e^{4\pi^2/l} \tag{5.10.7}$$

が得られる．これはタキオンが真空へ消えることに対応する極を表している．

知られている数学の Selberg のゼータ関数を用いて多重ループ振幅の特異性を分離できることは，弦の摂動論の直面する主な問題，すなわち全次数で有限性を厳密に証明することに向けての大きな一歩である．形式的には，モジュライの積分がリーマン面の位相を変える，すなわち2つの穴が離れ長いがちょうの首のようになるときに多

重ループ振幅の発散が生じることを示せる．しかしながら，これらの発散の相殺の問題に関係した数多くの扱いにくい点があって，それらは今の所完全に解決していない．簡単に調べてみた範囲では良い結果が得られているが，発散が相殺することの厳密な証明はまだ未解決の問題である．

5.11　モジュライ空間とグラスマニアン

多重ループ振幅の数学的構造を明らかにする点には非常に大きな進歩があったが，確かな結果はある意味で失望的なものである．今をさかのぼること1970年には具体的な計算により，多重ループ振幅の発散がリーマン面の位相の変形に対応することはすでに知られていた [4, 5]．けれども今までのところ，われわれの導入した高級な数学的手法は重要な問題に答えていない．理論が全次数で有限であることを厳密に証明できるのだろうか？ もしそうなら，どうやって摂動級数をたし上げるのか？ どうやって理論から非摂動的情報を引き出すのか？ 理論の発散がSelbergのゼータ関数で書けることがわかった [23, 29–32] ことは重要な結果ではあるが，これらの謎はまだ解決していない．まとめると，進歩したのは数学的分野であって物理ではない．

ここで少なくとも2つの態度を取り得よう．摂動級数はあきらめて，非摂動効果の取り出せる**弦の場の理論**へ直接進むこともできよう．これはふつうの点粒子の理論でとられる伝統的手法で，以下の章の主題である．あるいはモジュラー不変性のような何らかの対称性を考えることにより，任意の種数のリーマン面すべてについての和をとることを試みることもできよう．

ふつうの点粒子のファインマン図では，第2の方法は多分不可能であろう．対称性があまりに小さく，ファインマン図はグラフであって多様体でないからである．しかし弦理論のファインマン級数は，多様体つまりリーマン面についての和であり，モジュラー不変性が重要な役割りを果たしている．したがって**摂動級数全体**が，数学的に取り扱えるということはあり得る．これがFriedanとShenkerのアプローチ [33] で，彼らは無限の種数を含むすべてのリーマン面の「普遍モジュライ空間」(universal moduli space)の性質を調べることを提唱している．

このプログラムはあまりに野心的であり複雑なため，意味のある結果は出せなかった．ところが2つの発展により，このアプローチにはずみがついた．

1. まずBelavinとKnizhnik [34] は，多重ループボソン振幅の測度が単にある正則(holomorphic)な $(3g-3)$ 形式の絶対値であることを示した．これは「正則因子化」(holomorphic factorization)と呼ばれている．これにより原理的には，視察により多重ループの測度が書けることになった！ しかし実際には，3ループより上では周期行列のパラメーターを決めるのに問題がある．これは「ショットキー問題」と呼ばれている．正則因子化により，2と3ループの測度はほとんど自明になったが，ショットキー問題のために多重ループの測度を容易に書き下すことはできない．

2. 1984年に，数学者はショットキー問題をついに解決した．したがって正則因子化を利用するための主な障害は除かれたと思われる．しかもショットキー問題を

解くことにより，さらに強力な道具が得られた．これにより「グラスマニアン」(Grassmannian) Gr と呼ばれる無限次元の空間を記述でき，その中では種数 g のすべてのリーマン面が1つの点として取り扱われる [35–37]．したがってグラスマニアンの中の点の性質を調べることにより，すべての摂動図の集合を同時に取り扱えるかもしれない．

(グラスマニアンは，全摂動級数を全体として取り扱う概念的な枠組みを与えるものであるが，全級数の和をどのようにとるかはまだわかっていない．たとえば位相空間は，粒子のすべての可能な位置と運動量の集合を一連の点に帰着している．このように原理的には，位相空間は宇宙の中のすべての粒子のすべての可能な運動を含んでいるわけである．しかしこれは何でも言うようで何も言わないのと同じである．位相空間から意味のある結果を引き出すためには，やはり運動方程式と境界条件を課さねばならないからである．同じことがグラスマニアンにもあてはまる.)

この野心的な試みでは，種数 g のリーマン面のモジュラー変換を十分利用しなければならない．とくに重要なのは写像類群 MCG で，これはトーラスに対してはモジュラー群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ になる．ここで必要なことは，任意の種数に対して写像類群を調べる方法である．その鍵は任意の種数のリーマン面上で定義された Θ 関数を作ることであろう．これは 5.6 節で調べたショットキーの方法と対比をなしている．そこでは，モジュラー変換はあまり明らかでなかったからである．

図 5.12 に，任意の閉じたリーマン面に対して a サイクルと b サイクルを書いた．これを「正準ホモロジー基底」(canomial homology basis) と呼ぶ．反対称な記号 (a,b) が，2つのサイクルが交差するかどうかを表すとしよう．もし交差しなければそれは 0 で，交差すれば ± 1 に等しいとする．たとえばトーラスの場合は，a と b サイクルしかない．a と b サイクルは交差するので (a,b) は 1 に等しいが，(a,a) は 0 に等しいことに注意する．こうするとトーラスの可能な 4 つの組み合わせにより，行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} (a,a) = (b,b) = 0 \\ (a,b) = -(b,a) = 1 \end{cases} \tag{5.11.1}$$

ができる．写像類群の要素は，この交差行列 (intersection matrix) を変えない．ところが定義により，この行列を不変にする群は $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ であることがわかっている (付録を見よ)．$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ の要素を記述するには，面を a サイクルにそって切り，切り口を 2π まわし，再び面をつなぐことによって作られる Dehn トゥイスト D_a を考えればよい．この Dehn トゥイストの下で，b サイクルは a サイクルと b サイクルの和になる (図 5.13 を見よ)．したがって，

$$D_a(a) = a; \quad D_a(b) = a + b \tag{5.11.2}$$

次にこれを行列の言葉で表す．Dehn トゥイストが，列ベクトル $[a,b]$ に作用するとする．すると Dehn トゥイストは，記号的に

$$D_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad D_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.11.3}$$

と表されることになる.

同様に2ループの面の写像類群は, a_1, a_2, b_1, b_2 にそったDehnトゥイストと, 2つの穴をまわる円周であるサイクル $a_1^{-1}a_2$ にそったDehnトゥイストをとって記述できる. 同じやり方で, 列ベクトル $[a_1, b_1, a_2, b_2]$ に作用するDehnトゥイストが,

$$D_{a_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D_{b_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D_{a_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{b_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D_{a_1^{-1}a_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.11.4}$$

と表されることが示せる [38].

そこで任意の種数の閉じたリーマン面を取り扱おう. 交差行列は,

$$\begin{cases} (a_i, a_j) = (b_i, b_j) = 0 \\ (a_i, b_j) = -(b_i, a_j) = \delta_{ij} \end{cases} \tag{5.11.5}$$

と表せる. これは(5.11.1)のかたまりを対角にもつ行列にほかならない. この行列を保つ群は $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ である. したがって写像類群は $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ ではないかと思われる. しかしこれは完全には正しくない. ホモロジー的に自明なサイクルのまわりのDehnトゥイスト D_c で, a や b サイクルを変換しないものもあるからである. これらは今まで用いてきた基底では, 単位行列として表されることになる. それにもかかわらずこれらのDehnトゥイストも, 写像類群に含めねばならない正統な大域的座標変換なのである. この部分群はTorelli群 T と呼ばれるもので, こうしてようやく求める結果

$$\frac{\mathrm{MCG}}{T} = \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \tag{5.11.6}$$

を得る. (幸いなことに, Torelli群のスピン構造への作用は自明なので, これをさらに議論するのは省くことにする.)

次にリーマン面の周期行列と, それが $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ の下でどのように変換するかを述べよう. リーマン面上で書き下すことのできる $2g$ サイクルに加えて, 面上で $2g$ 個の独立な調和1形式 ω_i と $\bar{\omega}_i$ も書き下すことができる(付録を見よ). そして(Hodge-de Rahmの定理により)同数のサイクルと1形式があるので, a サイクルの積分をいつでも

$$\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij} \tag{5.11.7}$$

と規格化することができる. すると一般に, b サイクルの積分は $g \times g$ の正方行列

$$\int_{b_i} \omega_j = \Omega_{ij} \tag{5.11.8}$$

を作る. これは周期行列と呼ばれ, (5.5.2)で1ループ振幅に導入した τ を一般化した

もので，(5.6.31)の多重ループ振幅に導入した周期行列に等しい．そしてわりと容易に，周期行列は対称で正定値の虚部をもつことが示せる．一般に，(正定値の虚部をもつ)対称 $g \times g$ 行列の $\frac{1}{2}g(g+1)$ 個の要素は，**Siegel 上半面**と呼ばれる空間を生成する．

周期行列を導入する利点は，同等でない 2 つのリーマン面が同じ Ω_{ij} をもたないことにある．これは Torelli の定理と呼ばれる．したがって $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ 変換を除いて，周期行列は異なるリーマン面を特徴づける便利な方法を与えてくれる．さて $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ 変換の下で，周期行列は，

$$\Omega' = (A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1} \tag{5.11.9}$$

と変換する．ここで，A, B, C, D は各々シンプレクティック(symplectic) $g \times g$ 行列である．したがって 2 つの異なる周期行列は，$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ 変換で関係しているとき同じリーマン面を記述するのである．

これで Dehn トゥイストで定義される $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ による写像類群の数学的記述ができるようになったので，次の課題は g 個のハンドルをもつリーマン面上に定義された関数を書き下すことである．前に 1 ループ振幅は，擬 2 重周期的テータ関数 Θ により記述されることを見た．今度は g 個のハンドルをもつ面に対して定義されているある周期性をもつ一般化された Θ 関数を書き下したい．

1 ループの Θ 関数をとり，それが g 個のハンドルをもつリーマン面の周期性をもつことを要求すれば，自然に和に無限項の余分な集合を加えることになる．最終的には，その和は

$$\Theta(\boldsymbol{z}|\Omega) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^g} e^{i\pi\boldsymbol{n}\cdot\Omega\cdot\boldsymbol{n}+2\pi i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{z}} \tag{5.11.10}$$

に近づく [39, 40]．ここでベクトル $\boldsymbol{n}$ についての和は，g 次元の格子についてとる．Θ 関数は複素変数 z で定義されているのではなく，

$$\boldsymbol{z} = \int_{p_0}^{z} \boldsymbol{\omega} \tag{5.11.11}$$

で定義されるベクトル $\boldsymbol{z}$ に対し定義されている．ここで p_0 は面上の任意の点である．$\boldsymbol{\omega}$ は g 個の成分 $\boldsymbol{\omega}_i$ をもっているので，$\boldsymbol{z}$ も g 成分 z_i をもつベクトルである．

さらにスピン構造をもつ Θ 関数も構成できる．トーラスに対しては，平行四辺形のまわりを平行移動させたスピノールは，周期的か(反周期的か)により $+1(-1)$ の位相をひろうことを見た．同様に，種数が g のリーマン面は $4g$ 個の辺をもつ多角形で表される(図 5.14)．この多角形のまわりにスピノールを平行移動させるときの異なるやり方を記述するには，2^{2g} 個の位相を定義しなければならない．そこで指標 $[\alpha] = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ の集合により，多様体のスピン構造を定義することにする．

これでスピン構造をもつ一般化された Θ 関数を定義できる：

$$\begin{aligned}\Theta[\alpha](\boldsymbol{z}|\Omega) &= \prod_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^g} e^{i\pi(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{a})\cdot\Omega\cdot(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{a})+2\pi i(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{b})} \\ &= e^{i\pi\boldsymbol{a}\cdot\Omega\cdot\boldsymbol{a}+2\pi i\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{b})}\Theta(\boldsymbol{z}+\Omega\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\Omega).\end{aligned} \tag{5.11.12}$$

格子をずらすと，一般化された Θ 関数は位相を除いて周期的であることがわかる：

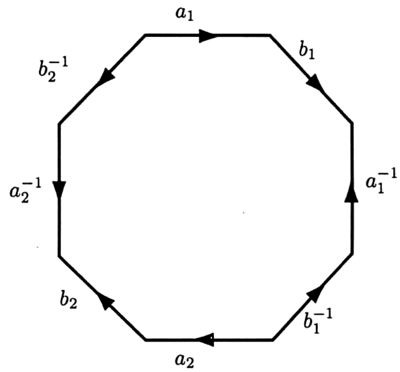


図 5.14：種数 2 のリーマン面の正準ホモロジーサイクル．この図は，2 つのハンドルまたは穴をもつ球面の a と b ホモロジーサイクルを書き，サイクルを作る線にそって切り，面をひらくことによって作られる．この基底の利点は，任意種数の面のホモロジーサイクルが多角形で表されることである．

$$\Theta[\alpha](\boldsymbol{z}+\Omega\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}|\Omega)=e^{2\pi i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{m}-i\pi\boldsymbol{n}\cdot\Omega\cdot\boldsymbol{n}-2\pi i\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{b})}\Theta[\alpha](\boldsymbol{z}|\Omega). \tag{5.11.13}$$

また，$\boldsymbol{z}\to-\boldsymbol{z}$ の変化で，Θ 関数は

$$\Theta[\alpha](-\boldsymbol{z}|\Omega)=(-1)^{4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}\Theta[\alpha](\boldsymbol{z}|\Omega) \tag{5.11.14}$$

と変換する．こうして(5.9.7)で 1 ループの関数に対してしたように，$\boldsymbol{z}\to-\boldsymbol{z}$ の下で偶か奇によりスピン構造を分類することができる．そして種数 g のリーマン面上には，$2^{g-1}(2^g-1)$ 個の奇スピン構造と $2^{g-1}(2^g+1)$ 個の偶スピン構造があることがわかる．

今やこれらの一般化された Θ 関数が，写像類群変換(5.11.9)の下でどのように変換するか容易に計算できる．$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ の下では，

$$\Theta[\alpha](\boldsymbol{z}'|\Omega')=\varepsilon e^{-i\pi\phi}\det(C\Omega+D)^{1/2}\Theta[\alpha](\boldsymbol{z}|\Omega) \tag{5.11.15}$$

となることがわかる．ここで，

$$\boldsymbol{z}'=(C\Omega+D)^{-1}\cdot\boldsymbol{z} \tag{5.11.16}$$

および

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}'\\ \boldsymbol{b}'\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}D & -C\\ -B & A\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(CD^T)_d\\ (AB^T)_d\end{pmatrix} \tag{5.11.17}$$

で，位相因子は，

$$\phi=\boldsymbol{a}D^TB\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}C^TA\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}B^TC\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}D^T-\boldsymbol{b}C^T)(AB^T)_d$$

で与えられる．ここで T は転置を表し，d は対角成分をとることを表す．記号 ε は，1 の 8 乗根(ここでは気にする必要のない制限がついている)である．

リーマン面上で正しい周期性をもつ Θ 関数を定義したので，次の課題は多重ループ振幅の測度を実際に計算することである．ここで Belavin と Knizhnik のすばらしい結果 [34] がとても役に立つ．それは多重ループ振幅の測度が，(ゼロモードを別とし

て）ある正則関数の2乗であるという定理である：

$$\text{正則因子化}：Z = \int_F \frac{\eta \wedge \bar{\eta}}{(\det \operatorname{Im} \Omega)^{13}}. \tag{5.11.18}$$

ここで F は面の基本領域で，η は $3g-3$ 形式

$$\eta = \prod_{i=1}^{3g-3} dy_i F(y) \tag{5.11.19}$$

である．(5.11.19)の y_i はタイヒミュラーパラメーターで，$F(y)$ は正則でゼロ点をもたず，面が縮退する境界で2次の極をもつ関数である．例として1ループの関数(5.5.4)が，（ゼロモードを除いて）この性質をもつことは容易に確かめられる．

あるレベルでは，正則因子化は直観的に明らかである．それは単に閉じたループがゼロモードを除いて，弦の左と右へ動くモードの積であるといっているにすぎないからである．しかしこの強力な結果の証明はかなり複雑であり，次のようにまとめられる．前節で導かれた手法を用いれば，多重ループ振幅の測度をタイヒミュラーパラメーターと複雑な行列式によって形式的に書き下す方法はわかっている．そして，

$$\partial\bar{\partial} \log W = (D-26)\cdots \tag{5.11.20}$$

であることが示せる．ここで W はある因子の13乗を除いた測度の項である．右辺は共形アノーマリーであり，26次元で0になることに注意せよ．したがって26次元では $\partial\bar{\partial}\log W = 0$ で，この場合それは正則関数の絶対値 $|F|^2$ と書ける．他の次元では正則因子化には問題がある．その場合解析的(analytic)アノーマリーがあるという．

著しいことは，F に対する条件が非常に強いので，おそらくすべての多重ループの測度が1通りに決まると思われる［41–61］．これは非常に強力な結果で，最終的には多重ループの測度を視察により書き下すことができるかもしれない．

たとえば2ループの関数を考えよう．タイヒミュラーパラメーターを周期行列そのものに選ぼう．両方とも3つの独立複素数をもつので，これができる．すると次の組み合わせは，モジュラー不変である：

$$\frac{d\Omega}{(\det \operatorname{Im}\ \Omega)^3}. \tag{5.11.21}$$

われわれは，$|F|^2(\det \operatorname{Im}\Omega)^{-10}$ に対する表式がほしい．リーマン面の理論による議論を用いて，一意的な答として，

$$2\,\text{ループ}：F = \left\{ \prod_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} \Theta[\alpha](0|\Omega) \right\}^{-2} \tag{5.11.22}$$

となることがわかる．ここで積は10個の偶の指標で，$4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0 \bmod 2$ となるものについてとる．

正則関数についての同様な議論を用いて，3ループ振幅の F 関数は

$$3\,\text{ループ}：F = \left\{ \prod_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} \Theta[\alpha](0|\Omega) \right\}^{-1/2} \tag{5.11.23}$$

と表せる．ここで再びタイヒミュラー変数 dy_i は，周期行列 $d\Omega_{ij}$ の要素にとった．

しかしこの簡単なやり方は，4 ループのレベルで急にだめになる．一般に，Siegel 上半平面で定義される対称行列には $\frac{1}{2}g(g+1)$ 個の要素があるが，タイヒミュラーパラメーターの数は $3g-3$ である．したがってそれらが同じ数の要素をもつのは $g=2,3$ だけで，高次ループの周期行列を特徴づけるのは極めて困難なためである．このこと，つまり Siegel 上半平面の要素の集合が周期行列の要素と $g=2,3$ でしか一致しないことが，ショットキー問題の原因である．問題は，Siegel 上半平面で定義された関数が周期行列の関数になるには，どういう条件をおかねばならないか？ ということである．

幸いなことに，数学者が最近ショットキー問題を解いたので，任意の G に対し周期行列を特徴づけ，したがって任意の種数のリーマン多様体で定義された正則関数を記述することができるようになった．実際これにより，任意の種数のリーマン面が点として表されるような無限次元空間，グラスマニアンを考えることができる．

必要なことは，**任意の種数のリーマン多様体上に定義された共形場の理論の演算子形式の一般化**である．種数 g の面上に定義されたすべての相関関数が導出できるような，生成関数(generating function) [35–37] に作用する演算子を構成したい．まず最初に，フェルミオン演算子

$$\psi(z)=\sum_n \psi_n z^{-n-1/2} \tag{5.11.24}$$

を定義しよう．ここで，ψ_n はふつうの反交換関係

$$\{\psi_n,\psi_m^*\}=\delta_{n,m} \tag{5.11.25}$$

をみたす．また双局所的(bilocal)カレント

$$J(z,w)=:\psi(z)\psi^*(\omega): \tag{5.11.26}$$

も定義する．カレント演算子は，その対角な成分

$$J(z,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n z^{-n-1} \tag{5.11.27}$$

である．さて，生成関数

$$\tau(x)=\langle 0|e^{H(x)}g|0\rangle \tag{5.11.28}$$

を定義する．ここで，

$$H(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x_n J_n \tag{5.11.29}$$

であり，g は

$$g=\exp\left\{\oint_{z=\infty} dz \oint_{w=\infty} dw\, f(z,w)J(z,w)\right\} \tag{5.11.30}$$

で与えられる Clifford 群の要素である．ここで積分は無限大のまわりにまわるようにとる．重要なことは，g が周期行列 Ω と，指標 $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で決められている面上のスピン

構造の関数であることである．したがって，リーマン面の性質に関するすべての情報は関数 g に含まれているのである．

ふつうの点粒子の経路積分では，グリーン関数の生成子に演算子 $\delta/\delta J$ を作用させると汎関数積分に場が挿入される．これに類似したことは，頂点演算子

$$v(z) = e^{\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n} e^{\log z \partial_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} z^{-n} \partial_n} \tag{5.11.31}$$

で得られる．ここで x_n と ∂_n は，ふつうの調和振動子と同じ交換関係をもつ．構成の仕方から，恒等式

$$\frac{\langle 0|\psi(z)\psi^*(w)g|0\rangle}{\langle 0|g|0\rangle} = \tau^{-1}(x)v(z)v^*(w)\tau(x)|_{x=0} \tag{5.11.32}$$

が得られる．こうして頂点演算子を作用させると，ふつうの場の理論で生成関数に $\delta/\delta J$ を作用させるのと同様に共形場の相関関数が作られる．

さて，広田方程式と呼ばれる条件

$$\oint_{z=\infty} dz\, v(z)\tau(x)v^*(z)\tau(y) = 0 \tag{5.11.33}$$

を課そう．広田方程式は，KP 階層（Kadomtsev-Petviasvili hierarchy）と密接に関係していることが示せる．

これで $\tau(x)$ の具体的な形を書き下す道具はすべてそろった［35–37］：

$$\tau(x) = e^{\sum_{n,m\geq 0} x_n Q_{nm} x_m} \Theta[\alpha]\left(-\sum_{n=1}^{\infty} A_n x_n \,\middle|\, \Omega\right). \tag{5.11.34}$$

ここで A_n は周期行列のべき展開の係数

$$\Omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{-n-1} dz \tag{5.11.35}$$

であり，

$$Q_{nm} = \frac{1}{2}\frac{1}{(m-1)!n(n-1)!}\partial_t^m \partial_y^n \log \frac{E(t,y)}{(t-y)}\Bigg|_{t=y=0} \tag{5.11.36}$$

である．ここで $E(t,y)$ は「プライム形式」（prime form）と呼ばれるもので，球面の共形場の理論で見つけられた関数 $z-w$ の簡単な一般化である．実際 z が w に近ければ，それは種数 g の面上であっても $z-w$ のように振る舞うものである．具体的には，

$$E(z,w) = \Theta[\alpha]\left(\int_w^z \omega \,\middle|\, \Omega\right)(h_\alpha(z)h_\alpha(w))^{-1/2} \tag{5.11.37}$$

で与えられる．ここで

$$h_\alpha(z) = \sum_i \partial_i \Theta[\alpha](0|\Omega)\omega_i(z) \tag{5.11.38}$$

である．次にこの議論の主な結果を述べよう．τ 関数が KP 階層の広田方程式をみたすのは，実は Ω が種数 g のリーマン面の周期行列の場合に限ることが知られている．

これがわれわれの求めていた条件である．これにより次元 $\frac{1}{2}g(g+1)$ をもっていた Ω が次元 $3g-3$ に制限され，種数 g のリーマン面の周期行列に等しくなる．これで原理的には，ショットキー問題は解けた（しかし結果は非常に非線形である）．

余分なボーナスとして，$\tau(x)$ は種数 g のリーマン面で定義された共形場の理論の生成関数と見なせるから，それにより任意の相関関数を計算できる．このリーマン面上の 2 つのフェルミオンの行列要素は，

$$\frac{\langle 0|\psi(z)\psi^*(w)g|0\rangle}{\langle 0|g|0\rangle} = \frac{\Theta[\alpha]\left(\int_w^z \omega|\Omega\right)}{\Theta[\alpha](0|\Omega)E(z,w)} = P_\alpha[z,w] \tag{5.11.39}$$

で与えられる．これは Szegö 核（kernel）として数学者に知られているものであり，$z=w$ に留数 1 の単極をもつ z と w の一意的な有理型（meromorphic）半微分（half-differential）である．物理学者はこれを単に 2 点関数として知っているわけである．この N 点への一般化は，

$$\frac{\langle 0|\psi(z_1)\psi^*(w_1)\cdots\psi(z_N)\psi^*(w_N)g|0\rangle}{\langle 0|g|0\rangle}$$
$$= \prod_{i<j} E(z_i,z_j)\prod_{k<l} E(w_k,w_l)\Theta^{-1}[\alpha](0|\Omega)\prod_{i,k} E^{-1}(z_i,w_k)\Theta[\alpha]\left(\sum_i z_i - \sum_k w_k \,\middle|\, \Omega\right) \tag{5.11.40}$$

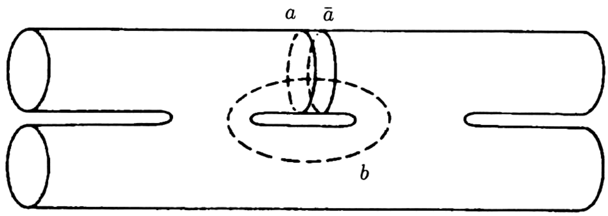
となる．ここで，これらの式の無矛盾性を確かめる方法がある．すなわち N 点関数を計算するには 2 通りの方法，フェルミオン振動子を使うか，ボソン化を用いて $e^{i\phi}$ の形のボソン振動子を使うものがあることがわかっている．たとえば N 点関数にウィック分解を用いて，それを 2 点関数により，

$$\langle 0|\prod_{i=1}^N \psi(z_i)\prod_{j=1}^N \psi^*(w_j)g|0\rangle = \det{}_{ij} P_\alpha(z_i,w_j) \tag{5.11.41}$$

と書くことができる．(5.11.40) はボソン的表示を用いて得られ，(5.11.41) はフェルミオン的表示を用いて得られたものである．幸いなことに，これら 2 つの異なる表式が同等であることを Fay が証明している [39]．これは Θ 関数の “trisecant” 加法定理と呼ばれるものである．これらの表式の数学的同等性により，ボソン化の別のチェックが得られたことになる．

まとめると，以上で展開したのは任意のリーマン面上で定義された共形場の理論の演算子形式である．ケットベクトル $g|0\rangle$ は特定のリーマン面を表し，それにいろいろな場の演算子を作用させることはそのリーマン面について行列要素をとることに対応している．重要なのは，各要素 $\tau(x)$ が KP 階層の広田条件をみたせば，任意種数 g のリーマン面を正しく特徴づけることである．したがって各 $\tau(x)$ がグラスマニアンの点を定義していることになり，求めていた結果が得られたわけである．

けれども，摂動級数を足し上げてそれから非摂動的情報を引き出すというわれわれの最終的目標からは，まだずっと遠いことに注意しよう．しかしながら，任意の種数のすべてのリーマン面を，スピン構造を含めてグラスマニアン空間の 1 点として特徴づけることができるので大きな進歩をしている．この演算子形式を用いて，グラスマ



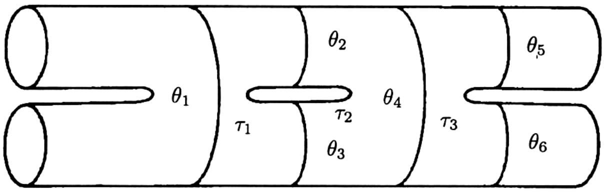


図 5.15： 後の図に，光錐の面を決めている角度，長さ,「時間」を示してある．これらのパラメーターがタイヒミュラー空間を作り，そのうち 6 つが各内部ループを決めるのに必要である．（これらのパラメーターは，自動的に基本モジュラー領域を 1 回だけおおうようになっている.）

ニアン上の点を任意に生成できるのである．将来このグラスマニアンがどのくらい役に立つかを調べることは残された問題である．

しかし，この形式にもいくつか問題があることを述べておくべきである．ショットキー問題は形式的には解決したが，実際には広田方程式は非常に非線形なので，Θ 関数により多重ループ振幅を具体的に構成する際に，この解がどのくらい実用的なのかを見る必要がある．さらに超弦振幅の超モジュライの定義の仕方については，文献にもかなりの混乱があることも述べておかねばならない．超リーマン-ロッホの定理によりいくつの超モジュライがあるかわかるが，ちゃんとした方法でそれらを具体的に構成するという困難な問題がまだ残っているのである．超モジュライへの入門とその問題については [62] を見よ．

以下の一連の章では，グラスマニアンのアプローチにかわるものを論じるが，それは種数 g についての知識をまったく必要としないものである．このアプローチでは実は，リーマン面上の摂動論は単に一つの近似法にすぎない．それが弦の場の理論である．

この章を終える前に，今まで議論したいろいろな多重ループの形式のうち，光錐形式だけが弦の場の理論から自然に出てくることを指摘しておく．したがって，S 行列で頂点関数を集めて光錐ファインマン図を構成することは，モジュライ空間の特定の「3 角形分割」(triangulation) になっていることが直観的に期待される．この結果は [63, 64] で証明されたが，数学者が前に考えたことはなかった問題である．（証明は簡単にいうと，種数 g のリーマン面上にある積分を考え，各ループすなわちハンドルをまわるときその周期を計算することに基づいている．そして周期が純粋に虚であることが証明でき，面のモジュラー不変な記述ができるのである.）

たとえば図 5.15 に，多重ループがどのように光錐パラメーターで決まるかを示してある．ここで τ_i は，弦がわかれたりつながったりするときのいろいろな相互作用の時

間を表し，θ_i は各弦を1回転させる「トゥイスト」を表す．種数 g の面の $6g-6$ パラメーターを出すには，各シリンダーの円周について積分することも必要である．このように $6g-6$ 個のすべてのモジュライパラメーターには，ファインマン図の物理的パラメーターによる自然な解釈がある．光錐形式は，前の形式に比べいくつかの長所がある．第1に，ここでは積分領域を制限する必要がない．ショットキーと定曲率の形式では，モジュラー不変性のためにそれが必要であった．第2に，それは任意のループへ容易に拡張できる(これは Θ 関数の方法ではできない)．第3に，これはユニタリーであり，物理的変数に基づいたものである．そして第4に，これは場の理論から自然に導かれる．

この形式を議論するかわりに，弦の場の理論によって光錐の方法を論ずることにする．以下の一連の章で，この重要な話題をとり上げよう．

5.12　まとめ

まとめると弦のユニタリー化の方法は，N 点振幅をボルン項として用いて，ユニタリー性方程式

$$\operatorname{Im} T_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_n \langle i|T|n\rangle\langle n|T^\dagger|j\rangle \tag{5.12.1}$$

によって可能となる．汎関数積分は，

$$A = \int_S DX\, d\mu e^{iS} \prod_{i=1}^{n} e^{ik_i\cdot X_i} \tag{5.12.2}$$

と修正される．ここで N 個の穴のあいた円板または球面である，共形的に同等でないすべての面 S について和をとる．とくに開いた弦の図は3通りに入ってくる．それらは平面，非平面，および(メビウスの帯のような)向きづけできない面である．閉じた弦の図は，平面と(クラインのつぼのような)向きづけできない面だけが入る．

幸いにも，数学者がすでにこれらの面上のノイマン関数を計算していて，それは保型関数の特別の例となっている．

1ループに対しては，ノイマン関数は，

$$\begin{aligned}\ln\psi(x,w) &= \ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln x + \frac{\ln^2 x}{2\ln w}\\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln(1-w^n x) + \ln(1-w^n/x) - 2\ln(1-w^n)\right]\end{aligned} \tag{5.12.3}$$

によって与えられる．すべてをまとめると，1ループ平面図の振幅は，

$$A_N = \pi^{-1}\int_0^1 \prod_{i=1}^{N-1}\theta(\nu_{i+1}-\nu_i)d\nu_i \int_0^1 \frac{dq}{q^3}\left(\frac{-2\pi^2}{\ln q}\right)^N f(q^2)^{-24}\prod_{i<j}(\psi_{P,ij})^{k_i\cdot k_j} \tag{5.12.4}$$

に等しくなる．

弦のグラフは決して紫外発散をもたないことがわかった．中間のレッジェ軌跡につ

いての無限和のために，グラフが紫外領域で有限になるのである．しかしファインマン図の理論と同様に，グラフの発散は面の位相が局所的に変化するところから出る．1 ループの開いた弦の図は，内部の穴がなくなるときに発散する．共形不変性により，これは運動量ゼロの閉じたループを引き出すことに対応している．つまりこの発散は，タキオンまたはディラトンが真空へ散乱されることに対応する．

これらのグラフの発散の構造は，次の通りである．

1. 南部-後藤の開いた弦は，q^{-3} と q^{-1} のように発散する．後者の発散はディラトンに関係しており，多分全次数でスロープのくりこみに吸収できる．タキオンの発散はもっと面倒である．複素 s と t の平面で分析すると非平面の図は，実はカットをもっており，26 次元では極になる．この極は閉じた弦に対応している．このように，閉じた弦が 1 ループのレベルで「束縛状態」として出てくる．

2. 閉じた弦の振幅は，質量殻条件をみたしている外線にタドポールや自己エネルギーの挿入があるために発散する．

3. I 型の超弦は q^{-1} の極だけしかもたず，したがってスロープのくりこみをしてこの発散を吸収できる．ボソンとフェルミオンの内線が互いに打ち消しあうために，q^{-3} の発散は決して起こらないのである．

4. II 型の超弦は実は有限である．2 点と 3 点の 1 ループ図はないので，外線へのタドポールや自己エネルギーの挿入がないのである．

これらの結果は，保型関数の理論を用いて N ループ振幅にうまく拡張できる．使えるパラメーターの取り方はいく通りかある．第 1 はショットキー群の方法で，それは変数の取り方が具体的で，多重レッジェオン頂点をぬい合わせることにより明白に因子化できる形で導かれているという利点をもっている．しかし，モジュラー不変性はそう明らかではない．別の方法は Θ 関数の方法で，最初からモジュラー不変性は組み込まれている．また容易にスピン構造にも拡張できる．この方法の欠点は，変数の取り方が明らかでないことである．また因子化，したがってユニタリー性も明白でない．これらの振幅は頂点をぬい合わせることによって構成されたのではなく，境界条件をみたすように勝手に仮定したものだからである．究極的には，これらの方法は多分同一のものとなるであろう．

$2N$ 個の任意の穴が切り出されている複素平面を考えよう．これらの穴を a_i と $\bar{a}_i$ でラベルづけした N 個の対にする．これらを a サイクルと呼ぶ．a サイクルのどの対の間に線を引いても，b サイクルが得られる．ここで 1 つの a サイクルをその相棒 $\bar{a}_i$ に写像する射影演算子 P_i を定義しよう．するとこれらの射影演算子は，2 つの不動点 z_1 と z_2 と乗数 X で決まり，

$$\frac{P(z)-z_1}{P(z)-z_2} = X\frac{z-z_1}{z-z_2} \tag{5.12.5}$$

と書ける．開いた弦に対しては，a サイクルの中心および射影変換の不動点は実軸上にある．最終的な開いた弦の N ループ振幅は

$$A_N = \int \prod_{\alpha=1}^{N} d^{26}k_\alpha d\mu \prod_{\{P\}} \prod_{\{\tilde{P}\}} (1 - X_{\{\tilde{P}\}})^{-24}$$
$$\times \prod_{1=i<j=M} (z_i - \{P\}\, z_j)^{k_i \cdot k_j} \prod_{\substack{\beta \cdot \lambda = 1 \\ \beta \neq \lambda}} dX\, X_\beta^{-\alpha(k_\beta)-1}$$
$$\times \prod_{i=1}^{M} \left(\frac{z_i - \{P\}\, x_\lambda^{(2)}}{z_i - \{P\}\, x_\lambda^{(1)}} \right)^{k_i \cdot k_\lambda} \left\{ \frac{x_\beta^{(1)} - \{P\}\, x_\lambda^{(1)}}{x_\beta^{(2)} - \{P\}\, x_\lambda^{(1)}} \frac{x_\beta^{(2)} - \{P\}\, x_\lambda^{(2)}}{x_\beta^{(2)} - \{P\}\, x_\lambda^{(2)}} \right\}^{(1/2)k_\beta \cdot k_\lambda} \tag{5.12.6}$$

となる．ただし，

$$d\mu = \prod_{i=1}^{M} dz_i\, dV_{\text{abc}}^{-1} \prod_{\alpha=1}^{N} dx_\alpha^{(1)} dx_\alpha^{(2)} (x_\alpha^{(1)} - x_\alpha^{(2)})^{-2} \tag{5.12.7}$$

であり，ローマ字は外線を表し，ギリシア文字はループを表す．積分領域は集合 $\{P\}$ の極限点の間にあることに注意する．これらの極限点が，実軸上の不連続な領域を作るようにしなければならない．したがって，ショットキー群を使わなければならない．

N ループ振幅は，南部-後藤の作用のかわりに Polyakov の作用を使えば，リーマン面の言葉で直接再定式化もできる．この場合積分には，いくつかの新しい寄与がある．

1. Faddeev-Popov 行列式から来る因子 Δ_{FP}．これは

$$\det{}^{1/2} P_1^\dagger P_1 \tag{5.12.8}$$

と書ける．

2. X 変数の積分からの因子

$$\int DX \, \exp\left(- \int d^2z \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \right) = \left(\frac{2\pi}{\int d^2z \sqrt{g}} \det{}'(-\nabla^2) \right)^{-D/2} \tag{5.12.9}$$

ここで

$$\nabla^2 = \frac{-1}{\sqrt{g}} \partial_m \sqrt{g}\, g^{mn} \partial_n \tag{5.12.10}$$

である．

3. タイヒミュラーパラメーター t_i を積分に付け加えねばならない．この最後の因子を計算するために，

$$\delta g_{ab} = [\nabla_a \delta v_b + \nabla_b \delta v_a - (\nabla_c \delta v^c) g_{ab}] + (\nabla_c \delta v^c) g_{ab} + 2\delta\sigma g_{ab} + \delta t_i T^i \tag{5.12.11}$$

と書こう．ここで，

$$T^i = \frac{\partial g_{ab}}{\partial t_i} - (\text{トレース}) \tag{5.12.12}$$

である．これを

$$\partial g_{ab} = P_1(\delta v)_{ab} + 2\delta\sigma g_{ab} + \delta t^i \partial_i g_{ab} \tag{5.12.13}$$

と書き換える．ここで，

$$P_1(\delta v)_{ab} = \nabla_a \delta v_b + \nabla_b \delta v_a - g_{ab} \nabla_c \delta v^c \tag{5.12.14}$$

である．そして変数をかえて，

$$T^i = \psi^a(\psi^a, T^i) + P_1 v^i \tag{5.12.15}$$

とする．ここで

$$v^i = \frac{1}{P_1^\dagger P_1} P_1^\dagger T^i \tag{5.12.16}$$

$$(\psi^a, T^i) = \int d^2 z \sqrt{g} g^{bc} g^{de} T^i_{bd} \psi^a_{ce} \tag{5.12.17}$$

である．したがって測度の最終結果は，

$$\begin{aligned} Dg_{ab}\Omega^{-1}_{\mathrm{Diff}}\Omega^{-1}_{\mathrm{Weyl}} &= Dv_a \Omega^{-1}_{\mathrm{Diff}} D\sigma\, \Omega^{-1}_{\mathrm{Weyl}} Dt^i \det{}^{1/2}(P_1^\dagger P_1) \frac{\det(\psi^a, T^i)}{\det^{1/2}(\psi^a, \psi^b)} \\ &\quad \times \left(\frac{2\pi}{\int d^2 z \sqrt{g}} \det{}'(-\nabla^2) \right)^{-D/2} \end{aligned} \tag{5.12.18}$$

となる．

多重ループ振幅へのこのアプローチの大きな利点は，リーマン面の力を用いて振幅の発散を分析できることである．とくに Selberg のゼータ関数

$$Z(s) = \prod_{l\ \text{プリミティブ}} \prod_{p=0}^{\infty} [1 - \nu(\gamma) e^{-(s+p)l}] \tag{5.12.19}$$

の特異点を分析できる．Selberg 関数を分析すると，種数 g の面の位相が縮退したときに測度が特異点をもつことが確かめられる．

幸いなことに，多重ループ面上の測度を構成することは正則因子化の定理によって大変楽になる．それによると，測度は

$$Z = \int_F \frac{\eta \wedge \bar{\eta}}{(\det \mathrm{Im}\, \Omega)^{13}} \tag{5.12.20}$$

に等しい．ここで η は正則 $3g-3$ 形式である．(ゼロモードを除いて)左と右に動くモードが同じ寄与をすることを考えれば，この公式は直観的に明らかである．証明の唯一問題になるところは(解析的アノーマリーと呼ばれる)アノーマリーであるが，これは 26 次元で 0 になる．この結果を用いれば，多重ループ振幅の積分の答を基本的に予測できる．というのは，正しい周期性と正則な特異性構造をもつ関数は唯一つだけだからである．

Θ 関数に基づくもう 1 つ別の方法は，これらの周期的関数のモジュラー的性質を最初から使うものである．種数 g の面では，面上のすべての周期的(反周期的)境界条件に対応して 2^{2g} のスピン構造がある．したがってわれわれの課題は，スピン構造をもつこの面上で，正しい周期性と特異性をもつノイマン関数を構成することである．その

答は2つの関数，一般化されたテータ関数とプライム形式によって与えられる．テータ関数は，

$$\Theta[\alpha](\boldsymbol{z}|\Omega) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^g} e^{i\pi(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{a})\cdot\Omega\cdot(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{a})+2\pi i(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{b})} \tag{5.12.21}$$

で与えられるものである．ここで α はスピン構造を表す．(球に対して $z-w$ であるものの正則な一般化である.)　またプライム形式は，

$$E(z,w) = \Theta[\alpha]\left(\int_w^z \omega|\Omega\right)(h_\alpha(z)h_\alpha(w))^{-1/2} \tag{5.12.22}$$

で与えられる．ここで，

$$h_\alpha = \sum_i \partial_i \Theta[\alpha](0|\Omega)\omega_i(z) \tag{5.12.23}$$

である．テータ関数とプライム形式が与えられれば，リーマン面上のボソンとフェルミオン演算子のすべてのグリーン関数が計算できる．こうして単に球面だけでなく，リーマン面上の新しい共形場の理論が構成できる．たとえば2つのフェルミオンの2点関数は，Szegö 核によって与えられる：

$$\frac{\Theta[\alpha]\left[\int_w^z \omega|\Omega\right)}{\Theta[\alpha](0|\Omega)E(z,w)}. \tag{5.12.24}$$

多重ループの問題を解くときの1つの困難は，正しい座標の取り方の問題である．1つの理想的な取り方は，周期行列 Ω を座標として用いることであろう．しかし問題は，周期行列のような正方行列は $\frac{1}{2}g(g+1)$ の次元をもつが，複素タイヒミュラーパラメーターは $3g-3$ 個しかないことである．2と3ループではそれらは一致するが，高次ループでは一致しない．これがショットキー問題で，ごく最近やっと解決された．この問題の解決により，グラスマニアンを用いて摂動級数全体を特徴づけることができるようになる．スピン構造をもつ各多重ループ振幅は，グラスマニアンの中の1点を表し，したがって(少なくとも原理的には)リーマン面についての摂動級数全体を，1度に取り扱う方法が得られたのである．さらにこれが，弦理論の非摂動的情報を最終的に与えるかもしれない．

参考文献

[1] K. Kikkawa, B. Sakita, and M. B. Virasoro, *Phys. Rev.* **184**, 1701 (1969).
[2] M. Kaku and L. P. Yu, *Phys. Lett.* **33B**, 166 (1970).
[3] M. Kaku and L. P. Yu, *Phys. Rev.* **D3**, 2992, 3007, 3020 (1971).
[4] M. Kaku and J. Scherk, *Phys. Rev.* **D3**, 430 (1971).
[5] M. Kaku and J. Scherk, *Phys. Rev.* **D3**, 2000 (1971).
[6] V. Alessandrini, *Nuovo Cim.* **2A**, 321 (1971).
[7] C. Lovelace, *Phys. Lett.* **32B**, 703 (1970).
[8] C. Lovelace, *Phys. Lett.* **32B**, 203 (1971).
[9] C. S. Hsue, B. Sakita, and M. A. Virasoro, *Phys. Rev.* **D2**, 2857 (1970).

[10] J.-L. Gervais and B. Sakita, *Phys. Rev.* **D4**, 2291 (1971); *Nucl. Phys.* **B34**, 632 (1971); *Phys. Rev. Lett.* **30**, 716 (1973).
[11] D. B. Fairlie and H. B. Nielsen, *Nucl. Phys.* **B20**, 637 (1970).
[12] W. Burnside, *Proc. London Math. Sci.* **23**, 49 (1891).
[13] D. Amati, C. Bouchiat, and J.-L. Gervais, *Nuovo Cim. Lett.* **2**, 399 (1969).
[14] K. Bardakçi, M. B. Halpern, and J. A. Shapiro, *Phys. Rev.* **185**, 1910 (1969).
[15] M. Kaku and C. B. Thorn, *Phys. Rev.* **D1**, 2860 (1970).
[16] E. Cremmer and J. Scherk, *Nucl. Phys.* **B50**, 222 (1972).
[17] C. Lovelace, *Phys. Lett.* **34B**, 500 (1971).
[18] A. Neveu and J. Scherk, *Phys. Rev.* **D1**, 2355 (1970).
[19] J. H. Schwarz, *Phys. Rep.* **13C**, 259 (1974).
[20] J. A. Shapiro, *Phys. Rev.* **D5**, 1945 (1972).
[21] S. Mandelstam, in *Unified String Theories* (edited by M. B. Green and D. Gross) World Scientific, Singapore, 1986.
[22] O. Alvarez, *Nucl. Phys.* **B216**, 125 (1983).
[23] E. D'Hoker and D. H. Phong, *Nucl. Phys.* **B269**, 205 (1986).
[24] A. M. Polyakov, *Phys. Lett.* **103B**, 207, 211 (1981).
[25] J. Polchinski, *Comm. Math. Phys.* **104**, 37 (1986).
[26] F. Gliozzi, J. Scherk, and D. Olive, *Nucl. Phys.* **B122**, 253 (1977).
[27] N. Seiberg and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B276**, 272 (1986).
[28] E. D'Hoker and D. H. Phong, *Nucl. Phys.* **B278**, 225 (1986); *Comm. Math. Phys.* **104**, 537 (1986).
[29] G. Gilbert, *Nucl. Phys.* **B277**, 102 (1986).
[30] M. A. Namazie and S. Rajeev, *Nucl. Phys.* **B277**, 332 (1986).
[31] F. Steiner, *Phys. Lett.* **188B**, 447 (1987).
[32] A. Selberg, J. *Indian Math. Soc.* **20**, 47 (1956).
[33] D. Friedan and S. Shenker, *Phys. Lett.* **B175**, 287 (1986); *Nucl. Phys.* **B281**, 509 (1987).
[34] A. A. Belavin and V. G. Knizhnik, *Phys. Lett.* **168B**, 201 (1986).
[35] N. Ishibashi, Y. Matsuo, and H. Ooguri, *Mod. Phys. Lett.* **A2**, 119 (1987).
[36] L. Alvarez-Gaumé, C. Gomez, and C. Reina, *Phys. Lett.* **55B**, 55 (1987).
[37] C. Vafa, *Phys. Lett.* **190B**, 47 (1987).
[38] L. Alvarez-Gaumé, G. Moore, and C. Vafa, *Comm. Math. Phys.* **106**, 1 (1986).
[39] J. Fay, *Theta Functions on Riemann Surfaces.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 352, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
[40] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta*, Birkhauser, Basel, 1983.
[41] G. Moore and P. Nelson, *Nucl. Phys.* **B266**, 58 (1986).
[42] P. Nelson, Harvard preprint HUTP-86 A047 (1986).
[43] Yu. Manin, *Phys. Lett.* **172B**, 184 (1986).
[44] E. Verlinde and H. Verlinde, *Nucl. Phys.* **B288**, 357 (1987).
[45] K. Miki, *Nucl. Phys.* **B291**, 349 (1987).
[46] G. Moore, J. Harris, P. Nelson, and I. Singer, *Phys. Lett.* **178B**, 167 (1986).
[47] M. A. Namazie, K. S. Narain, and M. H. Sarmadi, *Phys. Lett.* **177B**, 329 (1986).
[48] A. Belavin, V. Knishnik, A. Morozov, and A. Perelomov, *Phys. Lett.* **177B**, 324 (1986).
[49] G. Moore, *Phys. Lett.* **176B**, 369 (1986).
[50] A. Kato, Y. Matsuo, and S. Odake, *Phys. Lett.* **179B**, 241 (1986).
[51] H. Sonoda, *Phys. Lett.* **178B**, 390 (1986).

[52] O. Lechtenfeld, CCNY preprint (1987).
[53] E. Verlinde and H. Verlinde, *Phys. Lett.* **192B**, 95 (1987).
[54] A. Morozov, *Phys. Lett.* **184B**, 171, 177 (1987).
[55] F. Gliozzi, *Phys. Lett.* **194B**, 30 (1987).
[56] M. Bonini and R. Ieng, *Phys. Lett.* **191B**, 56 (1987).
[57] A. Restuccia and J. G. Taylor, *Phys. Lett.* **187B**, 267, 273 (1987).
[58] F. Steiner, *Phys. Lett.* **188B**, 447 (1987).
[59] H. Sonoda, *Phys. Lett.* **184B**, 336 (1987).
[60] A. Parkes, *Phys. Lett.* **184B**, 19 (1987).
[61] A. Morozov and A. Perelomov, *Phys. Lett.* **183B**, 296 (1987).
[62] J. J. Atick, G. Moore, and A. Sen, *Nucl. Phys.* **B308**, 1 (1988).
[63] S. Giddings and S. Wolpert, *Comm. Math. Phys.* **109**, 177 (1987).
[64] E. D'Hoker and S. B. Giddings, *Nucl. Phys.* **B291**, 90 (1987).

第II部

第2量子化と幾何学の探究

第6章

光錐の場の理論

6.1 なぜ弦の場の理論か？

第 I 部では，第 1 量子化した理論の発展は，ときには何の脈絡もなくまったく任意に思える経験則やいい伝えによっていることを見てきた．頂点関数の選び方，積分の測度，図の数え方等々，すべて勝手に導入していた．まとめれば，第 1 量子化した理論は次の重要な欠点がある．

1. 相互作用は，理由なしに勝手に導入している．

2. 第 1 量子化したアプローチではユニタリー性を容易に示せない．相互作用する理論を導出できるエルミートなハミルトニアンがないからである．

3. 理論は必然的に摂動的で，質量殻条件をみたしており (on-shell)，非摂動的効果を計算するのが難かしい．

もっとも重要な点は，第 1 量子化した理論が力学的対称性の破れの計算に適していないことである．残念ながら結合定数の全次数で，時空の次元は安定に思われる．これはもちろん，第 1 量子化のアプローチでは，26 や 10 次元から 4 次元への力学的な破れを計算することにほとんど望みがないことを意味している．したがって第 1 量子化の枠組みで，厳密な現象論ができるとは思えない．第 1 量子化した理論では古典解を何万個も作ることができるが，模型が存在することのできる古典的真空の中から正しい真空を選び出すことができないからである．

そこで第 II 部では，**弦の場の理論** [1–5] に移る．これは正しい真空を見つけることのできる非摂動的形式を与えてくれる可能性がもっとも大きいものである．(しかし第 2 量子化した理論は弦理論だけに作られており，M 理論には作られていないことに注意する．実は M 理論は，第 2 量子化はいうまでもなく，満足のいく第 1 量子化した理論さえもどう定式化するのかわかっていない．したがって，われわれが第 2 量子化のことを議論するときは常に超弦理論の場合である.)

最初は第 2 量子化のアプローチは，ふつうの第 1 量子化のアプローチがあればまったく不要に思える．摂動的には第 1 量子化のアプローチと同じ図を再現するにすぎないからである．しかしながら第 2 量子化した場の理論にはいくつかの重要な長所がある．

1. 相互作用は新しいゲージ群により導入されており，その要素は相互作用する弦で閉

じている．こうすると，弦理論の相互作用を導入する群論的理由があることになる．

2. ハミルトニアンがエルミートなので，理論は明白にユニタリーである．摂動図の重みはすべて最初から決まっているのである．

3. もっとも重要な点は，理論の力学的効果を計算する方法が原理的に得られることである．

歴史的には，弦の場の理論は不可能だと一度考えられていた．というのは，それは量子力学の大部分の基本的で大事な原理を破るように思えたからである．とくに，

1. 弦の場の理論は非局所的理論で，因果律の破れなどの致命的問題がある．

2. 弦の場の理論は質量殻条件をみたさなくてよい(off-shell)が，巡回対称性などのVeneziano模型の重要な性質は質量殻条件がみたされるときだけ成り立つ．したがって，弦の場の理論は双対模型を再現しないだろう．

3. 弦の場の理論は，ローレンツ不変でかつユニタリーではないであろう．これは質量殻条件なしに，ローレンツ不変でユニタリーな弦の量子化法が存在しないためである．第1量子化した理論は質量殻条件をみたすので，これは重要ではない．しかし弦の場の理論では，必然的に質量殻条件はみたされていないので，ローレンツ不変性かユニタリー性のどちらかが破れているはずである．

4. もっとも重要なのは，弦の場の理論は，摂動図の数えすぎという重大な問題のためにユニタリー性を破っているということである．場の理論では s と t チャンネルの極を別々に加えるので，双対性を破るからである．

幸いなことに，実はこれら4つの批判に答える弦の場の理論が可能なのである．

第1に，弦がちぎれるというような相互作用は瞬間的に起こるために，弦の場の理論が因果律を破ることはない．さらに，弦の位相が変化することに関する情報は，弦にそって光の速度以下で伝わる．言い換えると，弦理論は多重局所的(muitilocal)である．このように，**弦の場の理論は量子力学の原理と矛盾しない唯一の知られている非局所場の理論である．**

第2に，Veneziano模型の重要な性質をいくつか必然的に破るグリーン関数が弦の場の理論では出てくる．ところがこれらのグリーン関数は，質量殻条件をみたすときには正しくVeneziano模型を再現し，そのような行列要素だけが観測されるのであるから，これは問題にならない．

第3に，BRSTの方法にはFaddeev-Popovゴーストがあり，質量殻条件のないときユニタリー性をみたさないように思われる．ところが質量殻条件をみたすとき，Faddeev-Popovゴーストはユニタリーゴーストと相殺するので同じ理論を与える．同様に，光錐の方法はユニタリー性をみたすが，質量殻条件がみたされないときローレンツ不変性を破っている．ところが質量殻条件をみたすとき，理論はローレンツ不変でかつユニタリーであり，したがってうまく定義されているのである．

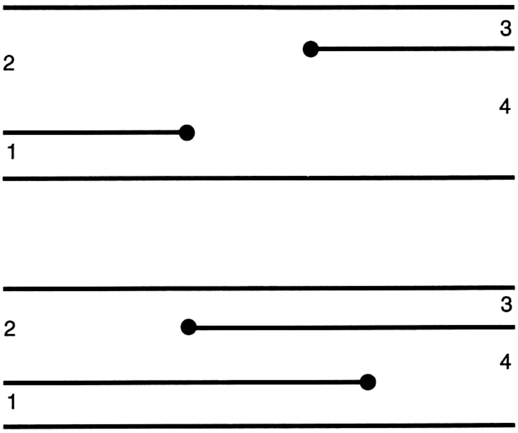


図 6.1：光錐の場の理論によって生成される面．場の理論と同じように，s と t チャンネルのグラフを別々に加え，双対性を破っている．これら 2 つのグラフの和だけが双対である．こうして弦の光錐の場の理論は，数えすぎの問題を解決している．双対性は各図では明らかに破れている．和(S 行列)だけが双対なのである．

第 4 に，弦の場の理論は，質量殻条件をみたさないときは実は双対性を破っている．しかし，質量殻条件をみたすときは差はない．たとえば光錐の弦の場の理論では，ファインマン級数の中で s と t チャンネルの極を別々に加える：

$$A = \sum_I \frac{A_I}{s - M_I^2} + \sum_J \frac{A_J}{t - M_J^2} + \cdots . \tag{6.1.1}$$

弦の場の理論では，弦の相互作用と矛盾しないように，振幅を別の t と s チャンネルの部分にわけていて，数えすぎの問題が解決される(図 6.1 を見よ)．こうして**弦の場の理論は明白な双対性は破るが，**S 行列のレベルでは回復するのである．弦の場の理論はユニタリー性の問題は明快に解決するが，そのときに明白な双対性が破れ，すべてのファインマン図について和をとって初めて双対性が回復するようになっているのである．

閉じた弦に対しても，やはり個々のファインマン図ではモジュラー不変性が破れていることがわかる．その和だけがモジュラー不変なのである．このように，光錐の場の理論は，(ハミルトニアンが明白にエルミートなので)明白にユニタリーであるが，その代価として明白なモジュラー不変性が破れているのである：

$$\text{第 1 量子化(モジュラー不変性)} \rightarrow \text{第 2 量子化(ユニタリー性)}.$$

われわれは，まず光錐の形式の第 2 量子化した理論を論ずることにする [1]．というのは，これが理論の歴史的発展に従うことになるし，これがもっともよく発展している形式だからである．しかしながら光錐ゲージはゲージを固定した形式であり，すべての局所的ゲージ自由度は除かれているので，弦の場の理論が導かれるような美しい群論的形式にはなっていない．そこで教育的理由のために，まず光錐の場の理論を議論する．

再びまず点粒子の場の理論を議論する．点粒子の第1量子化した理論から，どのようにファインマンがシュレディンガー方程式を導いたかをたどろう．

6.2 点粒子の場の理論の導出

第1章では，点 x_i から点 x_j へ動く点粒子の経路積分から出発した．そしてこれらの2点をつなぐ経路に，位相因子 e^{iS} をつけた．量子力学の基本的仮定によれば，これら2点の間を動く粒子の確率振幅は，各経路につけたすべての可能な位相についての和になる．ウィック回転をして，

$$\Delta_{ij} = \int_{x_i}^{x_j} Dx\, e^{-S} \tag{6.2.1}$$

を得る．ここで，

$$S = \int_{t_i}^{t_j} dt \left(\frac{1}{2} m v_i^2 - V(x) \right) \tag{6.2.2}$$

である．仮定により，量子力学的波の発展はホイヘンスの原理に従う：

$$\psi(x_j, t_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x_j, t_j; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) dx_i. \tag{6.2.3}$$

さて時間の小さなずらし ε を行った後での，この波動汎関数の変化を計算しよう．前に伝播関数が，

$$\Delta_{ij} = \left[\frac{m}{2\pi(t_j - t_i)} \right]^{1/2} \exp\left\{ \frac{im(x_j - x_i)^2}{2(t_j - t_i)} \right\} \tag{6.2.4}$$

に等しいことを見た．したがって小さな時間間隔 $\varepsilon = t_j - t_i$ に対し，

$$\psi(x, t+\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} A^{-1} \exp\left\{ \frac{im(x-y)^2}{2\varepsilon} \right\} \psi(y, t) dy \tag{6.2.5}$$

を得る．ここで A は規格化定数である．時間間隔 ε は非常に小さいが，x と y の間の隔たりは小さい必要はないことをおぼえておこう．

ここで大きさ ε の項だけを保持しよう．$y = x + \eta$（ただし η は必ずしも小さな数ではない）とすると，積分は，

$$\psi(x, t+\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} A^{-1} e^{im\eta^2/2\varepsilon} \psi(x+\eta, t) d\eta \tag{6.2.6}$$

となる．重要な点は，η の大きさには原理的に制限がないことである．ところが汎関数積分では，大きさ ε の項だけ残すと必然的に η の2次の項だけになってしまう．左辺を ε で展開し，右辺を η で展開しよう：

$$\psi(x,t) + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} A^{-1} e^{im\eta^2/2\varepsilon} \left\{ \psi(x,t) + \eta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2}\eta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\} d\eta. \tag{6.2.7}$$

この積分は具体的に実行できる．まず積分定数が決まって，

$$A = \left(\frac{2\pi i \varepsilon}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.2.8}$$

となる．右辺の項を書き出すと，ガウス積分で残る項は η が 2 次で現れている項だけであることがわかる．こうして最終的に，

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{6.2.9}$$

が得られる．こうして $L = \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2$ という仮定と，量子力学の基本的仮定だけから出発して，**シュレディンガー方程式を導出した**．ポテンシャルの項を含め，表式を 3 空間方向すべてに拡張しても導出法は基本的に同じで，

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi + V(x)\psi \tag{6.2.10}$$

を得る．また外部ポテンシャルなしにして，作用に ψ^3 や ψ^4 の型の相互作用を直接導入することもできる．これが第 1 量子化した点粒子理論において，Y の形や X の形の位相について和をとる第 2 量子化に似せたものである．

ここでわれわれは，シュレディンガー方程式を出すファインマンのもとの方法に従ったが，これは波の時間発展を計算することに基づいている．しかし第 1 量子化から第 2 量子化の形式に移ることができ，この導出がもっと直接的になるような別の方法がある．それは経路積分の作用に移り，運動方程式にたよらずにグリーン関数そのものから出発して第 2 量子化の形式へ移るものである．

第 1 章では，第 1 量子化した点粒子の理論でハミルトニアンからラグランジアンの形式へ移ったとき，無限個の中間状態，すなわち x 座標の固有ベクトルの完全系

$$1 = |x_i, t_i\rangle \int Dx_i \langle x_i, t_i| \tag{6.2.11}$$

を，x_i と x_j の各中間点で，表式

$$\Delta_{ij} = \langle x_i, t_i | x_j, t_j\rangle \tag{6.2.12}$$

に挿入した．これによりハミルトニアンとラグランジアンのアプローチの間が移れたのであった．

今度はこれを**第 2 量子化した場**の完全系

$$1 = |\psi\rangle \int D^2\psi e^{-\langle\psi|\psi\rangle} \langle\psi| \tag{6.2.13}$$

で置き換えよう．ここで(1.8.21)に従い，

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \langle x|\psi\rangle; \quad \psi^*(x) = \langle\psi|x\rangle \\ D^2\psi &= \prod_x d\psi(x)\, d\psi^*(x) \end{aligned} \tag{6.2.14}$$

と定義する．このように，点粒子の始状態と終状態の間の各中間点に，x の固有状態 $|x\rangle$ のかわりに，中間の汎関数状態 $|\psi\rangle$ を導入する．もっとも容易に(6.2.13)が正しいことを確かめるには，次の行列要素をとり，中間状態の完全系を挿入すればよい：

$$\begin{aligned}\delta(x-y) &= \langle x|y\rangle \\ &= \langle x|1|y\rangle \\ &= \langle x|\psi\rangle \int D^2\psi \exp\left\{-\langle\psi|z\rangle \int Dz\langle z|\psi\rangle\right\}\langle\psi|y\rangle \\ &= \int D^2\psi\,\psi(x)\psi^*(y)\exp\left\{-\int Dz\,\psi^*(z)\psi(z)\right\}. \end{aligned} \tag{6.2.15}$$

(ここでいつものように，経路積分の全体の規格化因子は落とした.）　そして，$\psi(x)$ を不連続な要素 x のついた列ベクトルの要素として取り扱う．表式を不連続にすれば，

$$\delta_{xy} \sim \int \prod_z d\psi_z^* d\psi_z \psi_x^* \psi_y \exp\left\{-\sum_z \psi_z^*\psi_z\right\} \tag{6.2.16}$$

を得る．この関係はちょうど(1.7.11)である．こうして第1量子化の基底 $|x\rangle$ から，$\psi(x)=\langle x|\psi\rangle$ をみたす第2量子化の基底 $|\psi\rangle$ へ自由に移ることができることが示せたわけである．

さて，運動方程式やホイヘンスの原理にたよらずに，第2量子化した場の汎関数だけによってシュレディンガー方程式のグリーン関数を導出してみよう．そのために経路にそったすべての中間点に次の恒等式を挿入する：

$$1 = |\psi_1\rangle \int D^2\psi_1 D^2\psi_2 \exp\left\{-\psi_1^*(\psi_2-\psi_1)-\psi_2^*\psi_1\right\}\langle\psi_2|. \tag{6.2.17}$$

（ψ_1^* の汎関数積分を実行すると，ψ_2 場によって書かれた完全性の条件になることで，この恒等式は証明できる.）

この表式を，(6.2.12)の2つの無限小に近い位置固有状態の間に入れる：

$$\begin{aligned}\Delta_{12} &= \langle x_1|e^{-iH\delta t}|x_2\rangle \\ &= \langle x_1|x_2\rangle - i\langle x_1|H\delta t|x_2\rangle + \cdots \\ &= \int D^2\psi_{12}\langle x_1|\psi_1\rangle\langle\psi_2|x_2\rangle \exp[-\psi_1^*(\psi_2-\psi_1)-\psi_2^*\psi_1] \\ &\quad - i\int D^2\psi_{1234}\langle x_1|\psi_1\rangle\langle\psi_2|H\delta t|\psi_3\rangle\langle\psi_4|x_2\rangle \\ &\quad \times \exp[-\psi_1^*(\psi_2-\psi_1)-\psi_2^*\psi_1-\psi_3^*(\psi_4-\psi_3)-\psi_4^*\psi_3]+\cdots. \end{aligned} \tag{6.2.18}$$

ここで添字12や1234は，これらの汎関数微分の2つまたは4つの積を表す．そこで小さな時間間隔の極限をとろう：

$$\sum_{i=1}^N \psi_i^*(\psi_{i+1}-\psi_i) \to \int_{t_1}^{t_N} \psi^*\dot\psi\,dt. \tag{6.2.19}$$

この極限をとった後では，

$$\Delta_{1N} = \int D^2\psi\psi(x_1)\psi^*(x_N)\exp\left[i\int dt\,\psi^*(i\partial_t - H)\psi\right] \tag{6.2.20}$$

を得る．

こうして新しいラグランジアンは，

$$L = \psi^* \left\{ i\frac{\partial}{\partial t} - H \right\} \psi \tag{6.2.21}$$

であり，これはシュレディンガーの波動方程式のラグランジアンである．したがって，量子力学の仮定と，点粒子の古典的第 1 量子化した形式の下で，運動方程式やホイヘンスの原理を使わずに，シュレディンガー方程式が導出できる．

点粒子に対してこの分析をした主な理由は，光錐と BRST の弦の場の理論に同じ手続きをくり返すためである．驚いたことに，この汎関数の道具全体が光錐と BRST の作用に対して，弦の場の理論へそのまま適用できることが後でわかる．

6.3 光錐の場の理論

点粒子の場合のように，(1.8.21) を用いて，ここで第 1 量子化から第 2 量子化した弦の形式へ移行したい：

$$\langle X|\Phi\rangle = \Phi(X). \tag{6.3.1}$$

ここでは場の汎関数が，弦の特定の点 σ での $X(\sigma)$ の局所的関数ではないことに注意しなければばならない．それは実は弦にそったすべての点に定義されている**多重局所的汎関数**である．弦を不連続化して，一連の点

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \ldots,\ \sigma_N \tag{6.3.2}$$

にわけて，場の汎関数は，

$$\Phi(X) = \Phi[X_i(\sigma_1), X_i(\sigma_2), X_i(\sigma_3), \ldots, X_i(\sigma_N)] \tag{6.3.3}$$

とした上で，$N \to \infty$ の極限をとったものである．**つまり弦の汎関数は，同時に弦にそったすべての点の関数になっている［1］．**

弦の励起のヒルベルト空間を定義しよう．場 $|\Phi\rangle$ を調和振動子で展開するのが便利であるが，その場合，

$$|\Phi\rangle = \phi(x)|0\rangle + A_i a^i_{-1}|0\rangle + h_{ij} a^i_{-1} a^j_{-1}|0\rangle + \cdots \tag{6.3.4}$$

となる．これからただちに，自由なレベルでも第 1 と第 2 量子化の形式の差がわかる．第 1 量子化の形式では基本的な量は X_μ であって，それは弦の 1 つの可能な配位だけを与えている．これに対し第 2 量子化の形式では，場の汎関数 Φ を扱っており，**それは弦の可能なすべての配位の複合和になっているのである．**

話を具体的にするため，$|X\rangle$ 固有状態を調和振動子による特定の表示で表そう．弦の変数 X が弦の固有ベクトル $|X\rangle$ に作用したとき，(2.2.9) が再現するようにしたい．すなわち，

$$X_{i,n}|X\rangle = \frac{i}{2}(a_{i,n} - a^\dagger_{i,n})|X\rangle \tag{6.3.5}$$

今固有ベクトル $|X\rangle$ が

$$
\begin{aligned}
|X\rangle &= \Omega|0\rangle \\
&= k\prod_{i,n}\exp(aX_{i,n}^2 + bX_{i,n}a_{i,n}^\dagger + ca_{i,n}^\dagger a_{i,n}^\dagger)|0\rangle
\end{aligned}
\tag{6.3.6}
$$

と書けると仮定しよう．ここで，a, b, c, k は任意の定数である．

まずこれらの定数 a, b, c を，この状態ベクトルに演算子 X を作用させて決定しよう：

$$
\begin{aligned}
X_{i,n}|X\rangle &= \Omega\Omega^{-1}\frac{i}{2}(a_{i,n} - a_{i,n}^\dagger)\Omega|0\rangle \\
&= \Omega\frac{i}{2}(bX_{i,n} + 2ca_{i,n}^\dagger - a_{i,n}^\dagger)|0\rangle.
\end{aligned}
\tag{6.3.7}
$$

したがって，

$$
b = -2i; \quad c = \frac{1}{2} \tag{6.3.8}
$$

を得る．次に，演算子 ∂_X が X と正しい交換関係をもつようにしたい．状態ベクトルに作用させれば，

$$
\frac{\delta}{\delta X_{i,n}}|X\rangle = (2aX_{i,n} + ba_{i,n}^\dagger)|X\rangle \tag{6.3.9}
$$

を得る．ここで，

$$
\frac{\delta}{\delta X_{i,n}}|X\rangle = -i(a_{i,n} + a_{i,n}^\dagger)|X\rangle \tag{6.3.10}
$$

としたいので，係数が $a = -1$ と決まる．したがって，状態ベクトルの最終的結果は，

$$
|X\rangle = k\prod_{i,n}\exp\left(-X_{i,n}^2 - 2iX_{i,n}a_{i,n}^\dagger + \frac{1}{2}a_{i,n}^\dagger a_{i,n}^\dagger\right)|0\rangle \tag{6.3.11}
$$

となる．ここで，k は規格化定数である．さらにこの表式により，場の関数をエルミート多項式のべき展開にすることができる．たとえば，

$$
\begin{aligned}
\langle 0|X\rangle &= k\prod_{i,n}e^{-X_{i,n}^2} \\
\langle 0|a_{i,n}|X\rangle &= k(-2iX_{i,n})\prod_{j,m}e^{-X_{j,m}^2}
\end{aligned}
\tag{6.3.12}
$$

となる．さらにこれにより，(6.3.11)を用いてもとの場の汎関数(6.3.4)を，エルミート多項式で書き換えることができる：

$$
\langle X|\Phi\rangle = \phi(x)\prod_{i,n}H_0(X_{i,n}) + A_i(x)H_1(X_{i,1})\prod_{\substack{i,n\\ n\neq 1}}H_0(X_{i,n}) + \cdots. \tag{6.3.13}
$$

(ここで，エルミート多項式の規格化はふつうと違うものを用いた.)

点粒子の場の理論の(1.8.9)から(1.8.12)のステップに従って，この場の汎関数を量子化しよう．一般に場の関数は，直交多項式の級数に展開できる．それで生成演算子のべき乗の積であるフォック空間の任意の要素をとろう．整数 n_l^i が，ローレンツ添字 i とレベル数 l をもつ特定の状態の生成振動子の数を表すとする．こうすると，ヒルベ

ルト空間の任意の状態は

$$|\{n\}\rangle = c\prod_{i,l}(a_{i,-l})^{n_l^i}|0\rangle \tag{6.3.14}$$

と書ける．ここでこの状態は，任意の一連の生成演算子の積であるが，規格化定数を，

$$c = (\langle\{n\}\,|\,\{n\}\rangle)^{-1/2} \tag{6.3.15}$$

ととって

$$\langle\{n\}\,|\,\{m\}\rangle = \delta_{\{n\},\{m\}} \tag{6.3.16}$$

とする．こうすればこれらの状態は，正規直交基底をなすように規格化できる．実はこの基底は完全である．すなわち，

$$1 = \sum_{\{n\}}|\{n\}\rangle\langle\{n\}| \tag{6.3.17}$$

(6.3.14)の $|\{n\}\rangle$ と，(6.3.11)の弦の固有状態 $|X\rangle$ の行列要素はちょうどエルミート多項式の積を与える：

$$\langle X|\,\{n\}\rangle = H_{\{n\}}(X)e^{-\sum_{i,n}X_{i,n}^2}. \tag{6.3.18}$$

ここで，$|\{n\}\rangle$ の有用な性質をいくつか調べておこう．場の汎関数をこの正規直交基底でべき展開すれば，(1.8.12)

$$|\Phi\rangle = \sum_{\{n\}}\phi_{\{n\}}|\,\{n\}\rangle \tag{6.3.19}$$

を

$$\langle X|\Phi\rangle = \sum_{\{n\}}\phi_{\{n\}}H_{\{n\}}(X)e^{-\sum_{i,n}X_{i,n}^2}$$

に一般化できる．このような 2 つの場の汎関数の内積は容易に計算でき，

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \sum_{\{n\}}\psi_{\{n\}}^*\phi_{\{n\}} \tag{6.3.20}$$

となる．また，

$$\delta_{\{n\},\{m\}} = \int \phi_{\{n\}}^*\phi_{\{m\}}\exp\left(-\sum_{\{n\}}|\phi_{\{n\}}|^2\right)D^2\phi \tag{6.3.21}$$

も示すことができる．ここで，この空間の積分の測度は，

$$D^2\phi = \prod_{\{n\}}d\phi_{\{n\}}d\phi_{\{n\}}^* \tag{6.3.22}$$

で与えられる．これらの恒等式を用いれば，数 1 が(6.2.13)と同様な形

$$1 = \int|\Phi\rangle D^2\Phi\langle\Phi|\exp(-\langle\Phi|\Phi\rangle) \tag{6.3.23}$$

に書けることが示せる．この式を証明するには，(6.3.23)に(6.3.19)を代入して係数についての積分を具体的に実行すればよい：

$$
\begin{aligned}
1 &= \left[\sum_{\{n\}} \int \phi_{\{n\}} |\,\{n\}\rangle\right] \prod_{\{m\}} d^2\phi_{\{m\}} \left[\sum_{\{p\}} \phi^*_{\{p\}} \langle\{p\}\,|\right] e^{-\langle\Phi|\Phi\rangle} \\
&= \sum_{\{n\},\{p\},\{m\}} \phi_{\{n\}} |\,\{n\}\rangle\langle\{p\}\,|\phi^*_p \int d^2\phi_{\{m\}} e^{-\sum_{\{q\}} |\phi_{\{q\}}|^2} \\
&= \sum_{\{n\},\{p\}} |\,\{n\}\rangle\langle\{p\}\,|\delta_{\{n\},\{p\}}.
\end{aligned}
\tag{6.3.24}
$$

これは1であり，(6.3.23)が正当化できた．

2つの弦状態 $|X\rangle$ と $|Y\rangle$ の間の行列要素は，$|\Phi\rangle$ によっても書ける．すなわち，

$$
\begin{aligned}
\langle X|Y\rangle &= \prod_{i=1}^{24} \prod_{0\leq\sigma\leq\pi} \delta(X_i(\sigma) - Y_i(\sigma)) \\
&= \langle X|\Phi\rangle \int D^2\Phi \langle\Phi|Y\rangle \exp\left(-\langle\Phi|Z\rangle \int DZ \langle Z|\Phi\rangle\right) \\
&= \int D^2\Phi\Phi^*(X)\Phi(Y) e^{-\int DZ\,\Phi^*(Z)\Phi(Z)}.
\end{aligned}
\tag{6.3.25}
$$

弦のシュレディンガー方程式を出す前に，(6.2.17)を一般化しておく必要がある：

$$
1 = \int |\Phi_1\rangle D^2\Phi_1 D^2\Phi_2 e^{-\langle\Phi_1|\Phi_2-\Phi_1\rangle - \langle\Phi_2|\Phi_1\rangle} \langle\Phi_2|. \tag{6.3.26}
$$

前のようにこの恒等式は，Φ_1^* について汎関数積分することにより，もっとも容易に証明できる．

これですべての恒等式が得られたので，まず無限小に近い2つの弦状態の間の行列要素を考えよう：

$$
\langle X_1|e^{-iHd\tau}|X_2\rangle. \tag{6.3.27}
$$

この行列要素は，第1量子化の描像で運動量の固有状態の完全系を挿入するか，第2量子化の描像で場の汎関数の完全系を挿入して表すことができる．つまり，

$$
\begin{cases}
\text{第 1 量子化}：1 = |P\rangle \displaystyle\int DP \langle P| \\
\text{第 2 量子化}：1 = |\Phi\rangle \displaystyle\int D^2\Phi e^{-\langle\Phi|\Phi\rangle} \langle\Phi|
\end{cases}
\tag{6.3.28}
$$

1.3節のステップを再びたどれば，運動量固有状態を挿入し，第1量子化の形式で無限小グリーン関数が求まった：

$$
\begin{aligned}
\langle X_1|e^{-iHd\tau}|X_2\rangle &= \langle X_1|P\rangle \int dP \langle P|e^{-iHd\tau}|X_2\rangle \\
&= \int DP\, e^{-iH(X,P)d\tau} e^{i\int d\sigma\, P(X_1-X_2)} \\
&= \int DP\, e^{i\int d\sigma\, P\dot{X}\, d\tau} e^{-iH(X,P)d\tau}.
\end{aligned}
\tag{6.3.29}
$$

ここで $\langle P|X\rangle \sim e^{i\int d\sigma P_\mu X^\mu}$ を用いた．そして，始点および終点の間の各無限小間隔の間に第 1 量子化した無限個の中間状態を入れた：

$$\begin{aligned}\langle X_1|e^{-iH\tau}|X_N\rangle &= \int_{X_1}^{X_N} DX\,DP\,e^{i\int_{\tau_1}^{\tau_N} d\tau\,d\sigma(P\dot{X}-H)} \\ &= \int_{X_1}^{X_N} DX\,DP\,e^{i\int_{\tau_1}^{\tau_N} d\tau\,d\sigma\,L}. \end{aligned} \tag{6.3.30}$$

ここで $L = P\dot{X} - H$ である．

こうして第 1 量子化した弦理論で，ハミルトニアンとラグランジアン形式の間を行き来できたのである．

そこでこのすべてのステップをくり返すことにして，われわれの作用に第 2 量子化した場の汎関数の完全系を挿入しよう．無限小の遷移振幅から出発しよう：

$$\begin{aligned}\Delta_{12} &= \langle X_1|e^{-iH d\tau}|X_2\rangle \\ &= \langle X_1|X_2\rangle - i\langle X_1|H\,d\tau|X_2\rangle + \cdots \\ &= \int D^2\Phi_{12}\langle X_1|\Phi_1\rangle\langle\Phi_2|X_2\rangle \exp\{-\langle\Phi_1|\Phi_2-\Phi_1\rangle - \langle\Phi_2|\Phi_1\rangle\} \\ &\quad - i\int D^2\Phi_{1234}\langle X_1|\Phi_1\rangle\langle\Phi_2|H\,d\tau|\Phi_3\rangle\langle\Phi_4|X_2\rangle \\ &\quad \times \exp\left\{-\sum_{i=1,3}\langle\Phi_i|\Phi_{i+1}-\Phi_i\rangle - \langle\Phi_{i+1}|\Phi_i\rangle\right\} + \cdots. \end{aligned} \tag{6.3.31}$$

前のように，ここで極限をとって

$$\sum_i \langle\Phi_i|\Phi_{i+1}-\Phi_i\rangle \to \int d\tau\langle\Phi|\dot{\Phi}\rangle$$

とする．次に，この中間状態の完全系を始の弦の配位と終の弦の配位の間のすべての無限小区間に挿入する．そうすると，行列要素は

$$\Delta_{1N} = \int \Phi^*(X_1)\Phi(X_N)D^2\Phi \exp\left[i\int d\tau\langle\Phi|(i\partial_\tau - H)|\Phi\rangle\right] \tag{6.3.32}$$

となる．これがこの節の主要な結果である．したがって，第 2 量子化した作用は [1]

$$L = \Phi^*(i\partial_\tau - H)\Phi \tag{6.3.33}$$

である．以上をまとめると，自由な光錐の弦理論に対して第 1 と第 2 量子化の形式が同等であることを示した．(6.3.28)を用いて，グリーン関数が第 1 量子化と第 2 量子化の言葉のいずれでも書けることを示したのである：

$$\begin{aligned}\Delta_{ij} &= \int_{X_i}^{X_j} DX\ \exp\left[i\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\,L(\tau)\right] \\ &= \int D^2\Phi\,\Phi^*(X_i)\Phi(X_j)\exp\left[i\int d\tau\int_{X_i}^{X_j} L(\Phi)DX\right]. \end{aligned} \tag{6.3.34}$$

ここで,

$$L(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\sigma \left\{\dot{X}_i^2 - X_i'^2\right\} \tag{6.3.35}$$

$$H = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} d\sigma \left(P_i^2 + \frac{X_i'^2}{\pi^2}\right) \tag{6.3.36}$$

である．この第2量子化した場の理論の作用は，弦の伝播のグリーン関数を再現するという要求から導いたものである．この導出は，自由弦に対しては第1と第2量子化の間に強い類似があることを示している．(しかしこの類似は，相互作用を論じる際にはまったく破れてしまう.)

ここでわれわれの作用を量子化しよう．この作用から導かれる運動方程式は,

$$(i\partial_\tau - H)\Phi(X) = 0 \tag{6.3.37}$$

である．特定の基底の状態に対応するエネルギーは,

$$\begin{aligned} H|\{n\}\rangle &= E_{\{n\}}|\{n\}\rangle \\ E_{\{n\}} &= \frac{1}{2p^+}\Big(\sum_{i,l} l n_l^i + \alpha' p_i^2\Big) \end{aligned} \tag{6.3.38}$$

で与えられる．これらの係数の x^- に関するフーリエ変換をとるのが便利である：

$$\phi_{\{n\}}(x^+, x^-, X_i) \to \phi_{p^+,\{n\}}(\tau, X_i). \tag{6.3.39}$$

係数は運動方程式をみたさなければならない：

$$\phi_{p^+,\{n\}}(\tau, X_i) = \int dp_i e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - E_{\{n\}}\tau)} A_{p^+,p_i,\{n\}}. \tag{6.3.40}$$

ここで新しい演算子 A を導入したことに注意せよ．これは状態 $\{n\}$ に付随した生成または消滅演算子になっている．重要なことは，A は第1章で導入した $a_n^\dagger$ と同じものではないことである．$a_n^\dagger$ は弦の1つのモードを作るが，A は $a_n^\dagger$ のすべての可能な積によって張られるヒルベルト空間の要素を，生成したり消滅したりするのである．つまり A は，無限成分の場の理論上に定義された状態を生成したり消滅したりする．それは，交換関係

$$[A_{p^+,p_i,\{n\}}, A^\dagger_{q^+,q_j,\{m\}}] = \delta(p^+ - q^+)\delta(p_i - q_i)\delta_{\{n\},\{m\}} \tag{6.3.41}$$

をみたしている．以上を組み合わせれば，平面波による場の汎関数の展開

$$|\Phi\rangle = \sum_{\{n\}}\int\prod_i dp_i\, A_{p^+,p_i,\{n\}} e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - E_{\{n\}}\tau)}|\{n\}\rangle \tag{6.3.42}$$

が得られる．またこのべき展開を，X 基底によって表すこともできる((1.8.21)を見よ)：

$$\begin{aligned} \langle X|\Phi\rangle &= \Phi_{p^+}(X) \\ &= \sum_{\{n\}}\int\prod_i dp_i A_{p^+,p_i,\{n\}} H_{\{n\}}(X) e^{-\sum_{i,n} X_{i,n}^2} e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - E_{\{n\}}\tau)}. \end{aligned} \tag{6.3.43}$$

これで第2量子化した弦の場の理論の正準交換関係を出せるところまできた．場を正規直交多項式によってべき展開したので，容易に

$$[\Phi_{p^+}(X,\tau),\Phi^\dagger_{q^+}(Y,\tau)]=\delta(p^+-q^+)\prod_i\prod_\sigma\delta(X_i(\sigma)-Y_i(\sigma)) \tag{6.3.44}$$

を示すことができる．

次に A 振動子の真空を $|0\rangle\rangle$ で表そう．この真空状態は，Φ に含まれるすべての高次スピン場の真空の積であることに注意せよ．この状態は無限成分の場の理論の真空であり，したがって $|0\rangle$ とは何の関係もない．前の恒等式を用いれば，場の汎関数によるグリーン関数の表式

$$\begin{aligned}\Delta_{12}&=\langle\langle 0|\Phi_{p^+}(X_1,\tau_1)\Phi^*_{q^+}(X_2,\tau_2)|0\rangle\rangle\\&=\delta(p^+-q^+)\int DX\,e^{i\int L\,d\sigma\,d\tau}\\&\quad\times\prod_\sigma\delta(\boldsymbol{X}(\sigma,\tau_1)-\boldsymbol{X}_1(\sigma))\prod_{\sigma'}\delta(\boldsymbol{X}(\sigma',\tau_2)-(\boldsymbol{X}_2(\sigma'))\end{aligned} \tag{6.3.45}$$

が得られる．ここで，始状態と終状態を $\boldsymbol{X}(\sigma,\tau_1)$ と $\boldsymbol{X}(\sigma',\tau_2)$ で表した．重要なことは，自由な弦の伝播のグリーン関数を第1と第2量子化の両方の言葉で表したことである．こうして少なくとも自由場の場合には，これらの2つの形式を行き来できるわけである．これで自由な弦のグリーン関数の具体的表式を書くための道具が得られたが，これは点粒子に対する(6.2.4)を一般化したものである：

$$\begin{aligned}\Delta_{12}=\delta(p^+-q^+)\prod_{k=1}^{\infty}\left[\frac{k}{\pi\sinh(kT/\alpha)}\right]^{\frac12(D-2)}\left(\frac{\alpha}{4\pi T}\right)^{\frac12(D-2)}\exp\left\{-\frac{\alpha}{4T}(\boldsymbol{X}_1^2-\boldsymbol{X}_2^2)\right\}\\\times\exp\left\{k\sinh^{-1}\frac{kT}{\alpha}\left[\cosh\frac{kT}{\alpha}(\boldsymbol{X}_1^2+\boldsymbol{X}_2^2)-2\boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{X}_2\right]\right\}.\end{aligned} \tag{6.3.46}$$

ここで T は時間間隔である．ここでは，第2量子化した場の汎関数により遷移関数 Δ_{ij} を導いたことに注意せよ．

以上をまとめると，始と終の配位の間のすべての弦の配位に中間の弦状態の完全系を直接挿入することにより，自由な光錐の弦の場の作用を導いた．

6.4 相互作用

さて相互作用の問題に移ろう．第1量子化した理論から自由な作用を導出した方法は，第2量子化した場の理論の相互作用を計算できるように一般化できる．再び重要な恒等式

$$1=|\Phi\rangle\int D^2\Phi e^{-\langle\Phi|\Phi\rangle}\langle\Phi| \tag{6.4.1}$$

を経路積分に挿入して，頂点関数を引き出す．

歴史的には，ハイゼンベルグや湯川などの量子物理学の先駆者の多くが非局所場の理論の問題を調べ，そのような理論は因果律を破る，すなわち相互作用が光の速さよ

りも速く伝わることを発見していた．2 つの離れた点 x_1 と x_2 を含む非局所的相互作用は，光の速さより速く情報を伝えることになり禁止されるのである．

弦の場の理論は，奇跡的にこの問題を解決している．この解は簡単で美しいものである．弦の場の理論は非局所場の理論ではなく，**実は多重局所的理論である**ために，因果律と量子力学の法則を破らないのである．弦の相互作用は弦がちぎれたりついたりするものであり，弦が瞬間的にちぎれたりついたりして，それから振動が光の速さ以下で弦を伝わっていくようになっている．このようにして因果律が破れないようになっているのである．

光錐ゲージではすべての対称性が除かれているので，理論の全体的な指導原理がない．そこで次の原理を仮定することにする．

作用で許される相互作用する弦の唯一の形は，弦の局所的位相を瞬時に変えるものだけである．

この原理は光錐ゲージでだけ定義したが，それが場の理論の可能な相互作用をすべて決めるのに十分であることが後でわかる．この新しい局所性の定義と，運動量の保存とに矛盾しない相互作用は 5 つだけある(図 6.2 を見よ)．(光錐の弦のパラメーターの長さを $\alpha = 2p^+$ ととり，運動量保存が弦の長さの和が保存することと同じになるようにする.)　こうして，

$$L_I = \sum_{i=1}^{5} L_i \tag{6.4.2}$$

を仮定する．ここで各項は，開いた弦の場 Φ と，閉じた弦の場 Ψ の特定の相互作用に対応する．記号的にいえば，これら 5 つの相互作用は，

$$L_I = \Phi^3 + \Phi^4 + \Psi^3 + \Phi^2\Psi + \Phi\Psi \tag{6.4.3}$$

と表される．

これらの相互作用のいくつかがどんなものか，局所性の条件と矛盾しないように以下で具体的に書き下す．これら 5 つの相互作用の特定の表現を書き下したら，それらが第 1 量子化の理論で知られている結果を再現することを確かめねばならない．

もっとも簡単な相互作用は，1 つの弦が 2 つの小さな部分にこわれるものである．局所性の条件を課すために，弦はそれにそった内部の 1 点でのみこわれ得る．この破れからくる乱れは，その後光の速さ以下の速度で弦に拡がっていく．それで弦にそった点は，相互作用の境界を横切って連続的であると仮定することにする．運動量保存と局所性に矛盾しない頂点関数の唯一の形は，3 つの弦の連続性を保証する一連のディラックデルタ関数である．この頂点は [1]

$$S_3 = \int dp_r^i \delta\left(\sum_{r=1}^{3} p_r^+\right) \int DX_{123} \Phi^\dagger(X_3)\Phi^\dagger(X_1)\Phi(X_2)\delta_{123} + \text{h.c.} \tag{6.4.4}$$

である．ここで，

$$\delta_{123} = \prod_{\sigma_3} \delta[X_3(\sigma_3) - \theta(\pi\alpha_1 - \sigma)X_1(\sigma_1) - \theta(\sigma - \pi\alpha_1)X_2(\sigma_2)]$$

$$DX_{123} = DX_1 DX_2 DX_3 \tag{6.4.5}$$

である(図 6.3 を見よ). 表記法

$$\begin{gathered} 0 \le \sigma \le \pi(\alpha_1 + \alpha_2) \\ 0 \le \sigma \le \pi\alpha_1 \quad \text{に対し} \quad \sigma_1 = \sigma \\ \pi\alpha_1 \le \sigma \le \pi(\alpha_1 + \alpha_2) \quad \text{に対し} \quad \sigma_2 = \sigma - \pi\alpha_1 \\ 0 \le \sigma \le \pi(\alpha_1 + \alpha_2) \quad \text{に対し} \quad \sigma_3 = \pi(\alpha_1 + \alpha_2) - \sigma \\ \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 0 \end{gathered} \tag{6.4.6}$$

を用いることにする. ここで各弦のパラメーターの長さは $\pi\alpha_i$ であり, X 変数は弦の横波のモードだけを表す.

注目すべきことに, 上の頂点関数の中の DX の積分は簡単なガウス型なので実行することができる. ここで,

$$\Phi_i(X) = \langle X|\Phi_i\rangle \tag{6.4.7}$$

と定義しよう. すると(6.4.4)は

$$S_3 = \int dp_r^+ \delta\left(\sum_{r=1}^{3} p_r^+\right) \langle\Phi_1|\langle\Phi_2|\langle\Phi_3|V_{123}\rangle \tag{6.4.8}$$

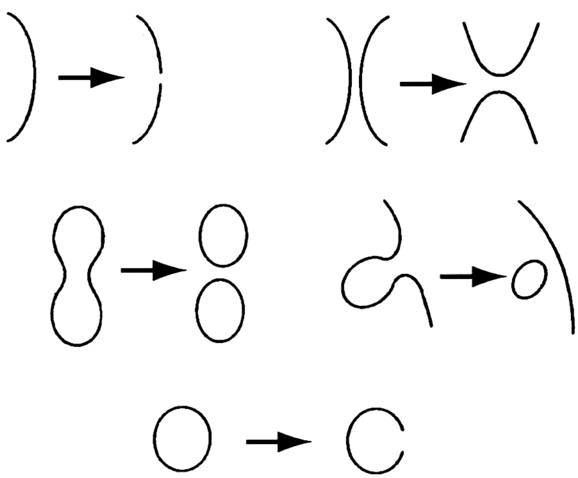


図 6.2 : 光錐の場の理論の 5 つの相互作用. 開と閉の弦は, 破れ, 分裂し, ピンチし得る. 各相互作用は, 弦にそって局所的に起こることに注意せよ. これがすべての非局所点粒子理論で破れていた因果律の問題の解決になっている. このように弦の場の理論は, 因果律を保つ拡がった物体の唯一知られている場の理論である.

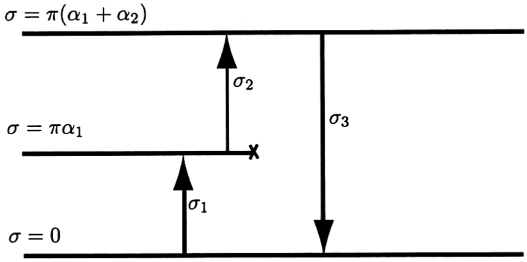


図 6.3：3 弦頂点のパラメーターづけ．各弦のパラメーターの長さは $\pi\alpha_i$ で与えられる．3 つの $\pi\alpha_i$ すべての和は 0 に等しい．

と書き換えることができる．ここで，頂点関数

$$|V_{123}\rangle = \int DX_{123}|X_1\rangle|X_2\rangle|X_3\rangle\delta_{123} \tag{6.4.9}$$

を導入した．(6.3.11)の固有ベクトル $|X\rangle$ は X につき簡単なガウス型なので，DX_{123} についての積分を実行して調和振動子による頂点関数の厳密な公式を得ることができる．

実際の計算は，P 表示の方がもっと便利に行うことができる．フーリエ変換をとることにより，(6.3.11)の X 固有状態を容易に P 固有状態に変えることができる：

$$|P\rangle = k\prod_{i,n}\exp\left(-\frac{1}{4}P_{i,n}^2 + P_{i,n}a_{i,n}^\dagger - \frac{1}{2}a_{i,n}^\dagger a_{i,n}^\dagger\right)|0\rangle. \tag{6.4.10}$$

この表式が正しい固有ベクトル方程式(2.2.9)

$$P_{i,n}|P\rangle = (a_{i,n} + a_{i,n}^\dagger)|P\rangle \tag{6.4.11}$$

をみたすことは容易に確かめられる．

次に，頂点の中の 3 つの弦状態すべての具体的フーリエ分解を，X と P 表示の両方で書き下そう：

$$\begin{cases} P_i^{(r)} = \dfrac{1}{\pi|\alpha_r|}\left(p_i^r + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}p_{i,n}^r\cos\frac{n\sigma_r}{\alpha_r}\right)\theta_r \\ X_i^{(r)} = \left(x_i^r + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}x_{i,n}^r\cos\frac{n\sigma_r}{\alpha_r}\right)\theta_r. \end{cases} \tag{6.4.12}$$

ここで

$$\theta_1 = \theta(\pi\alpha_1 - \sigma);\quad \theta_2 = \theta(\sigma - \pi\alpha_1);\quad \theta_3 = \theta_1 + \theta_2 = 1 \tag{6.4.13}$$

である．

われわれの実行したい積分は，

$$
\begin{aligned}
|V_{123}\rangle &= \int DP_{123} \prod_{i=1}^{3} |P_i\rangle \delta_{123} \\
&= \int DP_{123} \delta\left(\sum_{r=1}^{3} \theta_r(\sigma_r) P_i^{(r)}(\sigma) \right) \\
&\quad \times \prod_{r=1}^{3} \exp\left(-\frac{1}{4} P_{i,n}^{(r)^2} + P_{i,n}^{(r)} a_{i,n}^{(r)\dagger} - \frac{1}{2} a_{i,n}^{(r)\dagger} a_{i,n}^{(r)\dagger} \right) |0\rangle
\end{aligned} \tag{6.4.14}
$$

で与えられる．

この積分はガウス型なので簡単である．唯一面倒なのは，調和振動子で書いたときの(6.4.5)の中のデルタ関数 δ_{123} の具体的な形である．ここで汎関数積分を実行するために，デルタ関数 δ_{123} のフーリエ成分をとり出そう．変数 P の間の拘束方程式の余弦変換をする．余弦および正弦変換はふつうデルタ関数を与える．ところがここでは，3 つの弦がすべて異なる長さをもつので，余弦と正弦の変換はデルタ関数ではなく行列方程式を与える．とくに，

$$
\sum_{r=1}^{3} \theta_r(\sigma_r) P_i^{(r)}(\sigma_r) = P_i^{(3)}(\sigma_3) + P_i^{(2)}(\sigma_2)\theta_2 + P_i^{(1)}(\sigma_1)\theta_1 = 0 \tag{6.4.15}
$$

の式は，余弦変換をすると，

$$
p_{i,m}^{(3)} + \sum_{i=1}^{\infty} (A_{mn}^{(1)} p_{n,i}^{(1)} + A_{mn}^{(2)} p_{n,i}^{(2)}) + B_m^{(1)} p_i^{(1)} + B_m^{(2)} p_i^{(2)} = 0 \tag{6.4.16}
$$

となる．ここで A と B は，余弦関数の間のいろいろな重なり積分である．この恒等式を厳密な等式として要求しないで，この演算子式が頂点関数に作用したときにみたされればよいとする．この δ_{123} を頂点関数 $|V_{123}\rangle$ に作用させたとき 0 になってほしいわけである．それは

$$
\begin{gathered}
\left(\sum_{r=1}^{3} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^{(r)} (a_n^{(r),i} + a_{-n}^{(r),i}) + B_m P^i \right) |V_{123}\rangle = 0 \\
\left(a_m^{(r),i} + a_{-m}^{(r),i} - \frac{\alpha_r}{\alpha_3} \sum_{n=1}^{\infty} (C^{-1} A^{(r)T} C)_{mn} (a_n^{(3),i} + a_{-n}^{(3),i}) \right) |V_{123}\rangle = 0
\end{gathered} \tag{6.4.17}
$$

を意味する [1, 6, 7]．ここで

$$
\begin{aligned}
C_{mn} &= m\delta_{m,n} \\
P^i &= 2p_1^+ p_2^i - 2p_2^+ p_1^i
\end{aligned} \tag{6.4.18}
$$

である．

このようにフーリエ係数は，いろいろな余弦モードのフーリエ変換をとることにより与えられる．3 つの弦はすべて異なる長さをもつので，一般に自明でないフーリエ係数が得られる．具体的に構成することにより，次のフーリエ係数を得る：

$$A^{(1)}_{mn} = 2(n/m)^{1/2}(-1)^m \frac{1}{\pi\alpha_1}\int_0^{\pi\alpha_1} \cos\frac{n\sigma}{\alpha_1}\cos\frac{m\sigma}{\alpha_3}d\sigma$$
$$= -(2/\pi)(mn)^{1/2}(-1)^{m+n}\frac{\beta\sin(m\pi\beta)}{n^2-m^2\beta^2} \tag{6.4.19}$$
$$A^{(2)}_{mn} = 2(n/m)^{1/2}(-1)^m \frac{1}{\pi\alpha_2}\int_{\pi\alpha_1}^{\pi(\alpha_1+\alpha_2)} \cos\frac{n(\sigma-\pi\alpha_1)}{\alpha_2}\cos\frac{m\sigma}{\alpha_3}$$
$$= -(2/\pi)(mn)^{1/2}(-1)^m\frac{(\beta+1)\sin(m\pi\beta)}{n^2-m^2(\beta+1)^2} \tag{6.4.20}$$
$$A^{(3)}_{mn} = \delta_{mn}$$
$$B^{(1)}_m = 2(m)^{-1/2}(-1)^m\frac{1}{\pi\alpha_1}\int_0^{\pi\alpha_1}\cos\frac{m\sigma}{\alpha_3}d\sigma$$
$$= 2\alpha_3(\pi\alpha_1)^{-1}(-1)^m(m)^{-3/2}\sin(m\pi\beta) \tag{6.4.21}$$
$$B^{(2)}_m = 2(m)^{-1/2}(-1)^m\frac{1}{\pi\alpha_2}\int_{\pi\alpha_1}^{\pi(\alpha_1+\alpha_2)}\cos\frac{m\sigma}{\alpha_3}d\sigma$$
$$= -2\alpha_3(\pi\alpha_2)^{-1}(-1)^m(m)^{-3/2}\sin(m\pi\beta). \tag{6.4.22}$$

ここで，$\beta = \alpha_1/\alpha_3$, $B^{(1)}_m = -\alpha_2 B_m$, $B^{(2)}_m = \alpha_1 B_m$ である．

この表式は複雑に見えるかもしれないが，積分はガウス型なので実際の計算は簡単である．積分を実行することにより，頂点関数の具体的形が得られる．まず $P^{(3)}$ の積分をする．これは自明であって，デルタ関数により $P^{(3)}$ は他の 2 つの弦の運動量の結合になる．$P^{(1,2)}$ についての汎関数積分もガウス型なので，容易である．そして項を組み合わせると，調和振動子による頂点関数のコンパクトな形が得られる [1, 6]：

$$|V_{123}\rangle = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{\infty}\sum_{m,n=1}^{\infty}\alpha^{(r)}_{-m}N^{rs}_{mn}\alpha^{(s)}_{-n} + \sum_{r=1}^{3}\sum_{m=1}^{\infty}N^r_m\alpha^r_{-m}\boldsymbol{P} + K\boldsymbol{P}^2\right\}|0\rangle. \tag{6.4.23}$$

ここで，

$$N^{rs}_{mn} = (C^{-1})_{mn}\delta_{rs} - 2(mn)^{-1/2}(A^{(r)T}\Gamma^{-1}A^{(s)}) \tag{6.4.24}$$

および，

$$N^r_m = -(m)^{-1/2}(A^{(r)T}\Gamma^{-1}B)_m;\quad K = -\frac{1}{4}B\Gamma^{-1}B$$
$$P^i = \alpha_1 p^i_2 - \alpha_2 p^i_1;\quad \Gamma = \sum_{r=1}^{3}A^{(r)}A^{(r)T} \tag{6.4.25}$$

である．

ここで今までしたことをまとめておこう．弦の間の唯一の相互作用が局所的なものだけ，つまり弦の位相が瞬時に局所的に変形するものだけが許されると仮定した．こうすることにより歴史的に何十年にもわたって，非局所場の理論を作る試みをはばんでいた因果律の破れの問題を避けた．驚くべきことに，この原理だけで光錐ゲージでの 5 つの弦の相互作用をすべて決定するのに十分である．

ノイマン行列 N^{rs}_{mn} は，重なり条件(6.4.15)から 1 通りにすべて決まっていることに

注意せよ．局所性と運動量の保存則だけで，頂点の厳密な振動子表示を決めるのには十分なのである．

次に，これがふつうの Veneziano 公式を再現することを確かめたい．それには次の 2 つのことを確かめねばならない．

1. これが Veneziano 模型のノイマン関数を再現することを示さねばならない．

2. 光錐の配位 τ からふつうの z 上半平面へ座標変換するときのヤコビアンが，正しいものであることを示さねばならない．

そこでふつうの弦の振幅を再現することを示し，摂動論のレベルで第 1 と第 2 量子化した相互作用する理論が同等であることを以下で示すことにする．

6.5 ノイマン関数の方法

第 2 章で，L 個のハンドルをもつ円板上の汎関数積分を実行できることを見た．

$$A_N = \sum_L \int_{T_L} d\mu\, M_{N,L}\, \exp\left[\sum_{i>j} k_i N(i,j) k_j\right] \tag{6.5.1}$$

ここで $N(i,j)$ は，ハンドルのある円板または上半平面の縁上の点 i と j の間のノイマン関数で，$M_{N,L}$ はすべての測度項を含む．

しかしこのアプローチの欠点は，汎関数積分が円板または上半平面で定義されていることである．共形円板の弦による解釈は明らかでない．弦のアプローチと共形円板の間に関係をつけるために，まず共形変換 $\rho = \ln z$ をしよう．この共形写像により，z 上半平面を ρ 平面内の幅 π をもつ水平の帯に写像する．さらにこの水平な帯は，1 つの自由な弦の掃く面と解釈できる．ここで必要なことは，この写像を N 点関数へ拡張したものである．

Mandelstam [8] にしたがって，上半平面上の次の共形変換を考える：

$$\rho = \sum_i \alpha_i \ln(z - z_i); \quad \sum_i \alpha_i = 0. \tag{6.5.2}$$

ここで各弦のパラメーターの長さは $\pi\alpha_i$ である．この共形写像は上半平面を長い水平の帯に引きのばし，分離した弦の運動に対応したものに変形する．

この変換が上半平面を正しい光錐の図に写像することを，定性的に見ることができる．変数 z が最初実軸上の正の無限大にあるとして，ゆっくりと左へ動いていこう．われわれが実軸上の特異点の 1 つに近づくにつれて，ρ は急速に実軸上の負の無限大へ動いていく．ところが特異点の一つ z_i をとびこえると，対数が虚部をもつようになる：

$$\rho \sim \alpha_i \ln(e^{i\pi} z) = i\pi\alpha_i + \alpha_i \ln z. \tag{6.5.3}$$

したがって ρ 平面では，$\pi\alpha_i$ だけ垂直に上へとび上がる．これは無限大のところで，$\pi\alpha_i$ の弦の底から弦の上へ動くことに対応する．z 平面で左へ動き続けると，ρ 平面の点は右へ動き始める（距離 $\pi\alpha_i$ だけ上へ上がっている）．

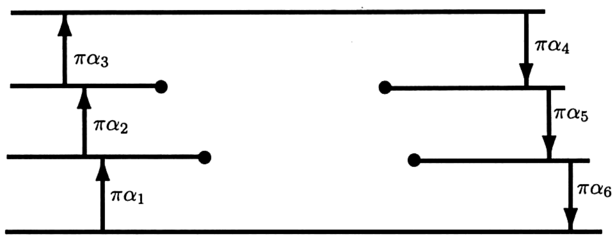


図 6.4：N 点関数のパラメーターづけ．入射(出射)する足は，正(負)のパラメーターの長さをもっている．内部の水平な線の長さを変えることにより，いろいろな場の理論の図が作れ，その和が双対振幅になる．

実軸上の次の特異点 z_{i-1} に向かってさらに動き続けると，奇妙なことが起こる．ある点で，ρ 変数はゆっくりになり，止まって，方向を逆にし，複素平面を負の無限大へ向かって左に動き始めるのである．ρ 平面でのこの転回点は，微分をとり z について解くことにより求まる：

$$\text{転回点：}\quad \frac{d\rho}{dz}=0. \tag{6.5.4}$$

z 平面で z_{i-1} に来ると，ρ 平面の点は負の無限大へ動く．z_{i-1} の点をとびこすと，ρ 平面でさらに $\pi\alpha_{i-1}$ だけ垂直に上に動く．このようにして，z 平面の実軸上を注意して動くことにより，図 6.4 に示した光錐の配位を描くことがわかる．

幸いにも(2.5.7)から，z 上半平面のノイマン関数は 2 つの対数の和であることがわかっている．次にこの同じノイマン関数を，ρ 平面で定義された変数によってべき展開したい．たとえば自由な弦に対しては，τ 方向に座標 ξ を，σ 方向に η をとることができる．すると，

$$z=e^{\zeta}=e^{\xi+i\eta}$$

である．ノイマン関数を ξ と η でべき展開することは，今や簡単である：

$$\begin{aligned} N(z,z') &= \ln|e^{\zeta}-e^{\zeta'}|+\ln|e^{\zeta}-e^{\bar{\zeta}'}| \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}e^{-n|\xi-\xi'|}\cos n\eta\cos n\eta'+2\max(\xi,\xi'). \end{aligned} \tag{6.5.5}$$

この展開がノイマン関数を再現することの証明は，かなり簡単である．第 1 に，関数 $\cos n\eta$ が端点で 0 の σ 微分をもっていて，弦の端点で $X'=0$ と一致していることに注意する．第 2 に，べき展開に ∇^2 を作用させることにより，それが $z=z'$ の点を除いて 0 になることを示せる．次に，$2\max(\xi,\xi')$（これは 2 つの大きい方をとる)の項が，$\xi\to\pm\infty$ にしたときに正しい表式であることが示せる．したがって一意性により，この表式が正しいはずである．

相互作用する弦に対して，ノイマン関数を解いて求めることも同様にできる．まず予想として，ノイマン関数が，

$$N(\rho,\rho') = -\delta_{r,s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cos n\eta_r \cos n\eta'_s \exp[-n|\xi_r - {\xi'}_s|]$$
$$+\sum_{m,n}{}' 2N^{rs}_{mn}\cos m\eta_r \cos n\eta'_s + 2\delta_{rs}\max(\xi,\xi') - 2\eta_3\delta_{r,3} - 2\eta_3\delta_{s,3} + b_{rs} \tag{6.5.6}$$

で与えられるとしよう [8]．ここでプライムは，$n=0, m=0$ の項を除くことを意味し，局所座標を r 番目の弦上で $r=1,2,3$ に対し

$$\rho = \alpha_r(\xi_r + i\eta_r) + 定数 \tag{6.5.7}$$

と直接定義した．ここの定数は適当にとって，座標がもっとも近い転回点から始まるようにする．この展開が正しいことの証明も同じようにしてできる．つまり，この式の右辺の最初の 2 項は，単に自由な弦に由来する項で，方程式 $\nabla^2 N = 2\pi\delta^2(z-z')$ がみたされることを保証することに注意する．次に関数の残りの部分は，ラプラスの方程式の解の $\cos n\eta_r$ によるべき展開にほかならないことに注意する．ノイマン関数は一意的であり，表式はポアッソンの方程式の解なので，それは正しいはずである．

ここまでは何も新しいことはしていない．単にノイマン関数をいろいろな弦座標によるフーリエ展開として書いたにすぎない．上の表式の重要な因子は N^{rs}_{mn} で，これは 3 弦頂点に直接現れるものである．さらにこれらの係数は，ノイマン関数の上半平面での形が 2 つの対数の和とわかっているので具体的に計算できる．上半平面で定義されたこのノイマン関数のいろいろなフーリエ変換をとれば，フーリエ係数 N_{mn} をとり出すことができる．つまり前の方程式の逆をとり，ノイマン係数をノイマン関数により解くのである．ノイマン展開(6.5.5)のフーリエ変換をとれば，

$$N^{rs}_{n0} = \frac{1}{n}\oint_{x_r}\frac{dz}{2\pi i}\frac{1}{z-x_s}e^{-n\zeta(z)}, (n>0)$$
$$N^{rs}_{mn} = -\frac{1}{mn(2\pi)^2}\oint_{x_r} dz \oint_{x_s} dz' \frac{e^{-m\zeta_r(z)-n\zeta_s(z')}}{(z-z')^2} \tag{6.5.8}$$

$(x_1=1, x_2=0, x_3=\infty)$ を得る [6]．上半平面で定義されているノイマン関数をこの式に代入し適当な変数変換をすれば，ノイマン係数の具体的公式が得られる．

これで光錐の図に対し定義されているノイマン関数のフーリエモーメントの具体形が得られたので，3 点の場合を考えてみよう．上半平面から 3 弦の配位への変換は，単に

$$\rho = \alpha_1 \ln(z-1) + \alpha_2 \ln z \tag{6.5.9}$$

である．この写像の転回点は，微分をとって計算できる：

$$\frac{d\rho}{dz} = 0 \to z_0 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3}. \tag{6.5.10}$$

こうして，弦がわかれる時刻は，

$$\tau_0 = \mathrm{Re}\ \rho(z=z_0) = \sum_{r=1}^{3}\alpha_r \ln|\alpha_r| \tag{6.5.11}$$

に等しい．著しいことに，写像(6.5.9)は実は逆がとれて，z を ρ で解くことができる．

これは(6.5.8)のような抽象的表式によらずに，すべてのノイマン関数を具体的に計算できることを意味している．

まずノイマン係数を計算するために，3つの弦の上に注意深く座標をおくことから始めよう．たとえば3番目の弦上に，座標 ζ_3 を

$$\zeta_3 = \frac{\rho}{\alpha_3} + i\pi = \xi_3 + i\eta_3 \tag{6.5.12}$$

と定義しよう．ここで α_3 で割ることにより，η パラメーターが0から π まで動くことを保証した．これらの新しい変数により，写像(6.5.9)は，

$$\begin{aligned} -\ln z - \zeta_3 + i\pi &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\ln\left(1 - \frac{1}{z}\right) \\ &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\ln(1 + e^{\zeta_3}e^{-\zeta_3 + i\pi - \ln z}) \end{aligned} \tag{6.5.13}$$

と書ける．新しい変数

$$y \equiv -\zeta_3 + i\pi - \ln z \tag{6.5.14}$$

$$x \equiv e^{\zeta_3} \tag{6.5.15}$$

$$\gamma \equiv -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \tag{6.5.16}$$

を導入すれば，写像(6.5.9)は

$$y = \gamma \ln(1 + xe^y) \tag{6.5.17}$$

となる．幸いなことに，この方程式は，

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma a_n(\gamma) x^n \tag{6.5.18}$$

の形のべき展開により具体的に解ける．(6.5.18)を(6.5.17)に挿入すれば，a_n の具体的な形

$$a_n(\gamma) = \frac{1}{n!}(n\gamma - 1)\cdots(n\gamma - n + 1) \tag{6.5.19}$$

が得られる．z と ζ_3 の表式を(6.5.13)に再び入れれば，

$$\ln z = -\zeta_3 + i\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_1}{\alpha_3} a_n \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right) e^{n\zeta_3} \tag{6.5.20}$$

を得る．そこでこの式を(6.5.6)と比べて，変数 z' を0にする．この極限では，

$$\ln|z| = -\zeta_3 + \sum_{n=1}^{\infty} N_{n0}^{32} \cos n\eta_3 \tag{6.5.21}$$

が得られる．この最後の2つの等式を比べれば，N_{n0}^{32} が a_n に比例することがわかる．

同じ分析を他の弦にすることもでき，最終的にはすべてのノイマン係数を a_n により計算できる．最後の結果は [8]

$$\bar{N}^{rs}_{mn} = -\frac{mn}{m\alpha_r + n\alpha_s}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\bar{N}^r_m\bar{N}^s_n$$
$$\bar{N}^r_m = \alpha_r^{-1} f_m(-\alpha_{r+1}/\alpha_r)\exp(m\tau_0/\alpha_r) \tag{6.5.22}$$

である．ここで，$\gamma_r = -\alpha_{r+1}/\alpha_r$ であり，

$$f_n(\gamma_r) = (n\gamma_r)^{-1}\begin{pmatrix} n\gamma_r \\ n \end{pmatrix}; \quad K = -\tau_0/(2\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$$
$$\tau_0 = \sum_{r=1}^{3}\alpha_r \ln|\alpha_r|; \quad P^i = \alpha_1 p_2^i - \alpha_2 p_1^i \tag{6.5.23}$$

である．

一見(6.4.24)の第2量子化した作用から得られた関数と，共形写像から導いた(6.5.22)のノイマン関数は大きく違うように見える．N 行列の最初のものは，重なり積分の逆の積によって定義されている．一方 N 行列の第2のものは，リーマン面上のノイマン関数によって定義されている．

ところが奇跡的に，それらは同じであることが示せる [6, 9]：

$$N^{rs}_{nm} = \bar{N}^{rs}_{nm}$$
$$N^r_m = \bar{N}^r_m.$$

このように2つの導出法は一見まったく異なるように見えるが，正確に同じものが得られるのである．(場の理論で発見されたノイマン係数(6.4.24)と，第1量子化した理論で発見された係数(6.5.22)が同じであることの実際の証明は，2通りにできる．まず一定の境界条件をみたすポアッソンの方程式の解は，一意的であるというよく知られた定理を用いることができる．つまり，両方のノイマン関数がポアッソン方程式の解であって，弦がわかれるときの $\tau = 0$ を横切って連続であることが示せる．したがって，2つの表式はまったく異なるように見えるが実は同じである．しかしこれらの2つの表式が同じであることを，力まかせに示す第2の証明法もある．その証明には，恒等式(6.5.8)による複雑な表式を取り扱うことが必要となる [6]．しかしこの計算の詳細は非常に退屈なものなので，ここに与えないことにする.)

次のステップは，光錐の場の理論で Veneziano 模型が再現されることを証明することである．

6.6 散乱振幅の同等性

まず，光錐の形式で N 点振幅を書き下すことにしよう．振幅は，光錐の点粒子の場の理論で発見された振幅を単純に一般化したものである [8]：

$$A_N = \int \prod_{i=2}^{N-1} d\tau_i \int \prod_{r,n,i} dP^{(r)}_{i,n}\Psi_{(r)}(P^{(r)}_{i,n})W. \tag{6.6.1}$$

ここで，

$$W = [\det\Delta]^{-12} \prod_r (\alpha_r)^{\frac{1}{2}} e^{-\sum_r \frac{1}{2} P_r^- \tau_r}$$
$$\times \exp\left(\frac{1}{4}\sum_{r,s}\int d\sigma'\, d\sigma'' P_r^i(\sigma') N(\sigma', \tau_r; \sigma'', \tau_s) P_s^i(\sigma'')\right) \tag{6.6.2}$$

であり，$\Psi^{(r)}$ は r 番目の外の弦の入射または出射状態ベクトル，τ_i は相互作用時刻，P^- は表式を質量殻条件をみたす振幅に変えるのに必要なフーリエ変換の成分，$P_r(\sigma)$ は(高次共鳴の任意の集合を表す)弦についてひろがった運動量分布を表すとする．

この振幅には，2つの問題がある．

1. ノイマン関数は，横運動量の励起についてしかない．それで全体の表式が，実は縦運動量の因子も含んでいて，ローレンツ不変であることを示さねばならない．
2. 弦の場の理論にある相互作用の時刻変数 τ_i を，ふつうの木庭(Koba)-Nielsen 変数 z_i に変換しなければならない．これにはヤコビアンが必要で，それは一般に非常に複雑である．

最初の問題，横と縦の因子が定性的に違うように出てきて，振幅が一見非相対論的形をしている点を解決しよう．実はこれは錯覚である．この表式をローレンツ不変な積分にするトリックがある．τ 変数はラプラスの方程式の解であることに注意せよ．τ は正しい境界条件をみたすので，無限大での各外線についての線積分

$$\tau = \frac{1}{2\pi}\sum_r \int d\sigma'\, N(\sigma, \tau; \sigma', \tau_r) \tag{6.6.3}$$

として書くことができる [8]．(これは少々奇妙な恒等式で，τ をそれ自身を含む表式で表している．この式を証明するには，(2.5.6)の両辺に τ' をかけ，2次元空間についての積分を実行すればよい．部分積分により注意深く項を消してやることにより上の式が得られる．) こうして τ 変数を，そのノイマン関数で置き換えることができ，

$$\sum_r P_r^- \tau_r = \frac{1}{2\pi}\sum_{r,s} P_r^- \int d\sigma'\, N(\sigma, \tau_r; \sigma', \tau_s)$$
$$= \frac{-1}{\pi^2}\sum_{r,s}\frac{P_r^- p_s^+}{\alpha_r \alpha_s}\int d\sigma \int d\sigma'\, N(\sigma, \tau_r; \sigma', \tau_s) \tag{6.6.4}$$

と書ける．$P^- p^+$ を含むこのノイマン関数への縦の寄与を，$P_i P_j$ を含む横方向の寄与に加えれば，完全にローレンツ不変なノイマン関数を得る．このように，$P^-\tau$ の形の項が $P_i P_j$ の項を共変化するのに必要な部分にちょうどなっているのである．

こうして積分がローレンツ不変であることを示すという最初の問題は，静電気の一意性の定理の簡単な帰結にすぎないことがわかった．また相互作用時刻 τ_i を木庭-Nielsen 変数に変えるという第2の問題も，一意性の定理を用いて解決できる簡単な問題である．

そのために，ヤコビアン

$$J = \det\left[\frac{\partial \tau_i}{\partial x_j}\right] \tag{6.6.5}$$

を計算したい．ここで x_i はふつうの実軸上の Veneziano 変数である．

$x_1 = 0, x_{N-1} = 1, x_N = \infty$ の系を選ぼう．このヤコビアンを，因子

$$\prod_i |c_i|^{1/2} \tag{6.6.6}$$

と比べる．ただし，

$$c_i = \left.\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}\right|_{z=x_i}; \quad \rho = \sum_i \alpha_i \ln(x_i - z) \tag{6.6.7}$$

である．

ヤコビアンと変換の微分を含む因子が，同じ解析的構造をもっていることに注意せよ．両方ともいろいろな x_i が近づくとき同じ特異性をもち，同じ境界条件をみたす．したがって数因子を除いて，これらは同じはずである．この全体の定数を計算するには，x_i の間隔を広くとり，

$$\rho(z_i) = \ln x_i \sum_{s \le i} \alpha_s \tag{6.6.8}$$

として，

$$J = \sum_{i=2}^{N-2} x_i^{-1} \left| \sum_{s \le i} \alpha_s \right| \tag{6.6.9}$$

とすればよい．（さらに 4 点の配位について定義されたラプラシアンの行列式と，ノイマン関数の $0-0$ 成分を含む複雑な項もある．解析的構造と特異性に注意してみると，これらの項は互いに相殺することがわかる．それが実際に相殺することは，4 点関数に対し [6] で初めて示された．ループを含めて任意の場合に相殺することは [12] で示された.） こうしてヤコビアンを自明な因子 [10–12]，すなわちいろいろな木庭-Nielsen 変数の積に帰着できた．以上をまとめれば，

$$A_N = \int \prod_{i,n} \Psi(P_{i,n}^{(r)}) \times \int d\mu \prod_{i<j} \exp\left(\frac{1}{4} \sum_{r,s} \int d\sigma' \, d\sigma'' \, P_\mu^{(r)}(\sigma') N(\sigma', \tau_r; \sigma'', \tau_s) P^{(s)\mu}(\sigma'') \right) \tag{6.6.10}$$

を得る．任意の外線の共鳴状態のかわりにタキオンをとれば，前と同じに，

$$A_N = \int d\mu \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{k_i \cdot k_j} \tag{6.6.11}$$

を得る．こうして N 点振幅が再現される．

6.7　4 弦相互作用

前に直観により，2 つの弦が内部で組み合って瞬間的にその局所的位相を変える 4 弦の相互作用を仮定した [1]．一見上半平面はいつでも平面的な配位に写像されるの

で，ノイマン関数の方法にこの図は現れるようには思えない．ところが，4弦(と他のすべての)相互作用項が Veneziano 振幅に存在することは，木庭-Nielsen 変数の積分領域を厳密に調べればわかる．

4弦の写像から出発して，$x_1 = 1, x_2 = \infty, x_3 = 0, x_4 = x$ とおくと，4弦の写像は，

$$\rho = \alpha_1 \ln(z-1) + \alpha_3 \ln z + \alpha_4 \ln(z-x) \tag{6.7.1}$$

となる．どこで写像が特異的になるかを見るために，

$$\frac{d\rho}{dz} = 0 \tag{6.7.2}$$

とおこう．この式を解くと，変換の転回点

$$z_\pm = \frac{1}{2(1-\gamma_1)}\left\{1 + (\gamma_2 - \gamma_1)x \pm \Delta^{1/2}\right\} \tag{6.7.3}$$

が得られる．ここで

$$\gamma_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}; \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2}; \quad \Delta = x^2(\gamma_2-\gamma_1)^2 + 2x(2\gamma_1\gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_2) + 1 \tag{6.7.4}$$

である．

ふつうは平方根の ± で与えられる転回点方程式の2つの解は，互いに通過する自由度をもつリーマン面上の2つの転回点があることを示している．s と t チャンネルの図で，弦の世界面は互いになめらかに移りかわるのである．ところが，ρ 平面で2つの相互作用点の虚部が一致するときには面白いことが起こる．

たとえば，4粒子の t と u チャンネルの散乱のファインマン図を調べよう(図6.5を見よ)．これらの2つの図は，なめらかには互いに移れないことがわかる．弦は図の上の近くか下の近くのどちらかで会わねばならないので，これらの2つの図を連続的に変形することはできない．しかしこれはあり得ない．定義により共形写像は，t から u チャンネルとその逆に連続的に移れるようにするなめらかなものであったからである．言い換えれば，**積分領域の一部が欠けているのである！** これを見るために，t と u チャンネルの図が会うのは正確にいつなのかを計算しよう．Δ を0にして，x について解く：

$$x_\pm = \frac{1}{(\gamma_2-\gamma_1)^2}\left\{\gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_1\gamma_2 \pm 2[\gamma_1(\gamma_1-1)\gamma_2(\gamma_2-1)]^{\frac{1}{2}}\right\}. \tag{6.7.5}$$

t と u チャンネルの転回点を与える2つの解があることに注意せよ．$(x_+ < x < \infty)$ の領域が1つの図を与え，$(x_- > x > -\infty)$ の領域が別の図を与えるが，その間の領域はどうなっているのだろうか？

実はこれが欠けている部分である．それは1つのチャンネルの図からもう1つの図への連続的変形で，2つの図の局所的位相が瞬間的に他方へ変形するものを表している(図6.6を見よ)．

この中間の領域では，4つの弦の局所的位相が変化して弦が異なる形に再びつながっているのである．こうしてこれは，前に仮定した4弦の相互作用が(t と u チャンネル

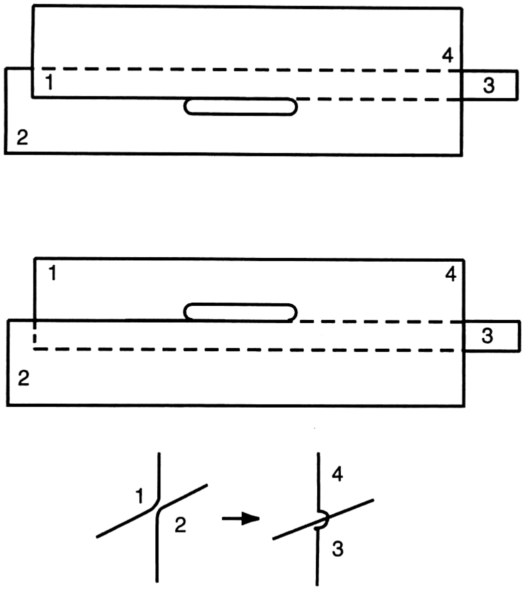


図 6.5：4 弦相互作用．3 弦相互作用だけを使うのであれば，t と u チャンネルの 4 弦散乱図を連続的に互いに変形することはできない．共形写像は連続なので，これは積分領域に欠けている部分があることを意味する．それは新しい 4 弦相互作用を仮定することによってのみ補われる．

の図に対する）Veneziano 公式の一部であることの，グラフによる証明となっている．この欠けている部分がなければ弦の場の理論は不完全で，共形不変性と S 行列の他の性質をこわしてしまう．

したがって 4 弦相互作用は，$d\sigma$ について余分の積分を必要とする．これは 4 つの弦の位相を局所的に変えることを許す「ジッパー」のようなものである．最初はこの相互作用が，光の速さより速く起こると思うかもしれない．$d\sigma$ 積分は瞬間的なので，4 弦相互作用が時間について瞬間的に起こっているように見える．そのため因果的理論を作るためにもともと要求した局所性の仮定を，ここで破っているように思える．

この謎の解決は，4 弦相互作用が Yang-Mills 理論をクーロンまたは光錐ゲージで量子化したときに出るクーロン相互作用に類似しているということにある．クーロンゲージでは，場 A_0 が(時間微分なしに) $A_0\nabla^2 A_0$ の 2 次の形で表れ，フェルミオンとの結合 $A_0\bar{\psi}\gamma^0\psi$ に線形に表れる．A_0 について汎関数積分すれば，

$$\bar{\psi}\gamma^0\psi\nabla^{-2}\bar{\psi}\gamma^0\psi$$

を得る．これが 4 フェルミオンクーロン項である．演算子 ∇^{-2} は，瞬間的演算子(すなわち時間依存性がない)であることに注意せよ．この項は一見相対論を破っているが，実はこの項があっても S 行列は厳密に因果的である．これはゲージ固定のなせるわざであり，完全な S 行列を計算すればいかなるみかけ上の因果律の破れも消えるのである．

特殊相対論が一見破れるように見えるのは錯覚にすぎない．4 弦相互作用のジッパー

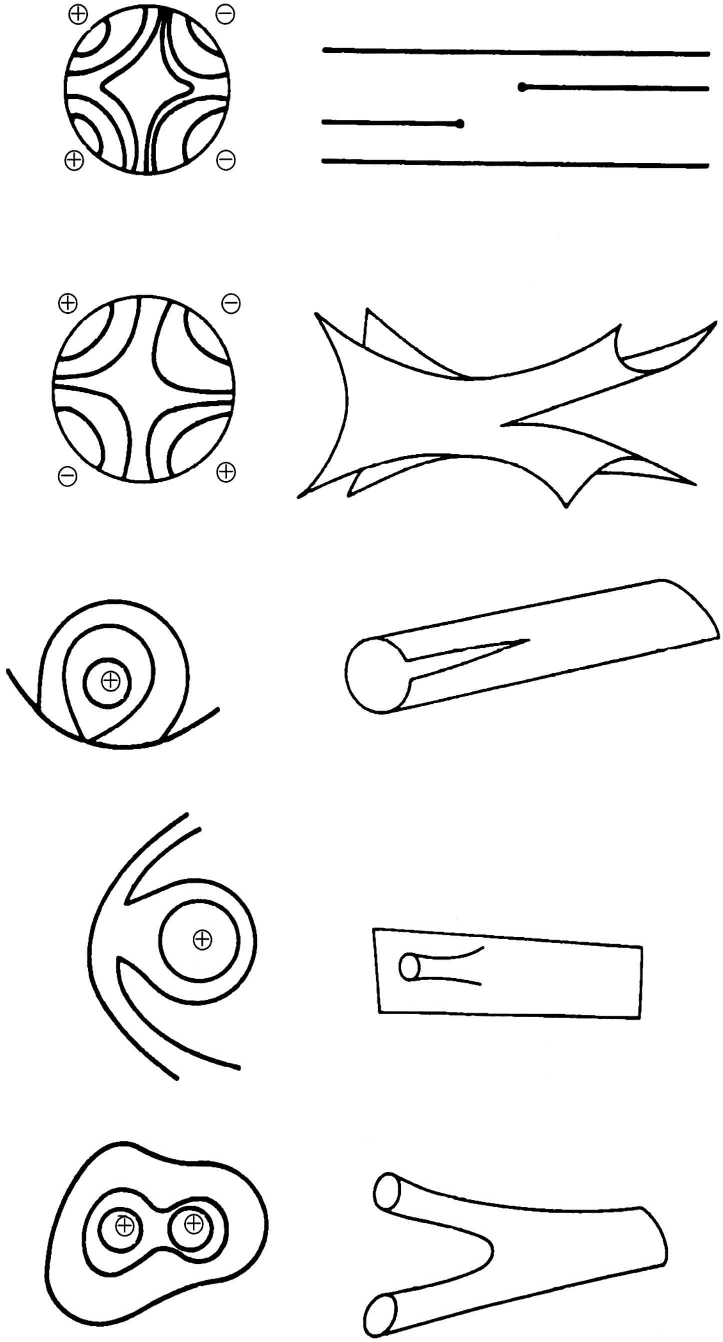


図 6.6：弦の相互作用の位相．外のチャージで円板上に描くことのできる等ポテンシャル線は，弦の相互作用に同型である．円板の反対側に同じチャージがあれば，等ポテンシャル線はちょうど中心でぶつかり，その位相を再編成する．これが 4 弦相互作用である．同様に，すべての許される 5 つの相互作用もこのように容易に表せる．

についての積分 $d\sigma$ は，特殊相対論と矛盾していない．

さて，場の理論の作用に対して 4 弦相互作用項を書き下そう．4 弦の相互作用は単に局所性を課すだけで推測できるが，すでに見たように，それは Veneziano 振幅と一致することを強調しておく．相互作用項は [1]

$$S_4 = \int DX_{1234} \int dp_r^+ \delta\left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i\right) \mu \Phi^*_{p_1^+}(X_1)\Phi^*_{p_2^+}(X_2)\Phi_{p_3^+}(X_3)\Phi_{p_4^+}(X_4)\delta_{1234} \tag{6.7.6}$$

である．ここで，μ は測度の項であり，

$$\delta_{1234} = \prod_{\sigma_4} \delta\left(X_4(\sigma_4) - \sum_{i=1}^{2} X_i(\sigma_i)\theta_i\right) \prod_{\sigma_3} \delta\left(X_3(\sigma_3) - \sum_{i=1}^{2} X_i(\sigma_i)\bar{\theta}_i\right)$$

である．また，

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} \alpha_i &= 0 \\
\alpha_1 < 0; \quad \alpha_2 < 0; \quad \alpha_3 > 0; \quad \alpha_4 > 0 & \\
y < \sigma_4 < \pi\alpha_4 \quad \text{ならば} \quad \sigma_1 &= \pi\alpha_4 - \sigma_4 \\
0 < \sigma_3 < x \quad \text{ならば} \quad \sigma_2 &= \pi|\alpha_1| - \sigma_3 \\
x < \sigma_3 < \pi\alpha_3 \quad \text{ならば} \quad \sigma_2 &= \pi\alpha_3 - \sigma_3 \\
0 < \sigma_4 < y \quad \text{ならば} \quad \sigma_2 &= \pi|\alpha_2| - \sigma_4 \\
y &= x + \pi(\alpha_4 - |\alpha_1|)
\end{aligned} \tag{6.7.7}$$

および，

$$\theta_1 = \theta(\sigma_4 - y); \quad \theta_2 = \theta(y - \sigma_4); \quad \bar{\theta}_1 = \theta(\sigma_3 - x); \quad \bar{\theta}_2 = \theta(x - \sigma_3)$$

である．

4 弦相互作用は具体的に計算できるが，これを N 点振幅に拡張するのはとても無理に思える．退屈でも調べておかねばならない可能な図が，何百もあるからである．ところが，この問題をとても簡単にしてくれる便利なトリックがある．

まず外からの電荷 q_i を円形の円板におくと，円板の中の等ポテンシャル線は容易に描けることに注意する．鍵となる点は，共形写像がこれらの等ポテンシャル線を光錐の図の鉛直の線へ写像することである．このようにして，**等ポテンシャル線の位相が，相互作用する開弦と閉弦の正確な位相を再現する**．この著しい事実が一見絶望的な仕事を，外からの電荷がある円板に等ポテンシャル線を描くという比較的簡単な問題に帰着させてくれるのである．

たとえば，$\tau = \mathrm{Re}\,\rho(z) = \sum_i \alpha_i \ln|z - z_i|$ であることがわかっている．ところが，一連の点電荷 q_i で作られる点 $\boldsymbol{r}$ での 2 次元の静電ポテンシャルは，

$$\text{ポテンシャル} = \sum_i q_i \ln|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|$$

で与えられることもわかっている．τ を点電荷 α_i で作られる静電ポテンシャルと再解

釈できることに注意しよう．したがって等ポテンシャルの線は，まさに τ の同じ値の線になっている．Mandelstam の帯にそって伝播する弦は，ちょうど垂直の線で同じ τ の線に対応している．したがって，**電荷 α_i で作られる任意の共形面の等ポテンシャル線は，相互作用する弦の物理的発展に対応している**のである．

図 6.6 から光錐の形式では，4 弦頂点も存在しなければならないことは明らかである．実は等ポテンシャルの図を分析することにより，正確に 5 つの異なる相互作用項を経路積分に付け加えなければならないことが示せる．ここで閉じた弦の相互作用が，開いた弦の部分から「束縛状態」として現れることに注意せよ．相互作用ラグランジアンは，これら 5 つの異なる項すべての和でなければならないことがわかる．

6.8　超弦の場の理論

NS-R と GS 作用の両方とも，光錐の第 2 量子化した場の理論として表すことができる [13]．これをすると新しい特徴が生じる．

1. 場の汎関数 Φ は SO(8) の $\mathbf{8}$ または SU(4) の $\mathbf{4}+\bar{\mathbf{4}}$ と表せるスピノール場の汎関数でもある．
2. 理論には，相互作用するボソン項を相互作用するフェルミオン項へ写像する超対称性の生成子がある．これが可能な相互作用に強い制限を与える．
3. ボソンの理論と違って，弦がこわれる点で特定の挿入項を付け加えなければならない．この余分の挿入をしないと，理論は超対称にもローレンツ不変にもならないのである．

作用が明白に超対称な光錐ゲージの GS 作用を議論しよう．第 1 量子化した光錐の作用は，(3.8.3) に与えられている：

$$S_{\mathrm{lc}} = \frac{-1}{4\pi\alpha'}\int d^2z(\partial^\alpha X^i\partial_\alpha X^i - 2i\alpha' p^+\bar{\theta}^a\gamma^\alpha\partial_\alpha\theta^a). \tag{6.8.1}$$

ここで $\theta^{1,2}$ は SO(8) 空間の 8 成分のスピノールであり，同時に 2 次元で 2 成分のスピノールでもある．10 次元ではディラックスピノールは 32 複素成分をもち，マヨラナスピノールは 32 実成分をもち，マヨラナ-ワイルスピノールは 16 実成分をもち，光錐ゲージではこのスピノールは SO(8) の下で変換する 8 実成分をもつことを思い出そう．

この作用を量子化する際には，フェルミオンが自己共役であることが問題になる．等式

$$\pi^a = \frac{\delta L}{\delta\dot{\theta}^a} \sim \theta^a \tag{6.8.2}$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned}&\left\{\theta^{1a}(\sigma),\theta^{1b}(\sigma')\right\} = \left\{\theta^{2a}(\sigma),\theta^{2b}(\sigma')\right\} \sim \delta^{ab}\delta(\sigma-\sigma')\\&\left\{\theta^{1a}(\sigma),\theta^{2b}(\sigma')\right\} = 0\end{aligned} \tag{6.8.3}$$

これは正準形でないことに注意しよう．これらの場は自己共役であり，フェルミオン場は Clifford 代数をなしている．この問題を逃れるもっとも簡単な方法は，スピノー

ルの 8 状態を $4+4$ の状態にわけて，一方の 4 状態を他方の 4 状態の共役とすることである．一つのやり方は，SO(8) の SU(4) 部分群を用いることである：

$$\mathrm{SO}(8) \supset \mathrm{SO}(6) \otimes \mathrm{O}(2) = \mathrm{SU}(4) \otimes \mathrm{U}(1). \tag{6.8.4}$$

この分解の下で，SO(8) の **8** は

$$\mathbf{8} = \mathbf{4} \oplus \bar{\mathbf{4}} \tag{6.8.5}$$

に分解する．そこで，スピノールの 8 成分を

$$\begin{aligned} \theta^{1a} &= (\theta^{1\bar{A}}, \lambda^{1B}) \\ \theta^{2a} &= (\theta^{2\bar{A}}, \lambda^{2B}) \end{aligned} \tag{6.8.6}$$

と分解しよう．ここで A と B は 1 から 4 まで動く．表記法

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{4}}: &\quad \theta^{\bar{A}} = \theta_A \\ \mathbf{4}: &\quad \lambda^A = \lambda_{\bar{A}} \end{aligned} \tag{6.8.7}$$

を用いる．この新しい定義により新しい独立変数 $\theta^{\bar{A}}$ が得られ，それは(6.8.3)のようなデルタ関数にはならず，すべてお互いに反交換するようになる．そして正準共役との反交換関係は

$$\left\{\theta^{i,\bar{A}}(\sigma), \lambda^{j,B}(\sigma')\right\} = \delta(\sigma - \sigma')\delta^{\bar{A}B}\delta^{ij} \tag{6.8.8}$$

である．32 複素成分をもつディラックスピノールの分解には，非常に多くの段階があったので，どのようにして 4 つの独立成分を得たかまとめておこう：

ディラック $=$ 32 複素成分

マヨラナ $=$ 32 実成分

マヨラナ-ワイル $=$ 16 実成分

光錐 $=$ 8 成分

正準 $=$ 4 実成分.

SO(8) の SU(4) 部分群によりスピノールを分解したので，ベクトルも SU(4) によって分解する必要がある．ベクトル $A^I, I = 1, 2, \ldots, 8$ は，次のようにわかれる：

$$A^I B^I = A^i B^i + A^L B^R + A^R B^L. \tag{6.8.9}$$

ここで

$$\begin{aligned} A^R &= 2^{-1/2}(X^7 + iX^8) \\ A^L &= 2^{-1/2}(X^7 - iX^8) \end{aligned} \tag{6.8.10}$$

である．

自由な理論に対する最終的な作用は，

$$S = \int D^{16}z[\partial_+\Psi\partial_-\Psi + \mathrm{Tr}(\partial_+\Phi\partial_-\Phi)] \tag{6.8.11}$$

で与えられる．ここで独立な積分変数は

$$D^{16}z = D^8X^I\, D^4\theta^{1\bar{A}}D^4\theta^{2\bar{A}} \tag{6.8.12}$$

で与えられ，Φ は開いた弦の場で，Ψ は閉じた弦の場である．

基本的な場の汎関数は(場にアイソスピンの記号をつけて)

$$\Phi^{ab}[X(\sigma),\theta^1(\sigma),\theta^2(\sigma)] = -\Phi^{ba}[X(\pi\alpha-\sigma),\theta^2(\pi\alpha-\sigma),\theta^1(\pi\alpha-\sigma)] \tag{6.8.13}$$

で与えられる．ここで σ 変数は単に象徴的なものであるが，トゥイストの下でどのように場が変換するかを示すために付け加えてある．

ボソンの場合の(6.3.44)に従い，正準量子化関係

$$\begin{aligned}[\Phi^{ab}(1),\Phi^{cd}(2)] = \frac{1}{2p^+}\delta(\alpha_1+\alpha_2)\,&\{\delta^{ac}\delta^{bd}\Delta^{16}[z_1(\sigma)-z_2(\sigma)] \\ &-\delta^{ad}\delta^{bc}\Delta^{16}[z_1(\sigma)-z_2(\pi|\alpha_2|-\sigma)]\}\end{aligned} \tag{6.8.14}$$

を構成できる．ここで，

$$z = (X^I,\theta^{1\bar{A}},\theta^{2\bar{A}}) \tag{6.8.15}$$

である．

こうして自由な超弦理論ができたので，超弦の相互作用の頂点を構成するという困難な問題にとりかかろう．その場合いくつかの問題点がある．

1. 2種類の振動子があって，重なりデルタ関数から出る別々の連続条件がある．幸いなことに，この2組の振動子は互いに交換し混ざらない．

2. 3弦の接合点に定義される余分の項がある．一般にローレンツ不変性と共形不変性が破れるので，弦上に余分の場を入れてはいけない．ところが弦がこわれるちょうどその点には場を入れてもよい．しかし，その点には特異性があるので注意しなければならない．

3. 最大の制限は超対称性であり，これにより破れる点でのこれらの挿入項の性質が完全に決まってしまう．

頂点関数の議論を始めるにあたって，まずその形を**仮定する**．ボソンの場合との類推により，超弦の頂点は，

$$|V\rangle = Z_i\exp[\Delta_0+\Delta_S]|0\rangle\delta\Big(\sum_r\alpha_r\Big)\delta\Big(\sum p_r^I\Big)\delta\Big(\sum\alpha_r\theta_r^{\bar{A}}\Big) \tag{6.8.16}$$

のようになると仮定する．ここで Z_i 場は破れる点での挿入項であり，Δ_0 は(6.4.23)に与えたふつうのボソンの項

$$\Delta_0 = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{3}\sum_{m,n=1}^{\infty}\alpha_{-m}^{(r)}\bar{N}_{mn}^{rs}\alpha_{-n}^{(s)} + \sum_{r=1}^{3}\sum_{m=1}^{\infty}\bar{N}_m^r\alpha_{-m}^{(r)}\boldsymbol{P} - \frac{\tau_0}{2\alpha}\boldsymbol{P}^2 \tag{6.8.17}$$

である $(\alpha=\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$．ボソンとの類推から，フェルミオン部分も生成演算子の2次であると予測する．そして次の分解をとろう：

$$\theta^{1\bar{A}} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\sum_n R_n^{\bar{A}} e^{in\sigma/|\alpha|}; \quad \theta^{2\bar{A}} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\sum_n R_n^{\bar{A}} e^{-in\sigma/|\alpha|}$$

$$\lambda^{1A} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi|\alpha|}\sum_n R_n^{A} e^{in\sigma/|\alpha|}; \quad \lambda^{2A} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi|\alpha|}\sum_n R_n^{A} e^{-in\sigma/|\alpha|}.$$

ここで,

$$\left\{R_m^A, R_n^{\bar{B}}\right\} = \alpha\delta_{m+n,0}\delta^{A\bar{B}}$$

$$\Delta_S = \sum_{m,n=1}^{\infty}\sum_{r,s=1}^{3} R_{-m}^{(r)A} U_{mn}^{rs} R_{-n}^{(s)\bar{A}} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{3} V_m^r R_{-m}^{(r)\bar{A}} \Theta^{\bar{A}} \tag{6.8.18}$$

である. U と V はこれから決める行列であり,

$$\Theta^{\bar{A}} = \frac{1}{\alpha_3}(\theta_1^{\bar{A}} - \theta_2^{\bar{A}})$$

である.

この形(6.8.18)を正当化するものは, それがこれから適用する基本的な境界条件をみたすということである. 次の条件

$$\sum \varepsilon_r \theta_r^{\bar{A}} = 0; \quad \sum \varepsilon_r \tilde{\theta}_r^{\bar{A}} = 0 \tag{6.8.19}$$

を要求する. ここで弦の状態が入射(出射)していれば, ε_r は $+1(-1)$ で, 波記号は第2の振動子を表す. フーリエモードで書くと, これらの条件は運動量の保存に対して得られた条件と似ている. とくに, (6.4.17)の一般化

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\alpha_r}A_{mn}^{(r)}(R_n^{(r)\bar{A}} - R_{-n}^{(r)\bar{A}})|V\rangle = 0\\
&\left\{\sum_{r=1}^{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}A_{mn}^{(r)}(R_n^{(r)\bar{A}} + R_{-n}^{(r)\bar{A}}) - \sqrt{2}\alpha B_m \Theta^{\bar{A}}\right\}|V\rangle = 0
\end{aligned} \tag{6.8.20}$$

を得る. また, 連続の条件

$$\sum \lambda_r^A(\sigma) = 0; \quad \sum \tilde{\lambda}_r^A(\sigma) = 0 \tag{6.8.21}$$

も課す. さらにこれらの連続の条件は, フーリエモードに対する次の条件を与える:

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\alpha_r}A_{mn}^{(r)}(R_n^{(r)A} - R_{-n}^{(r)A})|V\rangle = 0\\
&\left\{\sum_{r=1}^{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}A_{mn}^{(r)}(R_n^{(r)A} + R_{-n}^{(r)A}) + \frac{1}{\sqrt{2}}B_m\frac{\partial}{\partial\Theta^{\bar{A}}}\right\}|V\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{6.8.22}$$

これで U と V について解くのに十分な条件が得られた. 計算は面倒なものであるが, 最終的には

$$\begin{aligned}
U_{mn}^{rs} &= \frac{m}{\alpha_r}\bar{N}_{mn}^{rs}\\
V_m^r &= -\alpha_1\alpha_2\alpha_3\sqrt{2}\frac{m}{\alpha_r}\bar{N}_m^r
\end{aligned} \tag{6.8.23}$$

が得られる．

次に自由な超対称理論の経験に基づいて，理論の超対称性演算子を作りたい．(3.8.22) の第 1 量子化した超対称性の生成子を q と表そう．すると第 2 量子化した超対称性の生成子 Q は，相互作用のないレベルで q と

$$Q = \int_0^\infty \alpha\, d\alpha \int D^{16} Z[\mathrm{Tr}\ \Phi_{-\alpha} q \Phi_\alpha + \Psi_{-\alpha} q \Psi_\alpha] \tag{6.8.24}$$

により関係している．正準量子化条件(6.8.14)により，もし q が超対称性の代数をみたせば Q もみたすことに注意せよ．とくに，第 1 量子化した q は，

$$\left\{q^{-A}, q^{-\bar{B}}\right\} = 2h\delta^{A\bar{B}}; \quad \left\{q^{-A}, q^{-B}\right\} = \left\{q^{-\bar{A}}, q^{-\bar{B}}\right\} = 0 \tag{6.8.25}$$

をみたす．

そこでこれらの関係の第 2 量子化したものを構成したい．とくに，第 2 量子化した生成子の相互作用の部分は，

$$Q^{-A} = \cdots + \lambda \int \prod_{r=1}^{3} d\alpha_r D^{16} Z_r \delta\left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i\right) \Delta^{16}\left(\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i Z_i\right) \langle\Phi_1|\langle\Phi_2|\langle\Phi_3\|Q^{-A}\rangle \tag{6.8.26}$$

で与えられる．

第 2 量子化された生成子の表式を交換関係に代入すれば，0 になるべき一連の項が得られる．結合定数の 0 次では q が超対称性の関係をみたすので，これは保証されている．ところが結合定数の 1 次の項は，自由な q と相互作用する $|Q^A\rangle$ の項の混合を含んでいる．とくに，

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{3} q_r^{-A}|Q^{-\bar{B}}\rangle + \sum_{r=1}^{3} q_r^{-\bar{B}}|Q^{-A}\rangle &= 2|H\rangle\delta^{A\bar{B}} \\ \sum_{r=1}^{3} q_r^{-A}|Q^{-B}\rangle + (A \leftrightarrow B) &= 0 \\ \sum_{r=1}^{3} q_r^{-\bar{A}}|Q^{-\bar{B}}\rangle + (\bar{A} \leftrightarrow \bar{B}) &= 0 \end{aligned} \tag{6.8.27}$$

を得る．

これらの式を解くために，Q が一般形

$$\begin{aligned} |Q^{-\bar{A}}\rangle &= Y^{\bar{A}}|V\rangle \\ |Q^{-A}\rangle &= k\varepsilon^{ABCD} Y^{\bar{B}} Y^{\bar{C}} Y^{\bar{D}}|V\rangle \end{aligned} \tag{6.8.28}$$

をもつと**仮定する**．これでもっぱらボソンの場合からの推測と類推によって作った道具がそろった．次にもう一つ推測をしなければならない．それは，(6.8.16) と (6.8.28) に現れている関数 Z と Y の構造である．これら 2 つの関数は，すでに構成したフーリエ成分一致の条件をこわしてはいけないので，非常に制限されたものである．つまりそれらは，連続条件と交換するか反交換するかのどちらかでなければならない．実

はこれにより Z と Y が 1 通りに決まって

$$
\begin{aligned}
Z^I &= |2\alpha|^{-1/2}\left(P^I - \alpha\sum_{r,m}\frac{m}{\alpha_r}\bar{N}^r_m\alpha^{(r)I}_{-m}\right)\\
Y^{\bar{A}} &= \left|\frac{1}{2}\alpha\right|^{1/2}\left(\Theta^{\bar{A}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r,m}\frac{m}{\alpha_r}\bar{N}^r_m R^{(r)\bar{A}}_{-m}\right)
\end{aligned}
\tag{6.8.29}
$$

となることがわかる．最後に超対称性の変換関係により，$|H\rangle$ を生成しなければならない．力まかせにやれば，

$$
|H\rangle = \left(2^{-1/2}Z^L - Z^i\rho^i_{\bar{A}\bar{B}}Y^{\bar{A}}Y^{\bar{B}} + \frac{\sqrt{2}}{3}Z^R\varepsilon^{ABCD}Y^{\bar{A}}Y^{\bar{B}}Y^{\bar{C}}Y^{\bar{D}}\right)|V\rangle \tag{6.8.30}
$$

を得る．

これで超対称性をみたす頂点関数の完全な表式を得たので，Z と Y 関数を書き換えてみよう．前に，それらは連続条件と交換または反交換するように選んだことに注意した．したがって 3 つの弦のこわれる点以外では，実は 0 になるのではないかと思われる．この破れの点では関数が簡単に発散し得るので，その点に近づくときは注意して極限をとらねばならない．注意深い分析により，Z と Y が，

$$
\begin{aligned}
Y^{\bar{A}} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^{1/2}\left(\theta^{\bar{A}}_1(\pi\alpha_1-\varepsilon) + \tilde{\theta}^{\bar{A}}_1(\pi\alpha_1-\varepsilon)\right)\\
Z^I &= \lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{2\varepsilon}\pi p^I_1(\pi\alpha_1-\varepsilon)
\end{aligned}
\tag{6.8.31}
$$

と書き換えられる．ここで注意すべき重要な点は，Y も Z も両方とも弦上で局所的であること，すなわち，弦がいっしょになる点にだけ存在することである．こうして，ローレンツ不変性をそこなう可能性のある非局所性がなくなっているのである．

6.9　まとめ

歴史的には，2 つの基本的理由のために，拡がった物体の場の理論は不可能であると考えられていた．

1. 湯川，ハイゼンベルグ，その他による試みにより，量子力学で局所性をやめるといつでも因果律が破れることがわかった．かたまりの 1 点での振動が，光の速さよりも速くかたまりを伝播してしまうのである．

2. 場の理論は Veneziano 模型を再現しないであろう．というのは，巡回対称性やベータ関数の性質の多くは質量殻条件がみたされるときだけ成り立つが，作用は定義により質量殻条件をみたさないからである．

3. 質量殻条件なしにローレンツ不変でユニタリーな弦の量子化のプログラムは存在しないので，理論は質量殻条件なしにローレンツ不変でユニタリーにはなり得ない．

4. 同様に弦理論では，双対性により入ってくる数えすぎのために場の理論は不可能と思われた．双対図はすでに s と t チャンネルの極の和をとっているので，いろいろなチャンネルの各々に極をもつ図の双対図を加えると，とくに高次ループでひどい数えすぎになる．

幸いなことに，弦の場の理論にはこのすべての問題がない．第1の問題の非局所性は，**多重局所**理論を導入することにより解決している．つまり，弦の位相の変化は局所的にのみ起こる．すなわち弦は，内部の1点または端点でのみこわれたりつながったりできる．破れからの振動は，(光錐の理論のクーロン効果を無視して)光の速さ以下の速度で伝わる．

弦の場の理論は，Veneziano 模型のいくつかの性質を実際は破っているために，第2の問題も解決している．理論が質量殻条件をみたす Veneziano 模型を再現するので，それでもよいのである．

第3に，BRST 量子化のプログラムはローレンツ不変であるが，これはゴーストを加えて初めてできる．それは質量殻条件なしにはユニタリー性を破るが，最終的 S 行列はユニタリーなので何の物理的原理も破れていない．

最後に弦の場の理論は，明らかに双対性を破ることにより双対性の問題を解決している．すべてのファインマン図の和だけが正しい双対図を生ずるのである．したがって，計算の途中のどの段階でも双対性は実は存在しない．

この本全体で，第2量子化の形式により，1つの作用から全体の模型が導出できることを強調した．とくに光錐の形式により，弦の描像が明らかなファインマン級数の解釈が得られる．光錐ゲージでは，**すべての相互作用が局所的でなければならない**という簡単な制限を用いた．すなわち弦は，弦にそった1点または端点でのみちぎれたりくっついたりできる．これにより，作用の中のすべての相互作用が1通りに決まる．とくに4弦相互作用を含む項が得られる．

最初にファインマンが古典力学からシュレディンガー方程式を導いたのと同様にして，理論を導いた．そこでは基本的な関係

$$
\begin{aligned}
\Delta_{12} &= \langle X_1, \tau_1 | X_2, \tau_2 \rangle \\
&= \langle X_1 | e^{-iH\tau} | X_2 \rangle \\
&= \int_{X_1}^{X_2} DX\, e^{i\int_{\tau_1}^{\tau_2} L(\tau)d\tau} \\
&= \int D^2\Phi\, \Phi^*(X_1)\Phi(X_2) e^{i\int_{X_1}^{X_2} DX \int d\tau L(\phi)}
\end{aligned}
\tag{6.9.1}
$$

を用いた．ここで

$$
\begin{aligned}
L(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int d\sigma(\dot{X}_i^2 - X'^2_i) \\
L(\Phi) &= \Phi^*(i\partial_\tau - H)\Phi \\
H &= \frac{\pi}{2}\int d\sigma\left(P_i^2 + \frac{X_i'^2}{\pi^2}\right)
\end{aligned}
$$

である．

始状態と終状態の間の中間状態に単に完全系を挿入することにより，これらすべての関係を証明できる：

$$\begin{aligned} &\text{第 1 量子化：} |X\rangle \int DX \langle X| = 1 \\ &\text{第 2 量子化：} |\Phi\rangle \int D^2\Phi e^{-\langle\Phi|\Phi\rangle} \langle\Phi| = 1. \end{aligned} \tag{6.9.2}$$

場の汎関数 Φ は σ の関数ではない．σ の領域について定義された弦変数 X の汎関数である：

$$\Phi(X) = \langle X|\Phi\rangle = \Phi[X(\sigma_1), X(\sigma_2), X(\sigma_3), \ldots, X(\sigma_N)]. \tag{6.9.3}$$

この関数を分解するもっとも容易な方法は，フォック空間の可能なすべての要素の基底状態を使うことである：

$$|\Phi\rangle = \sum_{\{n\}} \phi_{\{n\}} |\{n\}\rangle. \tag{6.9.4}$$

Φ は弦のシュレディンガー方程式をみたすので，場の汎関数を弦のシュレディンガー方程式の解の固有関数でべき展開できる：

$$\phi_{p^+,\{n\}}(\tau, X_i) = \int dp_i e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - E_{\{n\}}\tau)} A_{p^+,p_i,\{n\}}. \tag{6.9.5}$$

A は弦のすべての可能な励起を，生成したり消滅したりする生成ないし消滅演算子であることに注意せよ．したがってそれは無限成分場の理論に対応する．標準的な正準交換関係を課すと，

$$[A_{p^+,p_i,\{n\}}, A^\dagger_{q^+,q_j,\{m\}}] = \delta(p^+ - q^+)\delta(p_i - q_i)\delta_{\{n\},\{m\}} \tag{6.9.6}$$

をとることになる．場の汎関数 Φ は，これらの固有関数でべき展開できる：

$$\begin{aligned} \langle X|\phi\rangle &= \Phi_{p^+}(X) \\ &= \sum_{\{n\}} \int \prod_i dp^i A_{p^+,p_i,\{n\}} H_{\{n\}}(X) e^{-\sum_{i,n} X_{i,n}^2} e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - E_{\{n\}}\tau)}. \end{aligned} \tag{6.9.7}$$

場の理論で得られる恒等式はすべて再現できる．とくにグリーン関数は 2 つの場の行列要素

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= \langle\langle 0|\Phi^\dagger_{p^+}(X_1, \tau_1)\Phi_{q^+}(X_2, \tau_2)|0\ \rangle\rangle \\ &= \delta(p^+ - q^+) \int DX e^{i\int L d\sigma d\tau} \prod_\sigma \delta(\boldsymbol{X}(\sigma, \tau_1) - \boldsymbol{X}_1(\sigma)) \prod_\sigma \delta(\boldsymbol{X}(\sigma, \tau_2) - \boldsymbol{X}_2(\sigma)) \end{aligned} \tag{6.9.8}$$

であることが示せる．

局所的位相が局所的にだけ変わり得るという規則により，相互作用は 1 通りに決まる．3 弦頂点関数は，デルタ関数

$$S_3 = \int dp_r^+ \delta\left(\sum_{r=1}^{3} p_r^+\right) \int DX_{123} \Phi^\dagger(X_3)\Phi^\dagger(X_1)\Phi(X_2)\delta_{123} + \text{h.c.} \tag{6.9.9}$$

で与えられる．幸いなことに，弦についての積分は単純なガウス型なので実行できる．積分をすれば

$$|V_{123}\rangle = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{3}\sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{-m}^{(r)} N_{mn}^{rs} \alpha_{-n}^{(s)} + \sum_{r=1}^{3}\sum_{m=1}^{\infty} N_m^r \alpha_{-m}^r \boldsymbol{P} + K\boldsymbol{P}^2\right\} \tag{6.9.10}$$

を得る．ここで，

$$N_{mn}^{rs} = (C^{-1})_{mn}\delta_{rs} - 2(mn)^{-1/2}(A^{(r)T}\Gamma^{-1}A^{(s)}) \tag{6.9.11}$$

および

$$\begin{aligned} N_m^r &= -(m)^{-1/2}(A^{(r)T}\Gamma^{-1}B)_m \\ K &= -\frac{1}{4}B\Gamma^{-1}B; \quad \Gamma = \sum_{r=1}^{3} A^{(r)}A^{(r)T} \end{aligned} \tag{6.9.12}$$

である．この頂点関数がふつうの Veneziano 模型を出すことを示さねばならない．これを示すもっとも簡単な方法は，第1量子化した形式で3弦の配位のノイマン関数を計算し結果を比べることである．出発点は Mandelstam の写像

$$\rho = \alpha_1 \ln(z-1) + \alpha_2 \ln z$$

である．

上半平面でのグリーン関数を知っているので，ノイマン関数のフーリエ成分をとる．フーリエ係数は，

$$\begin{aligned} N_{mn}^{rs} &= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} d\eta_r\, d\eta_s e^{-m\zeta_r - n\zeta_s} \ln(z(\zeta_r) - z(\zeta_s)) \\ &= -\frac{1}{mn(2\pi)^2}\int_{x_r} dz_r \int_{x_s} dz_s \frac{e^{-m\zeta_r(z_r) - n\zeta_s(z_s)}}{(z_r - z_s)^2} \end{aligned} \tag{6.9.13}$$

となる．上半平面のノイマン関数を上の公式に挿入する．この計算は簡単で，

$$\begin{aligned} N_{mn}^{rs} &= -\frac{mn}{m\alpha_r + n\alpha_s}\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \bar{N}_m^r \bar{N}_n^s \\ \bar{N}_m^r &= \alpha_r^{-1} f_m(-\alpha_{r+1}/\alpha_r)\exp(m\tau_0/\alpha_r) \end{aligned} \tag{6.9.14}$$

を得る．ここで，

$$\begin{aligned} f_n(\gamma_r) &= (n\gamma_r)^{-1}\binom{n\gamma_r}{n}; \quad K = -\tau_0/(2\alpha_1\alpha_2\alpha_3) \\ \tau_0 &= \sum_{r=1}^{3}\alpha_r \ln|\alpha_r|; \quad P^i = \alpha_1 p_2^i - \alpha_2 p_1^i \end{aligned} \tag{6.9.15}$$

である．

ここでGSの光錐の形式で，超弦の問題を分析しよう．今はフェルミオンとボソンの2組の振動子がある．基本的な戦術は，頂点関数の形を推測し，それが連続の式をみたすことを要求することである．ボソンの理論との類推に基づいて，

$$|V\rangle = Z_i \exp[\Delta_0 + \Delta_S]|0\rangle\delta\Big(\sum_r \alpha_r\Big)\delta\Big(\sum p_r^I\Big)\delta\Big(\sum \alpha_r\theta_r^{\bar{A}}\Big) \tag{6.9.16}$$

と予想してみる．ここで，

$$\Delta_S = \sum_{m,n=1}^{\infty}\sum_{r,s=1}^{3} R_{-m}^{(r)A} U_{mn}^{rs} R_{-n}^{(s)\bar{A}} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{3} V_m^r R_{-m}^{(r)\bar{A}} \Theta^{\bar{A}} \tag{6.9.17}$$

である．

第3章では，第1量子化した超対称性の生成子が，

$$\left\{q^{-A}, q^{-\bar{B}}\right\} = 2h\delta^{A\bar{B}}; \quad \left\{q^{-A}, q^{-B}\right\} = \left\{q^{-\bar{A}}, q^{-\bar{B}}\right\} = 0 \tag{6.9.18}$$

をみたすことを示した．これらの超対称性の生成子の第2量子化したものも，これらの関係をみたすことを示さねばならない．仮定として，

$$\begin{aligned} |Q^{-\bar{A}}\rangle &= Y^{\bar{A}}|V\rangle \\ |Q^{-A}\rangle &= k\varepsilon^{ABCD} Y^{\bar{B}} Y^{\bar{C}} Y^{\bar{D}}|V\rangle \end{aligned} \tag{6.9.19}$$

をとる．

注目すべきことに，頂点関数においたすべての条件が，

$$\begin{aligned} Y^{\bar{A}} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^{1/2}\left(\theta_1^{\bar{A}}(\pi\alpha_1 - \varepsilon) + \tilde{\theta}_1^{\bar{A}}(\pi\alpha_1 - \varepsilon)\right) \\ Z^I &= \lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{2\varepsilon}\pi p_1^I(\pi\alpha_1 - \varepsilon) \end{aligned} \tag{6.9.20}$$

ととることにより，みたせることがわかる．

この頂点について，局所性の条件が課されていることに注意しておくことが大事である．Y と Z の余分の挿入項は弦のこわれる点にのみあり，したがって局所性が保たれている．こうして光錐の理論の取り扱い全体が，もとの局所性の仮定と矛盾がないようになっているのである，

参考文献

[1] M. Kaku and K. Kikkawa, *Phys. Rev.* **D10**, 1110, 1823 (1974).
[2] M. Kaku, *Introduction to the Field Theory of Strings*, Lewes Superstring Workshop, World Scientific, Singapore, 1985.
[3] M. Kaku, String Field Theory, *Int. J. Mod. Phys.* **A2**, 1 (1987).
[4] P. West, Gauge-Covariant String Field Theory, CERN-TH-4660/86, June 1986.
[5] T. Banks, Gauge Invariant Actions for String Models, SLAC-PUB-3996.
[6] E. Cremmer and J. L. Gervais, *Nucl. Phys.* **B76**, 209 (1974); *Nucl. Phys.* **B90**, 410 (1975); M. Ademollo, E. Del Guidice, P. Di Vecchia, and S. Fubini, *Nuovo Cim.* **19A**, 181 (1974) も見よ．

[7] J. F. L. Hopkinson, R. W. Tucker, and P. A. Collins, *Phys. Rev.* **D12**, 1653 (1975).
[8] S. Mandelstam, *Nucl. Phys.* **B64**, 205 (1973); **B69**, 77 (1974).
[9] M. Green, J. H. Schwarz, and L. Brink, *Nucl. Phys.* **B219**, 437 (1983); **B243**, 475 (1984).
[10] O. Alvarez, *Nucl. Phys.* **B216**, 125 (1983).
[11] H. P. McKean, Jr., and I. M. Singer, *J. Diff. Geom.* **1**, 43 (1967).
[12] S. Mandelstam, in *Unifield String Theories* (edited by M. B. Green and D. Gross), World Scientific, Singapore, 1986.
[13] M. B. Green and J. H. Schwarz *Phys. Lett.* **149B**, 117 (1984); *Nucl, Phys*, **B128**, 43 (1983); *Nucl. Phys.* **B243**, 475 (1984).

第7章

BRST 場の理論

7.1　共変的な弦の場の理論

すでに見たように光錐の場の理論の大きな長所は，それがユニタリーで，明白にゴーストがなく，1 つの作用から弦の振幅が再現できることであった．ユニタリーな S 行列を構成するのに，直観にたよる必要はない．

しかし，光錐の理論はゲージを固定した理論である．弦のすべてのゲージ不変性が残っているような共変的な記述の仕方の方が望ましい．弦の場の理論の発展の次の段階は，BRST の手法を用いて，弦の場の共変的な記述をすることである．BRST 形式の強力なところは，Faddeev-Popov ゴーストを導入することにより，弦の場の理論を完全に共変的に再定式化できることにある．

ファインマンが古典的第 1 量子化した理論からシュレディンガー方程式を出したのと同じようにして，われわれも BRST 場の理論を出そう．BRST 形式で第 1 量子化された理論から出発して，場の汎関数を引き出すのである．強調しておくべきことは，光錐の形式と同じように BRST 場の理論もゲージを固定した場の理論であることである．ゲージ固定した第 1 量子化の理論から BRST 理論を引き出すので，Faddeev-Popov ゴースト，ゴースト数，パラメーターづけの中点，パラメーターの長さなどの第 1 量子化の理論の奇妙な名残りが，第 2 量子化した場の理論にも見出される．

また，少々皮肉なこともある．もともと光錐の理論は，理論全体を包括的に表すための形式を与えるために導入したものである．ところが残念なことに，この模型を共変的にする試みは **2** つの競合する共変的な BRST の弦の場の理論を作ってしまった！これらの 2 つの BRST 理論は，まったく異なる弦の位相に基づいており，その両方ともが Veneziano 模型をうまく再現するのである．

前にグプタ-ブロイラー形式では，(光錐の形式のように)拘束条件を解かないで拘束条件を直接状態にかけることを見た：

$$L_n|\phi\rangle = 0; \quad n > 0. \tag{7.1.1}$$

ふつうは理論の 26 成分全部が伝播していると考えられる．ところが，拘束が状態ベクトルにつけられていることの効果を注意深く取り入れればこれは正しくない．式(7.1.1)はスペクトラムからゴーストの状態を消してしまう効果をもっているからである．

理論からゴースト状態を除くにはもう 1 つ別の方法があり，それはゲージ理論との

類推によるものである．これらの拘束条件をヒルベルト空間に作用させるかわりに，Φ がゴーストに変換したときに，その下で作用が不変であることを要求しよう：

$$\delta|\Phi\rangle = \sum_n L_{-n}|\Lambda_n\rangle. \tag{7.1.2}$$

(2.9.3)で見たように $L_{-n}|\Lambda\rangle$ という状態は，ゴースト状態であることに注意せよ．これを選ぶ動機は電磁気学との類推で，そこではゲージ対称性

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda \tag{7.1.3}$$

があったからである．マクスウェル場の作用は，場 A_μ をゴースト場 $\partial_\mu\lambda$ だけ動かしても不変である．ここで弦の変換が実は，マクスウェル場と線形化した重力場の両方のゲージ変換を含んでいることを証明しよう．(6.3.19)で見たように，場 $|\Phi\rangle$ は弦の可能なすべての励起の和である．そこで，場をその成分で展開する：

$$\begin{aligned}|\Phi\rangle &= \phi(x)|0\rangle + A_\mu a_{-1}^\mu|0\rangle + \cdots \\ |\Lambda\rangle &= \lambda(x)|0\rangle + \cdots \\ L_{-1} &= k_1 \cdot a_{-1} + \cdots .\end{aligned} \tag{7.1.4}$$

この展開を，弦の場のゲージ変換(7.1.2)に挿入すれば，

$$\delta A_\mu a_{-1}^\mu|0\rangle + \cdots = \partial_\mu\lambda a_{-1}^\mu|0\rangle + \cdots$$

を得る．展開の項を等しくおけば(7.1.3)を得る．こうして場の関数を展開することにより，マクスウェル場のゲージ変換を導出できた [1–3]．

同様に，閉じた弦の部分が線形化した重力場を含むことも証明できる．今度は，

$$\delta|\Psi\rangle = \sum_n (L_{-n}|\Lambda_n\rangle + \bar{L}_{-n}|\bar{\Lambda}_n\rangle) \tag{7.1.5}$$

を要求する．ここで上につけた棒は第2の独立なヒルベルト空間を表す．この表式を展開して，

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle &= \phi(x)|0\rangle + h_{\mu\nu}a_{-1}^\mu \bar{a}_{-1}^\nu|0\rangle + \cdots \\ |\Lambda\rangle &= \lambda_\mu \bar{a}_{-1}^\mu|0\rangle + \cdots \\ |\bar{\Lambda}\rangle &= \lambda_\mu a_{-1}^\mu|0\rangle + \cdots \\ L_{-1} &= k_\mu a_{-1}^\mu + \cdots \\ \bar{L}_{-1} &= k_\mu \bar{a}_{-1}^\mu + \cdots\end{aligned} \tag{7.1.6}$$

を得る．これらをまとめれば，

$$\delta h_{\mu\nu} a_{-1}^\mu \bar{a}_{-1}^\nu|0\rangle + \cdots = \partial_\mu\lambda_\nu a_{-1}^\mu \bar{a}_{-1}^\nu|0\rangle + (\mu \leftrightarrow \nu) + \cdots \tag{7.1.7}$$

を得る．係数を等置して，

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu\lambda_\nu + \partial_\nu\lambda_\mu \tag{7.1.8}$$

が得られる．こうして線形化した重力場のもとの変換が再現される．

次に，このゲージ変換(7.1.2)の下で不変な作用を見つけよう．

第1量子化した形式から弦の場の理論を出す方法に関する前の章で行った議論をくり返す．鍵となるステップは，2つの弦の状態の間のすべての中間点に，中間状態の完全系を挿入することであった．中間状態を入れたとき，計算の各段階でゲージの拘束条件を保たねばならないので面倒である．ここでは(6.3.29)を拡張して，中間状態は

$$1 = P|X\rangle \int DX \, \langle X|P \tag{7.1.9}$$

とするのがよい．ただし P は，計算の各中間状態でゴースト状態が除かれていることを保証する射影演算子である．それは

$$L_n P = P L_{-n} = 0; \quad P^2 = P$$

をみたす [4]．経路積分からラグランジアンを求める．前章で用いたのと同じステップをくり返せば，今度は作用が

$$L = \Phi P[L_0 - 1]P\Phi \tag{7.1.10}$$

でなければならないことがわかる．重要な点は，この作用が局所ゲージ対称性(7.1.2)をもつことである．このゲージ対称性のために伝播関数に現れるゴーストが除ける．この射影演算子がなければ，一般にすべての26成分が伝播することになってしまうのである．

この作用を展開して，その結果をマクスウェルと重力の作用と比べてみると役に立つ．最低次では，作用の中の射影演算子が

$$\langle\Phi\left|\left(L_0 - \frac{1}{2}L_1 L_{-1} + \cdots\right)\right|\Phi\rangle \tag{7.1.11}$$

と書ける．ここで，これを低いレベルの状態によって展開しよう．すると表式は，

$$\langle 0|A_\mu a_1^\mu(\Box - k_\nu a_1^\nu k_\rho a_{-1}^\rho)A_\sigma a_{-1}^\sigma|0\rangle \tag{7.1.12}$$

となる．なぜならば，$L_{-1} \sim k \cdot a_{-1}$, $|\Phi\rangle \sim A_\mu a_{-1}^\mu|0\rangle$, $L_0 \sim \Box$ であるからである．この表式を簡単にすると，

$$A_\mu(\eta^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu \tag{7.1.13}$$

となる．これはマクスウェルの作用に比例している．このように作用(7.1.10)は最低次でマクスウェルの理論を含んでいる．このステップを同様にくり返して，閉じた弦の作用が線形化したグラビトンの作用を再現することも示せる．ところが，次のレベルでは複雑なことが起きる．

力まかせに射影演算子を次のレベルまで展開してみると，

$$\begin{aligned} P(L_0 - 1)P = L_0 - 1 - \frac{1}{2}L_{-1}L_1 + L_{-1}^2\left(4L_0 + \frac{1}{2}D - 9\right)\Delta L_1^2 \\ + L_{-1}^2(6L_0 + 6)\Delta L_2 + \text{h.c.} - L_{-2}(4L_0 + 2)(2L_0 + 2)\Delta L_2 + \cdots \end{aligned} \tag{7.1.14}$$

を得る．ここで，

$$\Delta = 2[16L_0^2 + (2D-10)L_0 + D]^{-1} \tag{7.1.15}$$

である．

演算子 Δ は p^2 の多項式の逆を含んでいるので，非局所的である．たとえば p^{-2} は，x 空間のファインマン伝播関数

$$\Delta(x-y) = \langle x \left| \frac{1}{\Box} \right| y \rangle$$

に等しいので，非局所的であることがわかる．x と y は 2 つの異なる点なので，x 空間で p^{-2} の表式は非局所的である．

幸いなことに，p^{-2} の多項式のために入る非局所性を除く方法がある．それはもっと補助場を入れることである．たとえばラグランジアン

$$\psi A \psi + \psi B \phi \tag{7.1.16}$$

を考える．ここで A と B は演算子である．ψ 場を消去することにより（その運動方程式を計算してそれをラグランジアンにもう 1 度入れるか，または経路積分で ψ について汎関数積分をするか，いずれでもよい），簡単になったラグランジアン

$$-\frac{1}{4}\phi B A^{-1} B \phi \tag{7.1.17}$$

を得る．もし A が p^2 の多項式ならば，A^{-1} は非局所的演算子であることに注意せよ．ここで重要な点は，非局所的作用のかわりに補助場を使うことである．これらの補助場は最終的作用から分離するので，物理に何の影響も与えない．

次にすべてのレベルに対し完全な射影演算子 P の具体的形を構成しよう．L_n 演算子の展開やレベル N の各状態への射影子を用いるなど，何通りかの方法で P を構成することができる．以下では，後の可能性を調べてみることにする．

まず可能なすべての演算子 L_{-n} の集合が真空に作用したものとして Verma モジュール（(4.1.42) を見よ）を定義しよう $(\alpha_i < \alpha_{i+1})$：

$$L_{-\{\alpha\}}|0\rangle \equiv L_{-\alpha_1}^{\lambda_1} L_{-\alpha_2}^{\lambda_2} \cdots L_{-\alpha_N}^{\lambda_N}|0\rangle. \tag{7.1.18}$$

ここで，$\{\alpha\}$ はたくさんの添字の集合を記号的に表している．射影演算子を $L_{\{\alpha\}}$ によって展開しよう．射影演算子 P が次の形であると仮定する：

$$P = 1 + \sum_{\alpha,\beta} L_{-\alpha} F_{\alpha\beta}(L_0) L_\beta. \tag{7.1.19}$$

ここで $F_{\alpha\beta}$ は L_0 の任意関数であり，記号 α と β はたくさんの添字の集まりを表すことをおぼえておく必要がある．Virasoro 生成子をかけたとき演算子 P が 0 になることを要求すれば，F が正確に決まる．ここで P^S をゴーストの射影演算子とすると，

$$\begin{aligned} P &= 1 - P^S \\ P^S &= -\sum_{N=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ |\alpha|=|\beta|=N}}^{p(N)} L_{-\alpha} F_{\alpha\beta}^N(L_0) L_\beta \end{aligned} \tag{7.1.20}$$

となる．ここで異なるレベル N についての和を具体的に書いてある．L_n をかけたとき演算子が 0 になることを要求することにより，多項式 F のみたす回帰公式が得られる．今 F 行列を，

$$F_{\alpha\gamma}^{N}(L_0) \equiv \sum_{\beta} [\delta_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}^{N-1}(L_0)](S^{-1})_{\beta\gamma}^{N}(L_0) \tag{7.1.21}$$

により定義しよう．ここの行列 S と A は，これから決めるものである．演算子が正しい性質をもつことを要求することにより，A 行列が反復的に決められる回帰関係が得られる：

$$\sum_{M=1}^{N-1} \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ |\alpha|=|\beta|=M}}^{p(M)} L_{-\alpha} F_{\alpha\beta}^{M}(L_0) L_\beta L_{-\gamma}|R\rangle \equiv L_{-\delta} A_{\delta\gamma}^{N-1}(L_0)|R\rangle. \tag{7.1.22}$$

最後に行列 S は，

$$S_{\alpha\beta}|R\rangle \equiv L_\alpha L_{-\beta}|R\rangle \tag{7.1.23}$$

と定義される．ここで，$|R\rangle$ は実状態で，$|\alpha|$ は $\sum_{i=1}^{n} i\lambda_i$ である．

この表式は，繰り返し使えることに注意せよ．つまり，N 番目のレベルは N 以下の状態によってすべて決められる．したがって，最初のいくつかのレベルで射影演算子がわかれば(これはすでに(7.1.14)に具体的に書いておいた)，すべてのレベル N で射影演算子が得られる．

この射影演算子は p^2 につき非局所的である．F を正確に計算でき，行列式のすべてのゼロ点の正確な位置がわかるので，これは容易に修正することができる．

幸いなことに，Verma モジュールの行列要素の行列式は正確にわかっている．N 番目のレベルでは，$\langle 0|L_\alpha$ と $L_{-\beta}|0\rangle$ の間の行列要素の行列式は，

$$\begin{aligned} \det|\langle 0|L_\alpha L_{-\beta}|0\rangle| &= \prod_{p,q} (L_0 - h_{p,q})^{p(N-pq)} \\ h_{p,q} &= [\{mq-(m+1)p\}^2 - 1]/4m(m+1) \\ c &= 1 - \frac{6}{m(m+1)} \end{aligned} \tag{7.1.24}$$

で与えられる．ここで p と q は正の整数で，その積は N 以下である．これが Kac [5] が初めて書き下したすばらしい公式で，たくさんの結果を与えてくれる．たとえば，もし Kac 行列式が 0 でなければ，(7.1.23)で導入した行列 S の逆がとれる．これは Verma モジュールが共形群の既約表現をなすことを意味している．このように Kac 行列式は，弦模型の既約表現を決めるのに重要である．

今の場合，この結果の主な使い道は，行列式のすべてのゼロ点，したがって射影演算子のすべての極の位置を決めることである．(7.1.19)を作用に代入すれば，

$$\Phi^* \Big[L_0 - 1 - \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ |\alpha|=|\beta|=M}}^{p(M)} L_{-\alpha} \hat{F}_{\alpha\beta}^{M} L_\beta \Big] \Phi \tag{7.1.25}$$

を得る．F は $\hat{F}$ に L_0 をかけたものに関係している．この表式の利点は，$\hat{F}$ 行列のすべての特異点の位置がわかっていることである．

さて，作用にある非局所項を除くために補助場を入れた(7.1.16)と(7.1.17)の分析をくり返してみよう．まず $\hat{F}$ の中の極を分解する：

$$\hat{F}^N_{\alpha\beta}(L_0) = \sum_{l,m} A^{Nlm}_{\alpha\beta}[L_0 - a^{Nl}_{\alpha\beta}]^{-m} + B^N_{\alpha\beta}. \tag{7.1.26}$$

そこで補助場 ρ を導入すれば，$\hat{F}$ の中にある余分の非局所的部分を吸収することができる [6]：

$$\begin{aligned}\Phi^*\Bigg[L_0 - 1 - \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\|\alpha|=|\beta|=N}}^{p(N)} L_{-\alpha}B^N_{\alpha\beta}L_\beta\Bigg]\Phi + \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\|\alpha|=|\beta|=N}}^{p(N)} \rho^{*Nlm}_\alpha(L_0 - a^{Nl}_{\alpha\beta})^m\rho^{Nlm}_\beta \\ + \rho^{*Nlm}_\alpha(A^{Nlm}_{\alpha\beta})^{1/2}L_\beta\Phi + \Phi^*[L_{-\alpha}(A^{Nlm}_{\alpha\beta})^{1/2}]\rho^{Nlm}_\beta.\end{aligned} \tag{7.1.27}$$

このように書いた理由は，作用が p^2 について明らかに局所的な形に書けることを示すためである．しかしこの局所性の代償として，無限個の補助場 ρ^{Nlm}_α の集合を導入しなければならなかった．そこで次の課題は，この公式をコンパクトに表す簡単な方法を見つけることである．

上の作用の中の項を美しく再配置するためには，対称性の力を使う必要がある．第 1 に，BRST 形式を導入してこれらの補助場が「Faddeev-Popov ゴーストの自由度」と解釈できることを示すことにしよう．反変換するゴースト場で定義された状態により，補助場 ρ^{Nlm}_α が表されることを見ることにする．

第 2 に，これらの補助場が Verma モジュールをなすことは，ゴースト場に群論的な起源があることの最初の徴候である．BRST ゴースト場は第 2 量子化した場の理論では奇妙なものであるが，Verma モジュールが存在することは，これらのゴースト場が実は，より深い対称性の表現であることを示しているのである．

7.2　BRST 場の理論

BRST 形式では，(7.1.27)で導入した補助場 ρ^{Nlm}_α を Faddeev-Popov ゴーストを用いて表す．これらの Faddeev-Popov ゴーストが 26 モードのうち 2 つを消し，必要な 24 の物理的モードを与えるのである．

まず，第 1 量子化した BRST 弦理論を復習しよう．ラグランジアン(2.1.41)で，$\lambda = 1, \rho = 0$ と書かれる共形ゲージをとる．共形ゲージの Faddeev-Popov 行列式は，

$$\Delta_{\mathrm{FP}}\int d\varepsilon\, d\eta\, \delta[\lambda(\varepsilon,\eta) - 1]\delta[\rho(\varepsilon,\eta)] \equiv 1$$

と書くことができる．さらにこの行列式を計算するのに，(1.6.22)のように θ の Faddeev-Popov ゴースト場

$$\Delta_{\mathrm{FP}} = \int d\theta\, dp_\theta \exp\left[-i\int d\sigma\, d\tau\, L(\theta, p_\theta)\right] \tag{7.2.1}$$

を導入する．ここで，

$$L(\theta, p_\theta) = p_\theta^1(\partial_\sigma + \partial_\tau)\theta^1 + p_\theta^2(\partial_\tau - \partial_\sigma)\theta^2 \tag{7.2.2}$$

である．

こうして理論の作用を書き換えて，Faddeev-Popov ゴーストを含めることができたことに注意する：

$$L(\sigma, \tau) = P_\mu \dot{X}^\mu - \frac{1}{2}[P_\mu^2 + X'^2_\mu] + p_\theta(\rho\partial_\sigma + \partial_\tau)\theta. \tag{7.2.3}$$

ここで ρ はパウリのスピン行列 σ_z である．

前と同じようにこのラグランジアンは，べき零の演算子 Q を作用させることにより場に生成される大域的不変性をもっている [7]．これを見るもっとも簡単な方法は，2 次元のウィック回転を行って複素変数 z と反交換する場 b と c を用いて，作用を明白に共形不変な形に書き換えることである．(7.2.2) を (2.4.4) のように書き換えれば，

$$L = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\partial_z X_\mu \partial_{\bar{z}} X^\mu + b\partial_{\bar{z}} c + \bar{b}\partial_z \bar{c}\right\} \tag{7.2.4}$$

を得る．前のように，これは

$$\begin{aligned}
\delta X_\mu &= \varepsilon[c\partial_z X_\mu + \bar{c}\partial_{\bar{z}} X_\mu] \\
\delta c &= \varepsilon[c\partial_z c] \\
\delta \bar{c} &= \varepsilon[\bar{c}\partial_{\bar{z}} \bar{c}] \\
\delta b &= \varepsilon[c\partial_z b + 2\partial_z c b - \frac{1}{2}\partial_z X_\mu \partial_z X^\mu] \\
\delta \bar{b} &= \varepsilon[\bar{c}\partial_{\bar{z}} \bar{b} + 2\partial_{\bar{z}} c b - \frac{1}{2}\partial_{\bar{z}} X_\mu \partial_{\bar{z}} X^\mu]
\end{aligned} \tag{7.2.5}$$

の下で不変である．

この変分から，べき零の演算子 Q を引き出すことができる．また一般に，交換関係 $[\lambda_m, \lambda_n] = f_{mn}^p \lambda_p$ をもついかなるリー代数が与えられても，反交換する演算子 c_n と b_m を用いてべき零の演算子 Q を構成できる [8] ことに注意しておくことも重要である：

$$Q = \sum_{-\infty}^{\infty} c_{-n}\left[\lambda_n - \frac{1}{2}f_{nm}^p c_{-m} b_p\right]. \tag{7.2.6}$$

今の場合，

$$\{c_n, b_m\} = \delta_{n,-m} \tag{7.2.7}$$

をもつ 2 組の Faddeev-Popov ゴーストがある．したがってべき零の BRST 演算子は，

$$\begin{aligned}
Q &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} : c_{-n}\left(L_n + \frac{1}{2}L_n^{bc}\right) : \\
&= c_0(L_0 - 1) + \sum_{n=1}^{\infty}[c_{-n}L_n + L_{-n}c_n] - \frac{1}{2}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(m-n) : c_{-m}c_{-n}b_{n+m} :
\end{aligned}$$

と書ける．ここで，

$$
\begin{aligned}
L_n^{bc} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (m+n) : b_{n-m} c_m : \\
Q^2 &= 0
\end{aligned}
\tag{7.2.8}
$$

で，最後の等式により，時空の次元が 26 で切片が 1 に等しいことが決まる．

点粒子の場合との類推により，時間を細分化することにより第 2 量子化した形式へ移行することができる．しかし Faddeev-Popov ゴーストがあるために，基底の状態 $|X\rangle$ が中間状態 $|X, \theta\rangle$ の完全系で置き換えられることになる．つまり経路積分に無限個の中間状態を入れるとき，Faddeev-Popov ゴーストに対応する中間状態の完全系も入れなければならない．θ 変数は経路積分に τ 微分を伴って現れるので，汎関数積分を因子化するときに中間状態の完全系に含めざるを得ないのである．こうして場の汎関数 Φ はこれらのゴースト場の関数となる．したがって式(6.3.29)と(7.1.9)は，

$$
\begin{aligned}
1 &= |\theta\rangle|X\rangle \int DX\, D\theta \langle\theta|\langle X| \\
\langle\theta|\langle X|\Phi\rangle &= \Phi(X, \theta)
\end{aligned}
\tag{7.2.9}
$$

に置き換わる．

(6.3.34)のグリーン関数は，

$$
\begin{aligned}
\Delta(X_i, \theta_i; X_j, \theta_j) &= \int_{X_i, \theta_i}^{X_j, \theta_j} DX\, DP\, D\theta\, Dp_\theta \exp\left[i \int d\sigma\, d\tau\, L(\sigma, \tau) \right] \\
&= \int D^2\Phi \Phi(X_i, \theta_i) \Phi^*(X_j, \theta_j) \exp\left[i \int_{X_i, \theta_i}^{X_j, \theta_j} DX\, D\theta\, L(\Phi) \right]
\end{aligned}
\tag{7.2.10}
$$

と修正される．ここで基本的な場の汎関数は，Faddeev-Popov ゴースト場 θ の関数である．$|X\rangle|\theta\rangle$ から $|\Phi\rangle$ へ移行することにより，

$$
L = \langle\Phi|[L_0 - 1]|\Phi\rangle \tag{7.2.11}
$$

を得る．ここで L_0 は X と θ 変数の両方の関数である．この作用は Siegel が最初に書き下した [9–14]．BRST 場 $|\Phi\rangle$ をゴーストモードで展開すれば，

$$
|\Phi(X)\rangle = \sum_{\{p\},\{q\}} \phi_{\{p\},\{q\}}(X) \{b_{-p}\} \{c_{-q}\} |-\rangle
$$

を得る．

この作用では，明らかに弦の 26 個の自由度と 2 つのゴーストモードが伝播しており，24 個の物理的モードの理論が得られる．この表式では，すべての可能なゴースト数について和をとっていることに注意せよ．

上の作用は完全にゲージ固定されていることに注意せよ．しかしながら，演算子 Q がべき零であることに基づくゲージ自由度が残っている別の作用を書き下すこともで

きる．そのために(7.1.2)を新しいゲージ変換で置き換えよう．前に(7.1.2)の起源は，それが弦の場をゴーストの場に変えることであることを述べた．一方 BRST の形式では，物理条件 $L_n|\mathrm{phys}\rangle = 0$ が $Q|\mathrm{phys}\rangle = 0$ で置き換えられている．それで新しい BRST ゲージ不変性が

$$\delta|\Psi\rangle = Q|\Lambda\rangle \tag{7.2.12}$$

で与えられるのではないかと考えられる．状態 $\langle\Lambda|Q$ は物理的状態 $|\mathrm{phys}\rangle$ と結合しないことにより，この推測は裏づけられる．Q はべき零なので，新しい作用として

$$L = \langle\Psi|Q|\Psi\rangle \tag{7.2.13}$$

を選ぶことにする [15–24]．ここでは，もとの場の「ゴースト数 $-\frac{1}{2}$ の部分」

$$|\Psi\rangle = P_{-1/2}|\Phi\rangle$$

だけをとる．ただし $P_{-1/2}$ は，ゴースト数 $-\frac{1}{2}$ だけを取り出す射影演算子である．新しい場 $|\Psi\rangle$ は，もとの場 $|\Phi\rangle$ の一部になっていることに注意する．

この作用を分解すれば，$|\Psi\rangle$ の最低励起状態がちょうど(7.1.10)をみたすことがわかるので，これが求めていた作用を一般化したものになっている．そして前に見つけた補助場が，$|\Psi\rangle$ のモード展開の中に含まれていることがわかる．以上をまとめると，(7.2.13)は(7.1.27)をコンパクトに表しているのである．

この作用に対応する運動方程式は，

$$Q|\Psi\rangle = 0 \tag{7.2.14}$$

であり，これは基底状態に対してはふつうの拘束条件 $L_n|\phi\rangle = 0$ に帰着する．

7.3　ゲージ固定

前の作用(7.2.13)をゲージ固定すれば，作用(7.2.11)または光錐の作用(6.3.33)のどちらでも得ることができることが示せる．ゲージを固定するには，演算子 Q をゼロモードにより分解すればよい：

$$Q = c_0 K - 2b_0 R + d + \delta. \tag{7.3.1}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
K &= L_0 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(nc_{-n}c_n + nb_{-n}b_n) \\
R &= -\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}c_n \\
d &= c_{-n}(L_n + f^p_{-m,n}b_{-p}c_m + \frac{1}{2}c_{-m}f^p_{mn}b_{-p}) \\
\delta &= c_n(L_{-n} + f^{-p}_{m,-n}c_{-m}b_p + \frac{1}{2}b_{-p}f^p_{-m,-n}c_m)
\end{aligned} \tag{7.3.2}$$

であり，f は Virasoro 代数の構造定数である．Q はべき零なので，これらの演算子は恒等式

$$d^2 = \delta^2 = [K, d] = [K, \delta] = [K, R] = 0$$
$$[R, d] = [R, \delta] = 0; \quad \{d, \delta\} = -2RK \tag{7.3.3}$$

をみたさねばならない．この作用をふつうのものに帰着させるには，理論のゴーストの真空を書き下すことから始めればよい．

第4章で,「ゴースト数」演算子(4.4.20)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c_{-n}b_n + b_{-n}c_n) + \frac{1}{2}[c_0, b_0] \tag{7.3.4}$$

を導入した．この演算子は c モードの数引く b モードの数を数える．これは固有状態のラベルに使える．b と c のゴーストは両方ともゼロモードをもつので，Faddeev-Popov ゴースト場の真空は $a_n^\dagger$ のふつうの一意的真空とはまったく異なる．(第4章で見たように)ゴーストの真空は実は縮退しており，ゴースト数 $\frac{1}{2}$ か $-\frac{1}{2}$ のいずれかをもつ．つまり2つの真空

$$c_0|+\rangle = 0; \quad b_0|-\rangle = 0$$
$$|-\rangle = b_0|+\rangle \tag{7.3.5}$$

が定義できる．Ψ のゴースト数を $-\frac{1}{2}$ に決めて，それをこの2つの真空で分解しよう：

$$|\Psi\rangle = \psi|-\rangle + \phi|+\rangle. \tag{7.3.6}$$

作用(7.2.13)の式は((7.3.1)を用いて)

$$\frac{1}{2}\langle\psi|K\psi\rangle + \langle\psi|d\phi\rangle + \langle\delta\phi|\psi\rangle + \langle\phi|R\phi\rangle \tag{7.3.7}$$

となる．ここで,

$$|\Lambda\rangle = \lambda|-\rangle + \omega|+\rangle \tag{7.3.8}$$

と書けば，場の変換(7.2.12)は

$$\delta\psi = (d+\delta)\lambda - 2R\omega \tag{7.3.9}$$

$$\delta\phi = -K\lambda + (d+\delta)\omega \tag{7.3.10}$$

となる．

上に書いた関係は成分の言葉でも表せる．場の汎関数をゴーストモードで分解するのである：

$$|\Psi\rangle = \sum_{\{n\},\{m\}}^{\infty} c_{-n_1}c_{-n_2}\cdots c_{-n_N}b_{-m_1}b_{-m_2}\cdots b_{-m_M}\Psi_{n_1,\ldots,n_N;m_1,\ldots,m_M}|0\rangle. \tag{7.3.11}$$

ゴーストの間の反交換関係のために，添字は互いに反対称になっていることに注意せ

よ．これにより，

$$|\Psi\rangle = \sum_{M,N} \binom{N}{M} \Psi_N^M \tag{7.3.12}$$

と書ける．ここで $\binom{N}{M}$ は，N 個の反対称化した c 場と M 個の反対称化した b 場の積を表す．反交換する dx^μ により微分形式が導入されるのと同様に，これにより反交換する変数上に定義された「形式」を導入できることに注意しよう [10]．

これでゲージ固定をするのに必要な道具はそろった．まず共変ゲージ [9]

$$b_0|\Psi\rangle = 0 \tag{7.3.13}$$

を選ぼう．これにより $|\Psi\rangle$ の中の半分の場が消える．つまり(7.3.6)で $\phi = 0$ となる．そこで，$b_0|\Psi\rangle = 0$ の変分から出る Faddeev-Popov 行列式を計算すると，

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{FP}} &= \langle\bar{\Lambda}|b_0 Q|\Lambda\rangle \\ &= \langle\bar{\Lambda}|K|\Lambda\rangle \end{aligned} \tag{7.3.14}$$

を得る．ここで $\langle\bar{\Lambda}|$ は 2 形式である．このゴーストの作用の奇妙なところは，さらにそれがそれ自身のゲージ不変性

$$\delta|\Lambda\rangle = Q|\Lambda_1\rangle \tag{7.3.15}$$

をもつことである．したがって，ゴーストの作用自身にもさらに別の Faddeev-Popov 行列式が必要となる(そうしないとゴースト場についての汎関数積分が無限大になってしまう)．ゴースト場の Faddeev-Popov 行列式に由来する次のゴーストの項は，

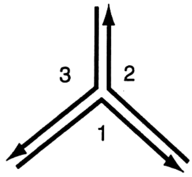
$$L_{\mathrm{FP}} = \langle\bar{\Lambda}_2|K|\Lambda_1\rangle \tag{7.3.16}$$

である．ところがこの作用は，さらにそれ自身のゲージ対称性をもっており，さらにその Faddeev-Popov 行列式が必要になる，等々．こうして「ゴーストのゴースト」という無限のタワーがあることが明らかになる [10, 12]．前のゴーストの組で入った無限大を除くのに各 Faddeev-Popov 行列式が必要なので，これはさけられないことである．

幸いなことに，この級数はたし上げることができる．ゴースト数 $-\frac{1}{2}$ をもつ作用(7.2.13)から出発して，次にこの無限個のゴーストの作用を加えると，単に(7.2.11)で可能なすべてのゴースト数について加えたものが得られるのである．したがって，(7.2.11)は(7.2.13)のゲージを固定したものになっている．言い換えると，ゴースト数 $-\frac{1}{2}$ をもつ弦の汎関数が，ゴーストのゴーストを加えることにより任意のゴースト数の弦の汎関数に変わるのである．

同様に(7.2.13)の中のゲージ自由度を用いて，光錐ゲージをとることもできる [25]．しかしそのときの問題点として，ある場を消すためには運動方程式を使わなければならないということがある．したがって，質量殻条件がみたされている場合にだけ BRST 形式は光錐ゲージに移れるのであって，これはこの形式の限界である．

光錐ゲージへ移るには，ゲージ変換で消すべき不要な状態が，



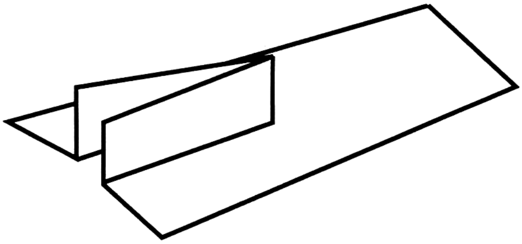


図 7.1：BRST 弦の場の理論の対称な相互作用．この頂点を用いて掃かれる面は，光錐の場の理論のように平坦ではない．4 弦相互作用は必要ではない．

$$\left\{a^+_{-n}a^-_{-m}b_{-p}c_{-q}\right\}|0\rangle \tag{7.3.17}$$

の形の状態すべての積として書けることを示せばよい．このような状態のレベル数は，状態の各集まりのレベル数の和

$$n_+ + n_- + n_b + n_c = N \tag{7.3.18}$$

である．

これらの不要な状態は，いろいろな機構により消せることが示せる．たとえば最低の状態 $n_+ = n_- = 0, +1$ に対し，次のことがわかる．

1. $n_c = n_b; n_- \geq n_+$ のほとんどの状態は，$\delta\Psi = Q\Lambda$ により消せる．

2. $n_c = n_b = 0; n_- \leq n_+$ の状態は，ラグランジュ乗数場である．

3. $n_c = n_b = 1; n_- \geq n_+$ で 1. に含まれない状態は，これらのラグランジュ乗数場により消せる．

これはすべての不要な状態に一般化できる．一般に，これらの不要な状態はすべて理論のゲージ不変性を使うか，ラグランジュ乗数場を使うことにより消すことができるのである．そして，物理的な横波の DDF 状態だけがこの消去の後に残る．

まとめると，作用(7.2.13)をゲージ固定してもとの BRST 作用(7.2.11)および前章の光錐の作用のいずれもが得られることを示した．($|\Psi\rangle$ の中のすべての高次励起状態を消すことにより)作用が(7.1.10)にもどることも示せる．

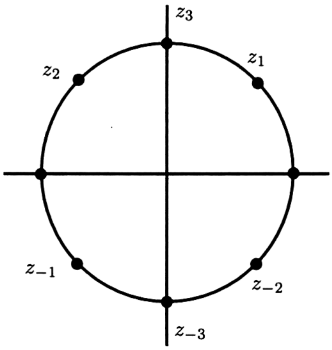


図 7.2：BRST 弦の場の理論の共形面．この共形面は，6 つの電荷をとり，図をぬい合わせて 3 つの電荷をもつ面を得るか，面にリーマンカットをおくことにより表せる．

7.4 相互作用

弦が単純に内部で分裂する光錐の場の理論と違って，Witten の相互作用する BRST 形式［16］では，図 7.1 に示した形を用いる．（一見この形は運動量保存則を破るように見える．しかし弦の運動量がその長さに結びついているのは，光錐ゲージだけである．共変的なアプローチでは，パラメーターづけの長さは運動量に関係しておらずこの図は許されるのである．） ここでは，すべての弦の長さは同じにしてある．(6.4.4) のデルタ関数を一般化して，この新しい形を含める：

$$
\begin{aligned}
S_3 &= \int DX_{123}\Phi(X_1)\Phi(X_2)\Phi(X_3)\delta_{123} \\
&= \int DX_{123}\langle\Phi_1|\langle\Phi_2|\langle\Phi_3|X_1\rangle|X_2\rangle|X_3\rangle\delta_{123}.
\end{aligned}
\tag{7.4.1}
$$

ここで，

$$
\delta_{123} = \prod_{0\le\sigma\le\pi/2}\prod_{r=1}^{3}\delta[X_r(\sigma) - X_{r-1}(\pi-\sigma)] \tag{7.4.2}
$$

である．

(6.5.2) と同様に，頂点を振動子の形に書くためには，上半平面を考えている形に移す共形写像を見つけなければならない［26–32］．ところが残念ながら，3 つの電荷の（カットなしの）上半平面への共形写像は，この BRST 頂点に対しては存在しない．なぜならば，電荷の和はふつう 0 ととるのに，ここではこの対称な形の 3 つの電荷の和は 3 にならなければならないからである．この答は，和が 0 になる 6 つの電荷をもつ静電場を考え，境界を同一視して 3 つの電荷があるのと似させればよいのである．これには，複素平面のいくつかの領域を切ってつなぐことが必要となる．写像は（図 7.2 を見よ）

$$
\rho = \sum_{i=-3}^{+3}\alpha_i\ln(z - z_i) = \ln\frac{z^3 - i}{z^3 + i} - \frac{i\pi}{2} \tag{7.4.3}
$$

である．ここで，

$$\begin{gathered}\alpha_1=\alpha_2=\alpha_{-3}=1;\quad \alpha_{-1}=\alpha_{-2}=\alpha_3=-1\\ z_1=e^{i\pi/6};\quad z_2=e^{i5\pi/6};\quad z_3=e^{i\pi/2}\\ z_{-1}=-z_1;\quad z_{-2}=-z_2;\quad z_{-3}=-z_3\end{gathered}\tag{7.4.4}$$

である．幸いなことに，この写像は逆がとれて z について解くことができるので，ノイマン関数を具体的に構成することができる．写像の逆をとって，

$$z=z_a\left(\frac{1+ie^{\zeta_a}}{1-ie^{\zeta_a}}\right)^{\frac{1}{3}}\tag{7.4.5}$$

を得る．ここで，$a=1,2,3$ に対し

$$\rho=\zeta_a=\xi_a+i\eta_a\tag{7.4.6}$$

であり，$a=-1,-2,-3$ に対し

$$\rho=-(\zeta_a-i\pi)\tag{7.4.7}$$

である．フーリエ係数は，

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+ie^{\zeta}}{1-ie^{\zeta}}\right)^{\frac{1}{3}}&=\sum_{n=2k}A_{2k}e^{n\zeta}+i\sum_{n=2k+1}A_{2k+1}e^{n\zeta}\\ \left(\frac{1+ie^{\zeta}}{1-ie^{\zeta}}\right)^{\frac{2}{3}}&=\sum_{n=2k}B_{2k}e^{n\zeta}+i\sum_{n=2k+1}B_{2k+1}e^{n\zeta}\end{aligned}\tag{7.4.8}$$

の組み合わせに現れる．以上をいっしょにして，頂点に現れるノイマン関数が

$$\begin{aligned}N_{mn}=&-\frac{1}{6}(C+U+\bar{U})1-\frac{1}{6}\left(C-\frac{1}{2}U-\frac{1}{2}\bar{U}\right)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\\ &-\frac{i}{12}\sqrt{3}(U-\bar{U})\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{7.4.9}$$

であることがわかる．ここで，

$$\begin{aligned}C_{nm}&=2(-1)^n\delta_{n,m}/n\\ (U+\bar{U})_{nm}&=-2(-1)^n\left[\frac{A_nB_m+B_nA_m}{n+m}+\frac{A_nB_m-B_nA_m}{n-m}\right]\\ (U-\bar{U})_{nm}&=-2i\left[\frac{A_nB_m-B_nA_m}{n+m}+\frac{A_nB_m+B_nA_m}{n-m}\right]\end{aligned}\tag{7.4.10}$$

である．

演算子で具体的に書くと，

$$|V_{123}\rangle_X=\exp\left[\frac{1}{2}\alpha^r_{-n}N^{rs}_{nm}\alpha^s_{-m}+P^r_0N^{rs}_{0m}\alpha^s_{-m}+\frac{1}{2}N_{00}\sum_{r=1}^{3}P^2_{0r}\right]|0_{123}\rangle\tag{7.4.11}$$

となる．

ゴーストの連続性の条件を用いて，頂点関数へのゴーストの寄与も計算できる．(7.4.2)の X を，単純に b と c のゴーストで置き換えればよい．ゴーストの頂点は，

$$|V_{123}\rangle_{\mathrm{gh}} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{-n}^{r} X_{nm}^{rs} c_{-m}^{s}\right)|+++\rangle_{123} \tag{7.4.12}$$

である．ここで真空 $|+++\rangle_{123}$ は，(7.3.5)で導入した真空の 3 つの積である．$s=r$ または $s=r+2$ に対して，X 行列は，

$$X_{nm}^{rs} = -m(N_{nm}^{rs} - N_{nm}^{r,s+3}) \tag{7.4.13}$$

で与えられ，$s=r+1$ に対しては，

$$X_{nm}^{rs} = m(N_{nm}^{rs} - N_{nm}^{r,s+3}) \tag{7.4.14}$$

となる．最終的な頂点はこれらの 2 つの頂点の積で，それぞれは 2 つのまったく異なる空間で定義されている：

$$|V_{123}\rangle = |V_{123}\rangle_X |V_{123}\rangle_{\mathrm{gh}}.$$

長い計算により，この頂点が BRST 不変性

$$[Q_1 + Q_2 + Q_3]|V_{123}\rangle = 0 \tag{7.4.15}$$

をみたすことが示せる [29]．

この頂点を書き下すには何通りかの異なる方法がある．まず共形場の理論から，反交換する b, c ゴーストの系はスカラー場 ϕ によりボソン化できることがわかっている．新しいゴーストによる頂点は，

$$\begin{aligned} V = &\int \prod_{r=1}^{3} DX_r\, D\phi_r \exp\left[\frac{3}{2} i\phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &\times \prod_{0\le\sigma\le\frac{\pi}{2}} \delta(X_\mu^r(\sigma) - X_\mu^{r+1}(\pi-\sigma))\delta(\phi_r(\sigma) - \phi_{r+1}(\pi-\sigma)) \end{aligned} \tag{7.4.16}$$

と書ける．(このボソン化した頂点の少々驚くべき点は，中点での挿入があることである．この項は $\frac{\pi}{2}$ だけで現れているので，σ の局所性を損わない．さらにそれは積の記号 $*$ に正しいゴースト数 $\frac{3}{2}$ を与える．ゲージパラメーター Λ は，ゴースト数 $-\frac{3}{2}$ をもつので，記号 $*$ がゴースト数 $\frac{3}{2}$ をもっていて，その結果 2 つのゲージパラメーター $\Lambda_{1,2}$ の積が，同じゴースト数をもつ第 3 のゲージパラメーター Λ_3 を与えなければならないからである.)

さらに対称な頂点を計算する別の方法がある．それは(複素平面の異なる領域をつなぎ合わせるのではなく)，リーマンカットをもつ共形写像を用いるものである．共形写像

$$\rho(z) = k \ln \frac{(z+1)(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right) + (z^2 - z + 1)^{3/2}}{z(1-z)} \tag{7.4.17}$$

を考える．この写像は $z = 0, 1, \infty$ にふつうの特異点をもつ(これは $\pm\infty$ の 3 つの出射

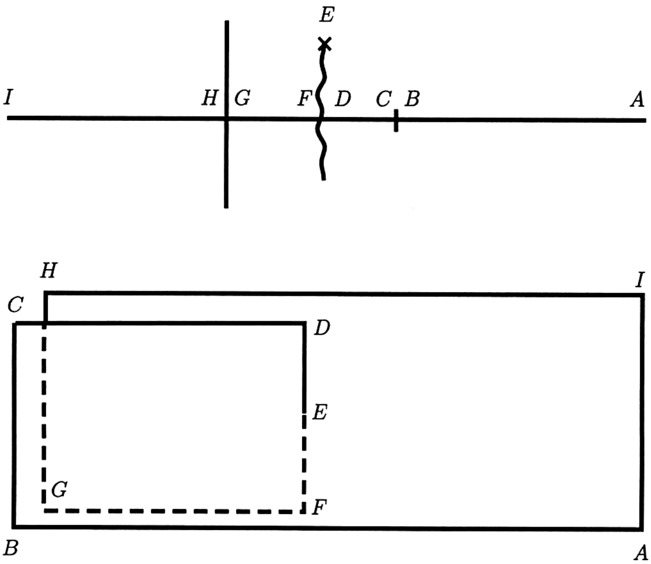


図 7.3

および入射する弦に対応する). しかし新しい点は，この共形写像が多重シートになった ρ 平面を作るリーマンカットをもっていることである．このカットはまさに，3つの弦の対称的な衝突を記述する ρ 平面の面を作るのに必要なものである．このカットは，下半平面の $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ から上半平面の $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ まで鉛直に拡がっている．この多重シートになっている ρ 平面は，図 7.3 の実 z 軸にそって動いてみることにより理解できる．

z の正の実軸上 $z=+\infty$ から出発して左へ動くとき，定数 k をうまくとって，ρ の正の実軸にそって負の実の無限大へ動く同様な線を動くようにできる．(点 B にある) 点 $z=1$ に来ると，実軸上の負の無限大へ来る．$z=1$ をとびこすことにより，ρ 平面で急に垂直方向に π だけ飛びあがる．$z=1$ から $z=\frac{1}{2}$ に動けば，ρ 平面で水平に右に C から D へ動き，$\rho=i\pi$ で y 軸に当たる．次に，リーマンカットを垂直に動いて $z=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}$ の点 E へ来ると，ρ 平面では y 軸を下がって $\rho=\frac{i}{2}\pi$ に動く．カットを下って点 $z=\frac{1}{2}$ に行くと，$\rho=\frac{i}{2}\pi$ から原点 F へ行くことになる．$z=\frac{1}{2}$ から $z=0$ へ動くと，(次のリーマンシート上で) $\rho=0$ から負の実の無限大へ動くことになる．$z=0$ をとびこすと，負の実の無限大で $i\pi$ だけ鉛直に動くことになる．最後に $z=0$ から $z=-\infty$ に動くと，$\rho=i\pi-\infty$ から $\rho=i\pi+\infty$ へ(H から I へ)動くことになる．

この写像(7.4.17)から直接ノイマン関数を引き出すこともできる．頂点関数へのこの別のアプローチは，文献 [30–32] に与えられているものである．

7.5 公理論的定式

弦のパラメーターづけの中点を特別な点として選び出した場合，弦の場の汎関数の間に閉じた代数を定義することができる．$|A\rangle$ で表される弦は，弦 $|B\rangle$ と中点が同じなのでくっつけられる．振動子状態を縮約すれば，同じ長さのもう1つ別の弦が残り，かけ算に似た手続きを定義できる［16］．たとえば，抽象的な記号

$$A * B = C \tag{7.5.1}$$

は，具体的には

$$\langle A_1|\langle B_2|V_{123}\rangle = |C_3\rangle \tag{7.5.2}$$

を意味する．ここで第1と第2の調和振動子は内積をとっており，第3の調和振動子で定義されている弦が残る．弦はすべて同じ長さをもつのでこの積の規則は閉じる．すなわち，長さ1の2つの弦の積が長さ1の別の弦に等しい．そのためさらに，場の汎関数のゲージ変換を，

$$\delta A = Q\Lambda + A * \Lambda - \Lambda * A \tag{7.5.3}$$

と定義することができる.「曲率」を

$$F = QA + A * A \tag{7.5.4}$$

と定義すれば，

$$\delta F = F * \Lambda - \Lambda * F \tag{7.5.5}$$

が得られる．したがってもし，

$$\int A * B = (-1)^{AB} \int B * A \tag{7.5.6}$$

(ここで，グラスマン奇の形式に対し反交換の符号を使う)をみたす「積分」と呼ばれる演算を定義できれば，2つの不変量，表面積分と作用そのもの

$$\begin{aligned} &\int F * F = \text{表面積分} \\ &\int L = \int \left(A * QA + \frac{2}{3} A * A * A \right) \end{aligned} \tag{7.5.7}$$

が得られる．

このアプローチの著しい特質は，ゲージ理論のように理論の本質的特徴を，次の5つの「公理」にまとめることができる点である．

1. べき零の微分の存在

$$Q^2 = 0 \tag{7.5.8}$$

2. $*$ 積の結合則

$$[A * B] * C = A * [B * C] \tag{7.5.9}$$

3. ライプニッツ則

$$Q[A*B] = QA*B + (-1)^A A*QB \tag{7.5.10}$$

4. 積の規則

$$\int A*B = (-1)^{AB}\int B*A \tag{7.5.11}$$

5. 積分の規則

$$\int QA = 0 \tag{7.5.12}$$

ここで，A がグラスマン奇ならば $(-1)^A$ は -1, A がグラスマン偶ならば $+1$ である．積分の演算を次のように定義する：

$$\begin{aligned}\int\Phi &= \int DX \prod_{0\le\sigma\le\pi/2}\delta(X(\sigma)-X(\pi-\sigma))\Phi(X)\\ &= \langle I|\Phi\rangle.\end{aligned} \tag{7.5.13}$$

この演算 I は少々奇妙である．それは弦 X の汎関数をとり，その中点を見つけ，弦がその中点のまわりに折り重なるように積分するものである．このように弦の汎関数は，この恒等演算により c 数に写像される．

この恒等演算子 I の具体的表現を与えることもできる：

$$\begin{aligned} I(X) = \langle X|I\rangle &= \prod_{n=1,3,5,\ldots}\delta(X_n)\\ |I\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{-n}\cdot a_{-n}\right)|0\rangle.\end{aligned} \tag{7.5.14}$$

さらに頂点関数は，共形変換の部分群で中点の位置を変えないような変換の下で不変である．そこで，

$$K_n = L_n - (-1)^n L_{-n} \tag{7.5.15}$$

を定義しよう．この演算子は形式の積に微分のように作用する：

$$K_n(A*B) = K_nA*B + A*K_nB. \tag{7.5.16}$$

積分は，次の関係

$$\int K_nA = \langle A|K_n|I\rangle = 0 \tag{7.5.17}$$

をみたし，頂点関数は

$$\sum_{r=1}^{3} K_n^{(r)}|V\rangle = 0 \tag{7.5.18}$$

をみたす．

このコホモロジー的アプローチの利点は，ゲージ理論の微分形式によるコホモロジー的定式に非常に似ていることである．マクスウェルの方程式に対しては，

$$\begin{aligned} d &= dx^\mu \partial_\mu; \quad d^2 = 0 \\ A &= dx^\mu A_\mu^a \tau^a \end{aligned} \tag{7.5.19}$$

が成り立つ．それはコンパクトな形

$$\begin{aligned} F &= dA + A * A \\ \delta A &= d\Lambda + A * \Lambda - \Lambda * A \\ \delta F &= F * \Lambda - \Lambda * F \end{aligned} \tag{7.5.20}$$

に書くことができる．これらの式から不変量

$$\int F * F = \int d \left[A * dA + \frac{2}{3} A * A * A \right] \tag{7.5.21}$$

を書き下すことができる．

BRST のアプローチの強みは，5 つの公理と曲率形式の定義を書き下して，作用がゲージ不変であることを容易に示すことができることである．これらの美しい公理は非常に多くの情報を要約したものであり，弦模型を 5 つの公理にまとめているのである．

しかしながら BRST のアプローチの欠点として，これらの公理の起源が明らかでない．これらの 5 つの公理は，原理的にはいかなるコホモロジー的系にも同様にあてはまる．したがって，これらの公理がどこから来ているのか理解できていない．たとえば一般相対性理論は，すでに見たように 2 つの原理から導くことができる．そしてこれらの原理は，コホモロジーの 5 つの公理に再定式化できる．したがって，この 5 つの公理は基本的なものではなく，テンソル解析を書き下すコンパクトで便利な方法にすぎない．そこで第 1 原理から，これらの公理を導くことのできるような基本となる幾何学的原理を探さねばならない．この 5 つの公理(すなわちテンソル解析)は，新しい無限次元の群から自然に出てくるはずのものなのである．

7.6 同等性の証明

明らかなことではないが，この BRST 頂点 $|V_{123}\rangle$ は，外線粒子が質量殻条件をみたすとき，L_n で生成される共形変換により移ることのできる他のどんな質量殻条件をみたす頂点関数とも同等になる．たとえば，もとの頂点の共形変換として表せる別の頂点関数

$$|\bar{V}_{123}\rangle = \prod_{r=1}^{3} \exp\left[\sum_{n \geq 0} \varepsilon_n^r L_{-n}^r \right] |V_{123}\rangle \tag{7.6.1}$$

を定義しよう．この式に，$\langle \text{phys}|L_{-n} = 0$ をみたす物理的状態 $|\text{phys}\rangle$ を作用させると，

$$\langle \text{phys}|V_{123}\rangle = \langle \text{phys}|\bar{V}_{123}\rangle \tag{7.6.2}$$

が残る．したがってこの 2 つの頂点関数は，質量殻条件をみたす同じ行列要素をもつ．このようにしてここに示した頂点関数が質量殻条件をみたすとき，双対模型の初期の

時代に発見された Caneschi-Schwimmer-Veneziano (CSV) [33, 34] 頂点の共変的なものに同等であることが示された．(この頂点関数は実は，N 点樹木をとり，振幅を 3 回因子化して 3 レッジェオン頂点関数を引き出すことにより求められた.)　こうして，どちらの頂点を用いても同じ S 行列が得られることがわかる．これにより BRST 形式で見つかった 3 弦頂点が，その幾何学はまったく異なるにもかかわらず，昔の CSV 頂点とまったく同じ行列要素を与えることが証明されている [29, 30]．実際この事実を用いて，3 つの頂点(古い光錐の頂点，古い共変的頂点，新しい BRST 頂点)がすべて同じ S 行列要素を与えることを示せる．

頂点関数が Veneziano 模型の質量殻条件をみたす正しい頂点関数を与えることの証明は極めて簡単である [30–32, 35–36]．まず変数 z の関数であるコヒーレント状態で両方の頂点関数の行列要素をとり，それから得られた表式が互いに共形変換によって関係していることを示す．そして共形変換が(7.6.1)のように表せることを示せばよい．

古い CSV 頂点は，

$$|V_{\rm CSV}\rangle = \prod_{i=1}^{3} \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i^\mu \cdot a_{-n,\mu}^{(i+1)}}{\sqrt{n}} + \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{-n,\nu}^{(i)} C_{nm} a_{-m}^{(i+1),\nu}\right)|0\rangle_{123} \tag{7.6.3}$$

である．ここで C 行列は次の性質

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \frac{z^m}{\sqrt{m}} = \frac{(1-z)^n - 1}{\sqrt{z}} \tag{7.6.4}$$

をみたす．(チェックとして，レッジェオンの足の 1 つと真空との内積をとり，3 振動子のヒルベルト空間を 1 つの振動子に変えれば，タキオンのふつうの頂点関数を再現できる．したがって $\langle 0_1|V_{\rm CSV}\rangle$ は，ふつうの Veneziano 頂点関数に等しい.)

L_{-n} で生成される変換を除いて，この頂点関数が対称な頂点に等しいことを示そう[1]．そのために，まず((2.6.18)で導入した)コヒーレント状態

$$|z,k\rangle = \exp\left(\sum_n k_\mu a_{-n}^\mu z^n\right)|0\rangle \tag{7.6.5}$$

に対する共形変換の作用を分析しよう．直接計算することにより，この状態に Virasoro 演算子を作用させると，

$$L_n|z,k\rangle = [(n+1)k^2 z^n + z^{n+1} d_z]|z,k\rangle \tag{7.6.6}$$

となることが示せる．これが L_n が 1 つ作用したときのコヒーレント状態の変換である．次に任意個の L_n をコヒーレント状態に作用させる：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n L_n |z,k\rangle = \left[k^2 f'(z) + f(z)\frac{d}{dz}\right]|z,k\rangle. \tag{7.6.7}$$

ここで関数 $f(z)$ は，

$$f(z) = z\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \tag{7.6.8}$$

[1] 以下の議論は，文献 [32] に従っている．

と定義した．したがって一般の共形変換は，コヒーレント状態に次の変換を生じる：

$$e^{\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n L_n}|z,k\rangle = \left(\frac{d\bar{z}}{dz}\right)^{k^2} |\bar{z},k\rangle. \tag{7.6.9}$$

ここで，

$$\bar{z} = g^{-1}(g(z)+1) \tag{7.6.10}$$

$$\frac{dg}{dz} = \frac{1}{f(z)} \tag{7.6.11}$$

である．(7.6.9)を(4.1.8)と比べてみよ．後者は，共形群の下でウェイト h の場の変換を与えている．

これらの結果が得られたので今や，2 つの質量殻条件をみたす頂点関数の同等性を示すことができる．まず最初に 3 レッジェオン頂点関数と，3 つの任意のコヒーレント状態との内積をとる [32]：

$$\prod_{i=1}^{3}\langle k_i, z_i|V_{\mathrm{CSV}}\rangle = \prod_{i=1}^{3}\left|z_i - \frac{1}{1-z_{i+1}}\right|^{k_i\cdot k_{i+1}} |1-z_i|^{k_i\cdot k_{i-1}}. \tag{7.6.12}$$

(7.6.4)の C 行列の定義から，これは具体的に計算できる．

次のステップは，対称な BRST 頂点(7.4.11)と任意の 3 つのコヒーレント状態との内積をとり，上に与えた表式と比べることである．そのとき次の公式が必要となる：

$$\begin{aligned}
\sum_{n,m} N^{12}_{nm} z_1^n z_2^m &= \ln\left|\bar{z}(z_1) - \frac{1}{1-\bar{z}(z_2)}\right| \\
\sum_{n,m} N^{23}_{nm} z_2^n z_3^m &= \ln\left|\frac{1}{1-\bar{z}(z_2)} - \frac{\bar{z}(z_3)-1}{\bar{z}(z_3)}\right| + \ln|z_3| + \ln\left|\frac{d\bar{z}}{dz}\right|_{z=0} \\
\sum_{n,m} N^{11}_{nm} z_1^n {z'}_1^m &= \ln\left|\frac{\bar{z}(z_1)-\bar{z}(z_1')}{z_1 - z_1'}\right| - \ln\left|\frac{d\bar{z}}{dz}\right|_{z=0} \\
\sum_{n,m} N^{11}_{nm} z_1^n z_1^m &= \ln\left|\frac{d\bar{z}}{dz_1}\right| - \ln\left|\frac{d\bar{z}}{dz}\right|_{z=0}.
\end{aligned} \tag{7.6.13}$$

これらの恒等式により，コヒーレント状態 $\prod_{i=1}^{3}\langle k_i, z_i|$ と対称な BRST 頂点関数の間の行列要素の具体的形が求まる．この表式を(7.6.12)と比べると，古い CSV 頂点と新しい BRST 頂点との間の関係

$$\prod_{i=1}^{3}\langle k_i, z_i|V_{\mathrm{CSV}}\rangle = \prod_{i=1}^{3}\langle \bar{z}_i(z_i), k_i|V\rangle \prod_{i=1}^{3}\left(\frac{d\bar{z}_i(z_i)}{dz_i}\right)^{k_i^2} \tag{7.6.14}$$

がわかる．これが求めていた表式である．これは CSV 頂点の行列要素と，対称な BRST 頂点の行列要素が，ある因子の k^2 のべき乗で関係していることを示している．そこでこれを(7.6.9)と比べると，この因子が L_n によって表されることがわかる．以上をまとめると，(少なくともコヒーレント状態に対し) (7.6.1)の具体的な解を求め，CSV 頂点と BRST 頂点が共形変換で関係しており，質量殻条件をみたす同じ行列要素を与

えることを示した．

もう1つ別の方法で，CSV 頂点が対称な頂点と同等であることが示せる．それは複素関数の共形変換の性質を使わずに，(7.4.17)の展開を使うものである．L_n は複素関数に $z^{n+1}d_z$ のように作用する．そこで，

$$W(z) = -\frac{8}{27}\frac{(z+1)(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)-(z^2-z+1)^{3/2}}{z^2(1-z)}$$
$$= 1+\frac{1}{2}z+\frac{9}{16}z^2+\cdots$$

と定義しよう．

$$W(z) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n L_n\right] z$$

となる一連の係数 a_n が存在する．実際にこれらの係数を求めることは難しいかもしれないが，原理的にはこれらの係数はいくらでも正確に求めることができる．たとえば $a_1=\frac{1}{2}$ で $a_2=\frac{5}{16}$ である．こうして，対称な頂点と CSV 頂点は，共形変換

$$\langle V|e^{-\ln(3\sqrt{3}/4)\sum_{r=1}^{3}(L_0^r-1)} = \langle V_{\mathrm{CSV}}|e^{-\sum_{r=1}^{3}\sum_{n=1}^{\infty}a_n L_n^r}$$

で関係していることがわかる．

これで Witten の対称な頂点と CSV 頂点の関係がついたが，まだ互いに何の関係もないように見える BRST 弦の場の理論が2つあるという問題がある．相互作用する理論の別の BRST 定式化は古い光錐の頂点に基づくもので，そこでは弦は内部の点で分離したり結合したりする．再び3弦頂点関数が，共変なディラックのデルタ関数になると仮定しよう [18–24]：

$$|V_{123}\rangle = \int DX_{123}|X_1\rangle|X_2\rangle|X_3\rangle\prod_{\sigma}\delta\left(\sum_{r=1}^{3}\theta_r(\sigma_r)X_r(\sigma_r)\right). \tag{7.6.15}$$

この新しい頂点関数は，まさに古い光錐ゲージのもの(6.4.5)と同じであることに注意しておくのが重要である．ただし今は調和振動子が横波成分だけではなく完全に共変的であり，これにゴーストの頂点もかけたものである．これら2つをかければ,「共変化した光錐」(covariantized light cone)の頂点を得る．

共変化した光錐の頂点が，BRST 不変性

$$\left\{\sum_{r=1}^{3}Q^{(r)}\right\}|V\rangle = 0 \tag{7.6.16}$$

をみたすことが確かめられる．

またこの光錐の頂点を共変化したものが，質量殻条件をみたす CSV 3 レッジェオン頂点関数と同等であることも証明できる．しかしここでは，前に用いたのと異なる証明法を用いよう．CSV 頂点関数のみたす連続条件が，共形変換の後で光錐頂点関数の連続の条件に書けることを示す．連続条件が頂点を定義するので，2つの頂点が共形変換で関係していることが出るはずである．

今 CSV 頂点関数を，

$$|V_{\rm CSV}\rangle = \exp\left(\sum_{r=1}^{3}\sum_{m=0,n=1}^{\infty}\alpha_{-m}^{\mu(r)}\alpha_{-n,\mu}^{(r+1)}C_{mn}\right)|0\rangle \tag{7.6.17}$$

と書こう．ここで，

$$C_{mn} = (-1)^n\Gamma(n)\Gamma^{-1}(1+m)\Gamma^{-1}(1+n-m) \tag{7.6.18}$$

である．この頂点関数に次の連続の条件が課せると仮定する．すなわち未知の A, B, C に対し，

$$\left\{A(z)P_1^\mu[(1-z)^{-1}] + B(z)P_2^\mu[1-z^{-1}] + C(z)P_3^\mu[z]\right\}|V_{\rm CSV}\rangle = 0 \tag{7.6.19}$$

ここで P は

$$P^{\mu(r)} = \sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_n^\mu z^{-n} \tag{7.6.20}$$

で与えられる．いろいろな調和振動子を $|V_{\rm CSV}\rangle$ と交換させれば A, B, C に条件

$$-\frac{A}{z} + B - \frac{C}{1-z} = 0 \tag{7.6.21}$$

を得る．これはまだ，A, B, C の値を決めるにはゆるすぎる．さらにこれらの関数がどこで収束するかを注意深く調べることにより，$|z| > 1$ のとき $C = 0$ に，$|z-1| < |z|$ のとき $B = 0$ に，$|1-z| > 1$ のとき $A = 0$ においてよいことがわかる．便宜上 $B = 0$ をとることにする．それでもまだ任意性が残っている．そこでとくに，ある γ_2 に対し

$$A = \gamma_2\frac{z}{1-\gamma_2 z}; \quad B = 0; \quad C = -\gamma_2\frac{1-z}{1-\gamma_2 z} \tag{7.6.22}$$

と選ぶことにする．

われわれの目標はこの頂点とふつうの光錐形式の間の関係を示すことである．後者は，

$$\rho = \alpha_1\ln(z-1) + \alpha_2\ln z \tag{7.6.23}$$

により，上半平面を光錐の配位に写像するものである．前と同じく，ρ 平面で 3 弦頂点関数を σ 方向にパラメーター η_r でパラメーターづけをする．ここで，

$$\eta_3 = \begin{cases} -\beta_2\eta_2 + \beta_2\pi\ ; & 0 \le \eta_3 \le \beta_2\pi \\ -\beta_1\eta_1 + \pi\ ; & \beta_2\pi \le \eta_3 \le \pi \end{cases} \tag{7.6.24}$$

および，

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{|\alpha_3|}; \quad \beta_2 = \frac{\alpha_2}{|\alpha_3|}; \quad \gamma_r = -\frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r}; \quad \delta_r = e^{i\eta_r} \tag{7.6.25}$$

である．これらの定義を用いれば，A と C の係数を

$$A = \frac{(1-\gamma_1)\delta_1}{(1-z)^{-1}}\frac{d(1-z)^{-1}}{d\delta_1}; \quad C = \frac{\delta_3}{z}\frac{dz}{d\delta_3} \tag{7.6.26}$$

と書き換えることができる．ここで重要な段階にさしかかる．共形群の下で，P は次のように変換することがわかっている(ふつうの変数の指数をとっている (4.1.7) を見よ.)

$$P_\mu(z) = \left(\frac{z}{\rho}\frac{d\rho}{dz}\right)^h P_\mu(\rho) \tag{7.6.27}$$

連続の式は，

$$\left(\frac{(1-\gamma_1)\delta_1}{(1-z)^{-1}}\frac{d(1-z)^{-1}}{d\delta_1}P_1^\mu + \frac{\delta_3}{z}\frac{dz}{d\delta_3}P_3^\mu\right)|V\rangle = 0 \tag{7.6.28}$$

と書ける．ここで共形群の下での P の変換性を用いれば，

$$[(1-\gamma_1)P_1^\mu(\delta_1) + P_3^\mu(\delta_3)]|V\rangle = 0 \tag{7.6.29}$$

を得る．ところが $\delta_r = e^{i\eta_r}$ である．これが求める表式である．共形変換により η_r の異なる連続条件をみたす新しい頂点を作ったが，この η_r は 3 つの弦の σ 座標である．したがってこの新しい頂点関数は，まさに弦 1 と 3 の間の光錐頂点関数のもとの連続条件をみたしている．同様に異なる組み合わせをとることにより，弦 2 と 3 の間の連続条件もみたされることも示せる．したがって共変な Veneziano 頂点の連続条件が，共形変換により共変化した光錐の形の連続の式によって表せることを示したわけである．

ところが，共形変換は L_n 演算子で生成されるのであるから，このことは質量殻条件がみたされているとき，共変化した光錐頂点関数 (7.6.15) が共変な Veneziano 頂点 (7.6.17) と同じであることを意味している．

ここでなぜ 2 つの BRST 形式があるのかを説明しなければならない．1 つは完全に対称な頂点に基づくもので，他方は光錐の頂点に基づくものであり，両方とも質量殻条件をみたすとき同じ性質をもっている．しかし重要な細かい点では互いに似ていない．たとえば共変化した光錐の形式は，余分な 4 弦相互作用をもっている．これは共変化した光錐の理論のゲージ群が，正しく閉じないので必要になる．光錐の形に対して (7.5.3) をとろうとすると問題が生じる．余分の 4 弦相互作用なしには群が閉じず，それを加えたとしても質量殻条件がみたされるときだけ閉じるからである．

ところが対称な理論は，4 弦相互作用なしで矛盾がないことが示せる．このように，これら 2 つの理論は基本的に異なっている．

詳しいことは明らかになっていないのだが，この問題の解決は，共変化した光錐に基づいた第 2 の場の理論が実は不完全な理論であるためのようである．これは弦のすべての可能な「長さ」α_r について積分しなければならないからである．古い光錐の理論では，α_r の積分は実は弦の運動量についての積分だったので許された．ところが共変な理論では，α_r は余分なパラメーターで物理的意味をもっていない．それで α_r の積分は同じものの無限個のコピーを生じてしまう．たとえばスロープがゼロの極限で，この理論は無限個の Yang-Mills の作用

$$-\frac{1}{4}\int_0^\infty d\alpha\, F_{\mu\nu}(\alpha)^2 + \cdots \tag{7.6.30}$$

を生じるのである．これは明らかに意味がない．仮想のパラメーター α_r についての

積分による同じ量の無限個のコピーは，この場の理論に無限の無駄を生じているからである．このように第2量子化したBRSTのアプローチには，基本的な問題がある．

この問題は，α_r が純粋にゲージパラメーターとして表せ，したがってゲージ固定できることにより解決される．ところが今のBRST形式では，α_r を純粋なゲージパラメーターにすることはできない．弦の「長さ」をゲージ化するためには，理論の中の場の数を非常に増やさねばなないのである（［37, 38］も見よ）．

7.7 閉じた弦と超弦

残念ながら，閉じた弦と超弦の理論は開いたボソン弦ほど発展していない．たとえばBRST形式では，どのように正しい理論を書くかについては相当の混乱がある．**閉じた弦と超弦に対しては，「ゴーストの数」がすべてうまくあわないのである．** 実際単純なBRSTの作用は，まさに正しくないゴースト数をもつために0になる．そのために，Q または「ゴーストモード」のヒルベルト空間のどちらかを「矛盾なく切断」(consistent truncation) しなければならなくなる．

閉じた弦に対しては［11, 39, 40］，2つの同様なVirasoro生成子 L_n と $\bar{L}_n$ がある．したがってBRST形式では，$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1$ より真空は前の2倍のゴースト数をもつことになる：

$$|0\rangle = |-\rangle|-\rangle\,; \quad \langle 0| = \langle -|\langle -|. \tag{7.7.1}$$

一方 Q はゴースト数1のままである．ゴーストの数がうまくあわなくなるので，これは単純な作用が0になることを意味してしまう：

$$\langle \Phi|Q|\Phi\rangle = 0. \tag{7.7.2}$$

ゴースト数は $-1+1-1 \neq 0$ である．これは明らかに望ましくない．このゴースト数の問題にはいろいろな解決が考えられたが，そのどれも満足のいくものではない．たとえば Q の中のゼロモードを勝手に落とすが，Q のべき零の性質は保つようにできる．つまり，ゼロモード

$$c_0,\ b_0,\ \bar{c}_0,\ \bar{b}_0 \tag{7.7.3}$$

を除き，より少ないゼロモードの組

$$\hat{c}_0,\ \hat{b}_0 \tag{7.7.4}$$

で置き換えて，新しい演算子 $\hat{Q}$ を

$$\hat{Q} = \hat{c}_0(K+\bar{K}) + d + \delta + \bar{d} + \bar{\delta} - 2\hat{b}_0(R+\bar{R}) \tag{7.7.5}$$

と定義する．古いゼロモードは落として，（開弦に用いた組と似た）小さな組を入れていることに注意せよ．

また理論が σ 座標の原点によらないことを保証するために，閉弦に拘束条件

$$(K-\bar{K})|\Phi\rangle = 0 \tag{7.7.6}$$

を課さねばならない．

今は小さなゼロモードの組しかないので，前に開弦に対して用いた真空 $|-\rangle$ と $|+\rangle$ を用いることができる：

$$|\Phi\rangle = \phi|-\rangle + \psi|+\rangle. \tag{7.7.7}$$

この切断は，恒等式

$$\hat{Q}^2 = 0 \tag{7.7.8}$$

が成り立つようにしてあることに注意せよ．作用は，

$$\langle\Phi|\hat{Q}|\Phi\rangle \tag{7.7.9}$$

である．

さて超対称な場合へ移ろう．ここでは情況はずっと悪い．Neveu-Schwarz ボソンに対しては，実は BRST ゼロモードゴーストの数に問題はない．というのは，交換するゴースト γ，β は半整数のモードであり，真空の性質を変えないからである．BRST 真空はゴースト数 $-\frac{1}{2}$ をもつ．したがって BRST 作用は，やはり

$$\langle A|Q|A\rangle \tag{7.7.10}$$

である．

ところが Ramond フェルミオンに対しては [11, 41–53]，整数モードの交換する Faddeev-Popov ゴーストに深刻な問題がある．γ_0 をゴーストフェルミオン振動子のゼロモードとする．このゴーストがフェルミオン的でなくボソン的であるために，無限個の真空が可能になる．この無限の真空の各々は

$$\gamma_0^n|0\rangle \tag{7.7.11}$$

と書かれる．このために場の汎関数は，無限個の真空の級数に展開しなければならない：

$$\Phi(X, \gamma_0) = \sum_n^\infty \phi_n(X)\gamma_0^n. \tag{7.7.12}$$

どの真空を使うのだろうか？ これは全然不明で，BRST のアプローチの限界を示している．(共形場の理論でも「描像」変換演算子に同様な情況が生じる．しかし共形場の理論は質量殻条件をみたす形式なので，これらの描像はすべて同じになる．弦の場の理論では，定義により質量殻条件はなく，これらすべての真空を用いなければならない.)

BRST 形式で理論を切断する方法はいくつか提唱されている．Q をべき零にしたまま切断することも，場 $|\Phi\rangle$ を切断してゴーストの真空を無限個加えるのをやめることも，どちらでもできる．まず Neveu-Schwarz と Ramond 模型のゴースト場を同時に記述できるような統一的記法を導入することにしよう．つまり次のものを定義する [11]：

$$\begin{aligned} A_N^\mu &= (\alpha_n^\mu, \psi_{\dot{n}}^\mu) \\ B_N &= (b_n, \beta_{\dot{n}}) \\ C_N &= (c_n, \gamma_{\dot{n}}). \end{aligned} \tag{7.7.13}$$

ここで A_N^μ はふつうのボソン的弦および反交換する場 $\psi_{\dot{n}}^\mu$ の両方を表し，B_N と C_N は理論のゴースト場を表す．とくに b_n と c_n はボソン的弦に対応するゴーストで，$\beta_{\dot{n}}$ と $\gamma_{\dot{n}}$ はフェルミオン的場のゴーストである．n についている点は，整数または半整数モードを表す．交換関係は，

$$\begin{aligned} A_M^\mu A_N^\nu - (-1)^{MN} A_N^\nu A_M^\mu &= \eta^{\mu\nu}\delta(M+N) \\ B_M C_N + (-1)^{MN} C_N B_M &= \delta(M+N) \end{aligned} \tag{7.7.14}$$

である．ここで $(-1)^{MN}$ は，M と N がフェルミオン的ならば -1 で，その他ならば $+1$ に等しい．

もし，$[L_I, L_J] = F_{IJ}^K L_K$ ならば，この表記法で BRST 演算子は，

$$Q = C_{-N} L_N + F_{IJ}^K : C_{-J} C_{-I} B_K : \tag{7.7.15}$$

となる．ここで L_N はふつうの Virasoro 演算子である．

とくに Ramond 弦に対しては，この演算子は，

$$Q = c_0 K + \gamma_0 F + d + \delta - 2Rb_0 - 2\hat{R}\beta_0 + \gamma_0^2 b_0 \tag{7.7.16}$$

である．ここで，

$$\hat{R} = \frac{3}{4} M C_{-M} C_{\bar{M}} \tag{7.7.17}$$

および

$$F = F_0 + f_{\bar{M}}^M [C^{-\bar{M}} B_M - B_{-M} (-1)^{\bar{M}} C_{\bar{M}}] \tag{7.7.18}$$

である．ここで，$f_{\bar{M}}^M$ は，M がボソン的なら 2，M がフェルミオン的なら $M/2$ に等しく，添え字の上の棒はフェルミオンとボソンのモードを入れ替え，d, K, R, δ は Virasoro の場合の同様な演算子に対応するものである．

F_0 はふつうの Ramond 演算子で，超微分同相写像の代数を定義する次の交換関係をみたす：

$$\begin{aligned} \{G_m, G_n\} &= 2L_{m+n} + \frac{1}{2} D \left(m^2 - \frac{1}{4} \right) \delta_{m,-n} \\ [L_m, G_n] &= \left(\frac{1}{2} m - n \right) G_{m+n} \\ [L_m, F_n] &= \left(\frac{1}{2} m - n \right) F_{m+n} \\ \{F_m, F_n\} &= 2L_{m+n} + \frac{1}{2} D m^2 \delta_{m,-n} \\ [L_m, L_n] &= (m-n) L_{m+n} + \frac{D}{8} m^3 \delta_{m,-n}. \end{aligned} \tag{7.7.19}$$

超微分同相写像の代数はふつう物理的場によって書かれるが，ゴースト場 B_N と C_N によっても実現されることに注意しよう．

さらに演算子 F, K, 等は，次の交換関係をみたす：

$$d^2 = \delta^2 = 0; \quad F^2 = K; \quad 2\hat{R} = [F, R]; \quad \{d, \delta\} = F\{F, R\}. \tag{7.7.20}$$

これらの交換関係は，BRST 演算子 Q がべき零であることを示すのに十分である．

すでに述べたように，Ramond 部分の問題は，ゴーストモード γ_0 が整数モードであり，反交換関係でなく交換関係をみたすことにある．そのため整数 n に対し $\gamma_0^n|0\rangle$ で書ける**無限個のゴースト真空**がある．この問題をさける 1 つの方法は，演算子 Q のべき零性を保ちながら，ゼロモードを適当に切断することであった．

ここで重要なステップに達する．ボソン的閉弦の場合のように，ボソン的ゴーストモード γ_0, β_0 を切断し，フェルミオン的 $\hat{b}_0$ と $\hat{c}_0$ を導入して，

$$\hat{b}_0|\hat{0}\rangle = 0; \quad \langle\hat{0}|\hat{c}_0|\hat{0}\rangle = 1 \tag{7.7.21}$$

としよう．そして $\hat{Q}$ を修正して，理論からゼロモード γ_0 と β_0 をなくしてしまう．つまり，

$$\hat{Q} = \hat{c}_0 F + (-1)^{N_F}(d+\delta) - \hat{b}_0(FR + RF) \tag{7.7.22}$$

を定義する．ここで N_F は，状態のフェルミオン生成演算子全部の数である．$\hat{Q}^2 = 0$ となるようにした．これがこの修正された $\hat{Q}$ を定義する際の指導原理である．

Ramond 状態を定義するために，GSO 演算子を定義する．この表示では，それは

$$G = [\hat{b}_0, \hat{c}_0]\Gamma^{11}(-1)^{N_F} \tag{7.7.23}$$

となる．ここで N_F はゼロでないモードのみを数え，Γ^{11} は 10 次元のカイラルディラック行列である．この表示では，GSO 射影は正しくないスピンと統計をもつ状態を消す働きをする．

次に任意の Ramond 超場は，この切断して小さくしたフォック空間で，

$$|\Psi\rangle = [|\psi\rangle + \hat{c}_0|\xi\rangle]|\hat{0}\rangle \tag{7.7.24}$$

と分解できる．ここで $|\psi\rangle$ はカイラリティー $\Gamma^{11} = 1$ の 0 形式であり，$|\xi\rangle$ は $G = +1$ の (-1) 形式で，

$$\hat{b}_0|\hat{0}\rangle = 0; \quad \langle\hat{0}|\hat{c}_0|\hat{0}\rangle = 1 \tag{7.7.25}$$

である．

そして今の場合の作用は，

$$S = \langle\bar{\Psi}|\hat{Q}|\Psi\rangle \tag{7.7.26}$$

となる．ここで $\langle\bar{\Psi}| = \langle\Psi|\Gamma^0$ である．この作用は，

$$\delta|\Psi\rangle = \hat{Q}|\Lambda\rangle \tag{7.7.27}$$

の下で不変である．

(7.7.24) の分解を代入すれば，

$$S = \langle\bar{\psi}|F|\psi\rangle + \langle\bar{\xi}|FR + RF|\xi\rangle - \langle\bar{\psi}|d+\delta|\xi\rangle - \langle\bar{\xi}|d+\delta|\psi\rangle \tag{7.7.28}$$

を得る．この作用は別の方法，たとえば $|\Psi\rangle$ をうまく切断し，もとの Q を用いることによっても得られている．

ところがフェルミオン的閉弦を考えると，情況はずっと悪くなる．この場合拘束 $[K-\bar{K}]|\Psi\rangle=0$ は，

$$[F-\bar{F}]|\Psi\rangle=0 \tag{7.7.29}$$

となるが，これは**力学的な**拘束である．したがってこの拘束を状態に適用することはできない．

しかし σ について局所的で，相互作用にも一般化しそうなもう 1 つの切断 [17] を与えよう．$*$ と $\int$ の演算を作ったときに行ったゴースト数の数え方を思い出そう．そこではゴースト数をうまくとって，ゲージ対称性が閉じ，コホモロジーの公理(7.5.8)から(7.5.12)がみたされるようにした(次表を参照)．

このゴースト数のとり方が前に与えたコホモロジーの公理をみたすことは，容易に示せる．

そこでこれらの規則を開超弦の場合に拡張しよう．このコホモロジーの公理を保ち，さらに 2 つのゲージ変換が同じゴースト数の第 3 のゲージ変換を出すようにする：

対象	ゴースト数
Ψ	$-\frac{1}{2}$
Q	$+1$
$*$	$+\frac{3}{2}$
Λ	$-\frac{3}{2}$
$\int$	$-\frac{3}{2}$

これらの条件により，前に定義した $*$ と $\int$ が望ましくないゴースト数をもっていることがただちにわかる．実際これでは，作用は厳密に 0 となる．前にやったように，ゼロモードを「切断」するかわりに，**共形場の理論を用いて，足りないゴースト数を補おう**．BRST ゴースト場による挿入は中点にだけあれば σ についての局所性が損われない．場のゴースト数だけを変えるこの切断は，ゼロモードを切断する前のやり方よりもすぐれている．

この方法がうまくいくにはいくつかの新しい特徴を付け加えなければならない．

1. 超場 Ψ は NS 場 a と R 場 Ψ の和である：

$$\Psi=(a,\psi). \tag{7.7.30}$$

2. 同様に，ゲージパラメーター Λ も 2 つの部分の和である：

$$\Lambda=(\varepsilon,\chi). \tag{7.7.31}$$

3. $*$ のゴースト数は $\frac{1}{2}$ となる(というのは，(7.4.16)のように共形ゴーストは $\frac{3}{2}$ だけ寄与するが，今は超共形ゴーストが -1 寄与するから)．したがって，超弦に

対して新しいかけ算の規則を作らねばならず，それはゴースト数 $\frac{3}{2}$ をもつ(これを $\otimes$ と呼ぶことにする)．

4. 積分 $\int$ は，超共形ゴーストからの寄与のためゴースト数 $-\frac{1}{2}$ をもつ．ゴースト数 $-\frac{3}{2}$ をもつ新しい積分 $\oint$ の存在を仮定しなければならない．

さていろいろやってみると，すべての場と演算のゴースト数をうまく決めて，ゲージ変換が閉じ前の公理がみたされるようにできる [17]：

(7.7.32)

対象	ゴースト数
a	$-\frac{1}{2}$
ψ	0
ε	$-\frac{3}{2}$
χ	-1
Q	$+1$
$*$	$\frac{1}{2}$
$\otimes$	$\frac{3}{2}$
X	1
Y	-1
$\oint$	$-\frac{3}{2}$
$\int$	$-\frac{1}{2}$

ここで，X と Y は後で必要になる量で，ゴースト数をもつものである．

これで仮定をうまくみたすような予想ができたので，これらの場と演算 $\otimes$ と $\oint$ の具体的形を実際に計算することが問題となる．

まず，これらのゴースト数をもつ BRST 場を作ることは問題ない．単に(無限個のものの中から)正しい真空を選び，それが正しいゴースト数をもつようにすればよい．そして各状態にゴースト数射影演算子をかけて，正しいゴースト数をもつ一般化された BRST 場を得ることがいつでもできる．

もっと困難なのは，演算 $\oint$ と $\otimes$ を定義することである．

$*$ はゴースト数 $\frac{1}{2}$ しかもたないので，ゴースト数 1 と共形ウェイト 0 をもつ新しい共形演算子が必要となる．幸いなことに，共形場の理論によりそのような演算子

$$X = \{Q, \xi\} \tag{7.7.33}$$

が得られる．さて，ゲージパラメーターのかけ算の規則は，

$$\Lambda_1 \otimes \Lambda_2 - (1 \leftrightarrow 2) = \Lambda_3 \tag{7.7.34}$$

をみたさねばならない．この新しい X 演算子を用いれば，このかけ算規則をみたすことができる：

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \otimes \Lambda_2 &= (\varepsilon_1, \chi_1) \otimes (\varepsilon_2, \chi_2) \\ &= (X(\varepsilon_1 * \varepsilon_2) + \chi_1 * \chi_2, X(\varepsilon_1 * \chi_2 + \chi_1 * \varepsilon_2)). \end{aligned} \tag{7.7.35}$$

各場と各演算子のゴースト数を見れば，すべてのゴースト数が正しいことがわかる．こ

れを見るために，このかけ算規則を記号的にゴースト数によって書こう．目的はゴースト数 $\left(-\frac{3}{2},-1\right)$ をもつ 2 つの多重項をかけ合わせて，$\left(-\frac{3}{2},-1\right)$ の多重項にもどるようにすることである．このかけ算規則の中のいろいろなゴースト数を注意深く書いてみると，記号的に

$$\begin{aligned}\left(-\frac{3}{2},-1\right)\otimes\left(-\frac{3}{2},-1\right)&=\left(1-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1+\frac{1}{2}-1,1-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-1\right)\\&=\left(-\frac{3}{2},-1\right)\end{aligned} \tag{7.7.36}$$

を得る．これからこのかけ算は閉じていることがわかる．

次に，A の変分の中に生じる $A\otimes\Lambda$ も正しいゴースト数をもつことを示したい．次の演算のゴースト数を計算したいのである：

$$(a,\psi)\otimes(\varepsilon,\chi)=(X(a*\varepsilon)+\psi*\chi,X(\psi*\varepsilon+a*\chi)). \tag{7.7.37}$$

各部のゴースト数を注意深く数えれば，

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{2},0\right)\otimes\left(-\frac{3}{2},-1\right)&=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=0+\frac{1}{2}-1,1+0+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)\\&=\left(-\frac{1}{2},0\right)\end{aligned} \tag{7.7.38}$$

を得るので，確かに閉じている．

最後に，ゴースト数 $-\frac{3}{2}$ をもつ新しい $\oint$ 演算を構成する必要がある．単純な積分演算はゴースト数 $-\frac{1}{2}$ しかもっていないので，ゴースト数 -1 の演算子が必要である．再び共形場の理論により，そのような演算子

$$Y(\sigma)=c_-\partial_+\xi e^{-2\phi} \tag{7.7.39}$$

が得られる．この演算子は「逆描像変換演算子」(inverse picture changing operator) と呼ばれ，ある意味で演算子 X の逆である．つまり，

$$\lim_{\sigma_1\to\sigma_2}X(\sigma_1)Y(\sigma_2)=1 \tag{7.7.40}$$

を示すことができるので，X と Y は互いの逆になっている．この新しい演算子を用いて，新しい積分の演算子を

$$\oint(a,\psi)=\int Y\left(\frac{1}{2}\pi\right)a\psi \tag{7.7.41}$$

と定義する．すなわち積分の規則は，中点に $Y\left(\frac{1}{2}\pi\right)$ の因子を挿入することを除いては前と同じである．この演算子は弦の中点でのみ定義されているので，σ についての局所性を保つことに注意せよ．

これらの新しいゴースト数の演算子を用いて，今度は次の作用

$$S=\oint\left(A\otimes QA+\frac{2}{3}A\otimes A\otimes A\right) \tag{7.7.42}$$

が，

$$\delta A=QA+A\otimes\Lambda-\Lambda\otimes A \tag{7.7.43}$$

の下で不変であることが示せる．

この形式の利点は，相互作用する場合に一般化できる点である．すべての演算子は σ について局所的であるので，相互作用する弦に連続条件を課すことに何の問題もないからである．

弦の場の理論の有望な定式化についても少し述べておこう．それは背景計量によらず，幾何学の起源について手がかりを与えてくれるようなものである．この新しい定式化は「前幾何学的」(pregeometrical) アプローチ [54–56] と呼ばれ，驚くべき結論を出す．

まず作用

$$L=\frac{2}{3g^2}\Phi*\Phi*\Phi \tag{7.7.44}$$

を考える．一見この作用は意味をなさない．作用には時空の計量が関係していない(これは望ましいことである)が，次の 2 つの点がこの作用の致命的なところである．つまり，運動項がなく運動方程式が自明に見える．この奇妙な作用を調べるために，運動方程式

$$\Phi*\Phi=0 \tag{7.7.45}$$

を書こう．これはふつう $\Phi=0$ の解をもち，したがって点粒子の理論では理論がからっぽになる．ところが実はこの式は，今考えているような無限成分場の理論では無限個の連立方程式を，簡潔に表したものである．したがって，弦理論に対してはからっぽではない．今 0 でない古典解 Φ_0 がこの運動方程式にあると仮定しよう．それは，

$$\Phi_0*\Phi_0=0 \tag{7.7.46}$$

をみたす．この古典解のまわりに場を展開し，

$$\Phi\longrightarrow\Phi_0+g\Phi \tag{7.7.47}$$

これをラグランジアンに入れる．すると Φ_0 が古典的運動方程式をみたすので，新しい古典解に基づいた新しいラグランジアン

$$L=2\Phi*(\Phi_0*\Phi)+\frac{2g}{3}\Phi^3 \tag{7.7.48}$$

を得る．ここまでのところは，何も新しいことはないように見える．物理的理論とまだ何の関係もついていないからである．ここでこのアプローチの背後にある重要な仮定をしよう．つまり，

$$D\Phi=\Phi_0*\Phi-(-1)^{\Phi}\Phi*\Phi_0 \tag{7.7.49}$$

をみたす演算子 D が存在すると仮定する．もしこのような演算子 D が存在すれば，そ

れがべき零であることが示せる．この表式(7.7.49)をラグランジアンに入れると，

$$L = \Phi * D\Phi + \frac{2}{3} g\Phi^3 \tag{7.7.50}$$

となる．この D がふつうの BRST の Q に等しいとすることができれば，この作用はまさに運動項をもつ BRST 作用になるではないか！ こうしてふつうの BRST 作用が，理論の新しい古典解のまわりに展開することにより得られることがわかる．

このアプローチの新しい特徴は，どこにも背景の時空計量について言及していない点である．背景場は相互作用項でなく運動項にだけ出る．実際，運動方程式の古典解のまわりに展開したとき選択した背景場が現れるのである．これがこのアプローチが「前幾何学的」理論と呼ばれる理由である．原理的には，時空の幾何は多くの可能な真空のうちの 1 つとして出てくるべきものである．

しかし実際には，このアプローチの無矛盾性をチェックしなければならない．重要な式は，(7.7.49)であった．ある仮定の下で，この式の解で D が BRST 弦の場の理論の公理をみたすものを見つけることができるように思われる．この場合ふつうの平坦な空間の BRST 弦の場の理論は，Φ^3 作用の 1 つの解にほかならない．そこでおそらくこの作用の他の解が，異なる古典計量で定義された BRST 理論を与えるのであろうと考えられる．

例として，

$$\Phi_0 = Q_L I \tag{7.7.51}$$

と選ぼう．ここで Q_L は(開弦に対し)中点の左側だけで定義された BRST 演算子であり，I は恒等演算子である(弦の左半分と右半分が一致すれば 1 で，その他のときは 0 になる)．もとの BRST 演算子は，$Q_L + Q_R$ に等しい．作用に，

$$\Phi = Q_L I + g\Phi \tag{7.7.52}$$

を代入すれば，もとの BRST 作用(7.5.7)を再現することがわかる．(Q の右側は，$Q_R I = -Q_L I$ のために変形の途中で現れる.)

驚くべきことにこれらの定義は，7.5 節のもとの 5 つの公理と矛盾しないことが示せるので，ふつうの BRST 弦の作用は(7.7.45)の多くの可能な解の 1 つであると考えられる．

今までのところ，平坦な時空は(7.7.45)の矛盾のない解であることが示されている．しかし，古典的背景として他にどんなものが運動方程式の解として見つかるかは，今後に残された問題である．

最後に弦の場の理論の新しい方向を議論しよう．第 1 のものは，前に記述した開超弦で隠れていた欠点を正すものである．超弦の場の理論は実はアノーマリーをもつ [57]．たとえば 4 点振幅を計算するとき，3 弦頂点が世界面上でぶつかると 2 つの描像変換演算子 X がぶつかり発散を生じる．共形場の理論を用いて，2 つの描像変換演算子が同じ点にくると無限大を生じることが示せる．円板のモジュライ空間について積分するときに振幅が発散するだけではなく，ゲージ対称性自身にアノーマリーが生じる．問題は代数自身のなかに隠れているのである．

この問題を解決するために，発散がなくなるまで描像変換演算子をいじったり，弦のゴースト数を変えたりすることが考えられた．すべての描像が質量殻条件をみたす同じ超弦理論の振幅を与えなければならないので，1つの解決法は理論が定式化されている描像を変えることである．言い換えると作用は質量殻条件をみたさないところで定義されているのでいろいろな描像で定義できるのに対し，質量殻条件をみたすS行列は不変なはずである．

第2は閉弦に関する発展であり，おそらく弦の場の理論が直面しているもっとも緊急の問題であろう．単純にはすべての弦が同じ長さをもつとして3次の作用をもつような閉弦を考えるだろう．しかし Kaku と Lykken がそれから得られる振幅は Shapiro-Virasoro の振幅を完全には再現しないこと，すなわち積分領域にたりない部分があることを示した [58]．そこでモジュラー不変性を回復し，正しい積分領域を与える4弦相互作用を仮定した．ユニタリー性により，モジュラー不変性を回復するには無限個のダイアグラムが必要であり，作用は多項式でなくなることがわかる．

最後に Kaku と MIT および京都のグループが，完全な非多項式の閉弦場の理論を書き下した [59, 60, 61]．ゲージ不変性が閉弦の非多項式相互作用から得られるだけでなく，N 点振幅の完全なモジュラー積分領域が得られるようになっている．しかしこのボソン的弦の場の理論を超弦理論に拡張することはあまりうまくいっていない．閉弦の場の理論は非多項式なので，描像変換が衝突するときの問題がさらに大きくなるためである．今の場合，描像変換演算子がいくらでもたくさん世界面上で衝突することになってしまうのである．

第3の発展は，$D=2$ の閉弦の場合の非多項式閉弦の場の理論の構成である [62]．2次元では弦理論はリウビル理論によって定式化できる．作用は基本的に非多項式であるが，状態はずっと簡単であり中点でのゴーストの挿入は異なっている．

第4は，これらのすべての弦の場の理論を統一するかもしれない簡単な仮定に基づいた幾何学的弦の場の理論に関する発展である [63]．幾何学的理論は弦の長さをゲージ化しているので，(一定の弦の長さに基づいた) Witten の定式化と (変化する弦の長さに基づいた) 光錐的定式化をつなぐことができる．これにより2つの BRST 理論が統一され，これらは同じ理論の特別なゲージ固定をしたものと見なせる．第1の BRST 理論は，弦が中点で相互作用する「中点」ゲージで定義されたものであり，第2の BRST 理論は光錐理論のように弦が端点で相互作用する「端点」ゲージで定義されたものである．

最後に弦の場の理論はまだ発展途上の主題であることを注意しておく．そのため弦理論の非摂動的情報を与えるにはいたっていない．弦の場の理論は摂動論とは関係なく定義されているが，まだ難しくて非摂動的計算はできていない．これに対し M 理論は，厳密ではないが弦理論の非摂動的性質についてたくさんの情報をすでに与えてくれた．

M 理論が弦理論のように第2量子化した形で定式化できるかどうかは，これからの問題である．

7.8 まとめ

共変化したゲージのアプローチの起源は,

$$\delta|\Phi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} L_{-n}|\Lambda_n\rangle \tag{7.8.1}$$

の下で不変な理論を構成することであった．ゴースト場への場の変換の下で不変なYang-Mills 理論との類推で，この不変性を仮定した．実際前の式を分解してみると，まさにYang-Mills 理論の変分の線形部分が出るのである：

$$\langle\Phi|P(L_0-1)P|\Phi\rangle.$$

ここで P は射影演算子である．展開により，このゲージの問題の厳密解が得られる：

$$\langle\Phi|\left(L_0-\frac{1}{2}L_1L_{-1}+\cdots\right)|\Phi\rangle. \tag{7.8.2}$$

自由場のレベルでは，これはふつうのマクスウェルの作用を再現する．また力まかせにやれば高次まで解が書ける：

$$\begin{aligned} P(L_0-1)P = L_0 - 1 - \frac{1}{2}L_{-1}L_1 + L_{-1}^2\left(4L_0+\frac{1}{2}D-9\right)\Delta L_1^2 \\ + L_{-1}^2(6L_0+6)\Delta L_2 + \text{h.c.} \\ - L_{-2}(4L_0+2)(2L_0+2)\Delta L_2 + \cdots . \end{aligned} \tag{7.8.3}$$

ここで,

$$\Delta = 2[16L_0^2+(2D-10)L_0+D]^{-1} \tag{7.8.4}$$

で，P はゴースト場を除く射影演算子である．この理論は非局所的であることに注意する．しかし補助場を導入すれば非局所項を吸収できる．

補助場の必要性は，BRST 量子化のアプローチですでに現れている．Faddeev-Popov ゴーストは自由理論になっていることに注意する：

$$p_\theta^1(\partial_\sigma+\partial_\tau)\theta^1 + p_\theta^2(\partial_\tau-\partial_\sigma)\theta^2. \tag{7.8.5}$$

このことは，経路積分を変更してこれらの余分の自由度を取り入れなければならないことを意味している．それで場の汎関数のヒルベルト空間を拡張する必要がある：

$$\begin{aligned} 1 = |\theta\rangle|X\rangle \int DX\,D\theta\langle\theta|\langle X| \\ \langle\theta|\langle X|\Phi\rangle = \Phi(X,\theta). \end{aligned} \tag{7.8.6}$$

すなわちグリーン関数を展開して,

$$\Delta(X_i,\theta_i;X_j,\theta_j) = \int_{X_i,\theta_i}^{X_j,\theta_j} DX\, DP\, D\theta\, Dp_\theta \exp\left[i\int d\sigma d\tau L(\sigma,\tau)\right]$$
$$= \int D^2\Phi\, \Phi(X_i,\theta_i)\Phi^*(X_j,\theta_j)\exp\left[i\int_{X_i,\theta_i}^{X_j,\theta_j} DX\, D\theta\, L(\Phi)\right] \tag{7.8.7}$$

とするべきである．

BRST 量子化では，新しいべき零の演算子 Q を

$$Q = c_0(L_0-1)+\sum_{n=1}^{\infty}[c_{-n}L_n+L_{-n}c_n]-\frac{1}{2}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}(m-n):c_{-m}c_{-n}b_{n+m}: \tag{7.8.8}$$

$$Q^2 = 0 \tag{7.8.9}$$

により導入する．そして自由な作用は，

$$\begin{aligned} L &= \langle\Phi|Q|\Phi\rangle \\ \delta|\Phi\rangle &= Q|\Lambda\rangle \end{aligned} \tag{7.8.10}$$

と表される．

ノイマン関数の手法を用いれば，相互作用する理論へも一般化できる．そのためには，上半平面を完全に対称な配位に写像する共形写像が必要となる．1 つの取り方は，6 つの電荷の写像を重ねてつなぎ 3 弦頂点を作るものである：

$$\rho = \sum_{i=-3}^{+3}\alpha_i \ln(z-z_i) = \ln\frac{z^3-i}{z^3+i} - i\frac{\pi}{2}. \tag{7.8.11}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = \alpha_{-3} = 1 \\ \alpha_{-1} &= \alpha_{-2} = \alpha_3 = -1 \\ z_1 &= e^{i\pi/6};\quad z_2 = e^{i5\pi/6};\quad z_3 = e^{i\pi/2} \\ z_{-1} &= -z_1;\quad z_{-2} = -z_2;\quad z_{-3} = -z_3. \end{aligned} \tag{7.8.12}$$

これにより頂点関数の具体的公式が書ける：

$$|V_{123}\rangle = \exp\left[\frac{1}{2}\alpha_{-n}^r N_{nm}^{rs}\alpha_{-m}^s + P_0^r N_{0m}^{rs}\alpha_{-m}^s + \frac{1}{2}N_{00}\sum_{r=1}^{3}P_{0r}^2\right]|0_{123}\rangle. \tag{7.8.13}$$

BRST 理論における大きな進歩は，すべてが理論の基本的仮定に帰着できる形式であるということである．つまり，5 つの公理を用いて（それは導出したものでなく単なる仮定である）全体の BRST 理論を導けるのである．

1. べき零の微分の存在

$$Q^2 = 0 \tag{7.8.14}$$

2. 積の結合則

$$[A * B] * C = A * [B * C] \tag{7.8.15}$$

3. ライプニッツ則

$$Q[A * B] = QA * B + (-1)^A A * QB \tag{7.8.16}$$

4. 積の規則

$$\int A * B = (-1)^{AB} \int B * A \tag{7.8.17}$$

5. 積分の規則

$$\int QA = 0 \tag{7.8.18}$$

これらの規則を用いれば，不変な作用が

$$L = \int \left(\Phi * Q\Phi + \frac{2}{3} g\Phi * \Phi * \Phi \right) \tag{7.8.19}$$

となることが示せる．これは Chern-Simons 項である．

最後に，質量殻条件をみたすとき，3 弦頂点関数がふつうの CSV 頂点に同等であることが示せる：

$$|\bar{V}_{123}\rangle = \prod_{r=1}^{3} \exp\left[\sum_{n \geq 0} \varepsilon_n^r L_{-n}^r \right] |V_{123}\rangle. \tag{7.8.20}$$

したがって，

$$\langle \mathrm{phys}|V_{123}\rangle = \langle \mathrm{phys}|\bar{V}_{123}\rangle \tag{7.8.21}$$

となる．しかし困ったことに，共変化した光錐頂点も書け，それも質量殻条件をみたすときふつうの CSV 頂点に同等である．このように 2 つの同等な BRST 頂点があり，どちらも同じ(質量殻条件をみたす)頂点を出すという問題に直面する．

ボソン的開弦は BRST 形式で容易に書けるが，超弦と閉弦は BRST のアプローチではあまりうまくいかない．問題は超弦と閉弦の作用の単純なゴースト数がうまくいかなくて，まずい結果

$$\langle \Phi | Q | \Phi \rangle = 0$$

を出してしまうのである．そこでゴースト数を変えるために，ヒルベルト空間か Q 演算子を「切断」して，正しいゴースト数が得られるようにする方法がいくつか考えられた．このアプローチの問題は，ゼロモードを他のモードと異なるように取り扱っており，σ についての局所性が破られていることである．したがって，これらのアプローチはおそらく相互作用のある場合へは一般化できない．

もっと有望なアプローチは，ちょうど欠けているゴースト数をもつものをボソン化したゴースト演算子で作ってそれを中点に挿入することである．これは σ の局所性を損わない．

最後に新しい方向について述べる．

1. 背景場によらない弦の場の理論が単に作用の運動項を消すだけでできる．

2. 開超弦理論は，衝突する描像変換演算子のためにアノーマリーをもつ．この問題は作用を定義する描像を変えることで解決できる．

3. (弦の長さを固定した)ボソン的閉弦場の理論は必然的に非多項式である．ボソン的閉弦のゲージ不変な弦の場の理論の作用は具体的に構成された．しかしこれをどのようにして超弦に拡張するかはわかっていない．

4. $D=2$ の閉弦場の理論の作用は，リウビル場を使って構成された．

5. 弦の長さがゲージ化されている幾何学的弦の場の理論が構成され，Witten の弦の場の理論は「中点ゲージ」として，光錐的理論は「端点ゲージ」として得られる．

弦の場の理論の威力は単純な作用で非摂動的に定式化される点である．しかしこの理論はまだすばらしい結果を出していない．理論は定義されているが，あまりに難しくて非摂動的な情報を引き出せない．これに対し M 理論は，数学的にはうまく定義されていないがたくさんの非摂動的な情報を生んでいる．M 理論が第 2 量子化した形で書けるかどうかは残された問題である．

参考文献

[1] M. Kaku, *Nucl. Phys.* **B267**, 125 (1985).
[2] M. Kaku and J. Lykken, in *Symposium on Anomalies, Topology, and Geometry*, World Scientific, Singapore, 1985.
[3] T. Banks and M. Peskin, in *Symposium on Anomalies, Topology, and Geometry*, World Scientific, Singapore, 1985.
[4] R. C. Brower and C. B. Thorn, *Nucl. Phys.* **B31**, 163 (1971).
[5] V. Kac, *Lect. Notes in Phys.* **94**, 441 (1979); B. L. Feigin and D. B. Fuchs, *Sov. Math. Dokl.* **27**, 46 (1983) も参照.
[6] M. Kaku, *Phys. Lett.* **162B**, 97 (1985).
[7] M. Kato and K. Ogawa, *Nucl. Phys.* **B212**, 443 (1983).
[8] E. S. Fradkin and C. A. Vilkoviskii, *Phys. Lett.* **55B**, 224 (1975).
[9] W. Siegel, *Phys. Lett.* **142B**, 276 (1984); **151B**, 391, 396 (1985).
[10] T. Banks and M. Peskin, *Nucl. Phys.* **B264**, 513 (1986).
[11] T. Banks, D. Friedan, E. Martinec, M. E. Peskin, and C. R. Preitschopf, *Nucl. Phys.* **B274**, 71 (1896).
[12] W. Siegel and B. Zwiebach, *Nucl. Phys.* **B263**, 105 (1985).
[13] B. Zwiebach, CTP 1308, October 1985.
[14] K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo, and H. Ooguri, *Prog. Theor. Phys.* **75**, 162 (1986).
[15] D. Pfeffer, P. Ramond, and V. Rogers, *Nucl. Phys.* **B274**, 131 (1986).
[16] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B268**, 253 (1986).
[17] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B276**, 291 (1986).
[18] A. Neveu and P. C. West, *Phys. Lett.* **165B**, 63 (1985).
[19] A. Neveu, J. H. Schwarz, and P. C. West, *Phys. Lett.* **164B**, 51 (1985).
[20] A. Neveu and P. C. West, *Nucl. Phys.* **B268**, 125 (1986).
[21] A. Neveu, H. Nicolai, and P. C. West, *Nucl. Phys.* **B264**, 173 (1986).

[22] H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo, and K. Ogawa, *Phys. Lett.* **172B**, 186 (1986); *Phys. Lett.* **172B**, 195 (1986); 次も参照, I. Y. Aref'eva and I. V. Volovich, *Theor. Mat. Fiz.* **67**, 484 (1986).

[23] H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo, and K. Ogawa, *Phys. Rev.* **D34**, 2360 (1986); *Phys. Rev.* **D35**, 1318, 1356 (1987).

[24] H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo, and K. Ogawa, *Nucl. Phys.* **B283**, 433 (1987); 次も参照, N. P. Chang, H. Y. Guo, Z. Qui, and K. Wu, *CCNY-HEP-86/5*, 1986.

[25] M. E. Peskin and C. B. Thorn, *Nucl. Phys.* **B269**, 509 (1986).

[26] S. Giddings, *Nucl. Phys.* **B278**, 242 (1986).

[27] S. Giddings and E. Martinec, *Nucl. Phys.* **B278**, 91 (1986).

[28] S. Giddings, E. Martinec, and E. Witten, *Phys. Lett.* **176B**, 362 (1986).

[29] D. J. Gross and A. Jevicki, *Nucl. Phys.* **B282**, 1 (1987); **B287**, 225 (1987).

[30] S. Samuel, *Phys. Lett.* **181B**, 249, 255 (1986); N. Ohta, *Phys. Rev.* **D34**, 3785 (1986).

[31] E. Cremmer, C. B. Thorn, and A. Schwimmer, *Phys. Lett.* **179B**, 57 (1986).

[32] E. Cremmer, *Quantum Gravity-Intergrable and Gonformal Invariant Theories Conference*, LPTENS 86/32, September 1986.

[33] L. Caneschi, A. Schwimmer, and G. Veneziano, *Phys. Lett.* **30B**, 31 (1969).

[34] S. Sciuto, *Nuovo Ciminto Lett.* **2**, 411 (1969).

[35] A. R. Bogojevic and A. Jevicki, *Nucl. Phys.* **B287**, 381 (1987).

[36] A. Neveu and P. C. West, *Phys. Lett.* **179B** , 253 (1986).

[37] 弦の長さの別の取り扱いは, 次を見よ： A. Neveu and P. West, *Nucl. Phys.* **B293**, 266 (1987).

[38] W. Siegel and B. Zwiebach, *Nucl. Phys.* **B282**, 125 (1987).

[39] J. Lykken and S. Raby, *Nucl. Phys.* **B278**, 256 (1986).

[40] S. Sen and R. Holman, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1304 (1987).

[41] N. Ohta, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 440 (1986); **56**, 1316 (E) (1986); S. P. de Alwis and N. Ohta, *Phys. Lett.* **174B**, 383, 388 (1986); **B188**, 425 (1987); **B200**, 466 (1988).

[42] H. Terao and S. Uehara, *Phys. Lett.* **168B**, 70 (1986); *Phys. Lett.* **B173**, 134, 409 (1986); *Phys. Lett.* **179B**, 342 (1986).

[43] G. D. Date, M. Gunaydin, M. Pernici, K. Pilch, and P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett.* **171B**, 182 (1986).

[44] Y. Kazama, A. Neveu, H. Nicolai, and P. C. West, *Nucl. Phys.* **B276**, 366 (1986).

[45] H. Aratyn and A. H. Zimerman, *Nucl. Phys.* **B269**, 349 (1986); *Phys. Lett.* **165B**, 130 (1986); *Phys. Lett.* **166B**, 130 (1986); *Phys. Lett.* **168B**, 75 (1986).

[46] H. Ooguri, *Phys. Lett.* **172B**, 204 (1986).

[47] M. Awada, *Phys. Lett.* **172B**, 32 (1986); **180B**, 45 (1986); *Nucl. Phys.* **B282**, 349 (1987).

[48] A. Ballestrero and E. Maina, *Phys. Lett.* **180B**, 53 (1986).

[49] J. F. Tang and C. J. Zhu, *Phys. Lett.* **180B**, 50 (1986).

[50] K. Suehiro, *Nucl. Phys.* **B296**, 333 (1988).

[51] K. Itoh, K. Ogawa, and K. Suehiro, KUNS - 846 HE (TH)86/06.

[52] A. Leclair, *Phys. Lett.* **168B**, 53 (1986).

[53] A. Leclair and J. Distler, *Nucl. Phys.* **B273**, 552 (1986).

[54] A. Friedan, Enrico Fermi Institute Report No. 85-27, 1985; T. Yoneya, *Proceedings of the Seventh Workshop on Grand Unification/ICOBAN '86*, Toyama, Japan; E. Witten, unpublished.

[55] H. Hata, K. ltoh, T. Kugo, H. Kunitomo, and K. Ogawa, *Phys. Lett.* **175B**, 138 (1986).

[56] G. T. Horowitz, J. Lykken, R. Rohm, and A. Strominger, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 283 (1986). 次も参照, K. Kikkawa, M. Maeno, and S. Sawada, *Phys. Lett.* **197B**, 24 (1987).

[57] C. Wendt, *Nucl. Phys.* **B314**, 209 (1989).

[58] M. Kaku and J. Lykken, *Phys. Rev.* **D38**, 3067 (1988).

[59] M. Kaku an J. Lykken, *Phys. Rev.* **D38**, 3067 (1988); *Phys. Lett.* **250B**, 64 (1990).

[60] M. Saadi and B. Zwiebach, *Ann. Phys.* **192**, 213 (1989).

[61] T. Kugo, H. Kunitomo, and K. Suehiro, *Phys. Lett.* **226B**, 48 (1989).

[62] M. Kaku, Third Quantized Topological Gravity, in *20th Conf. on Differential Geometrical Methods in Theoretical Physics* (S. Cato and A. Rocha-Caridi, eds.) World Scientific, Singapore, 1991;
M. Kaku, Recent Developments in String Field Theory, in *Proceedingsof the Trieste Summer School in Physics*, World Scientific, Singapore, 1991;
M. Kaku, Symmetries and 2D String Field Theory, in *Proceedings of theThird International Wigner Symposium*, World Scientific, Singapore, 1993.

[63] M. Kaku, Strings, Conformal Fields, and Topology, Springer-Verlag, New York, 1991.

第III部

現象論と模型の構成

第8章

アノーマリーとAtiyah-Singerの定理

8.1 GUT現象論を越えて

われわれの欲しい理想的な理論は，知られているすべての相互作用を真に統一する場の理論で，少なくとも次の2つの基準をみたすものである．

1. それは新しい幾何学により表された単純な物理的仮定に基づいている．それには1つしか結合定数はないであろう．

2. それは最小の $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ の粒子の相互作用に重力が結合した有限の理論を与える．

今までこの本では第1の可能性を調べ，第2量子化した場の理論が2つの物理的原理に基づいて存在することを示した．しかしわれわれが今まで与えた弦理論の発展は，純粋に形式的なものである．いかに理論が美しくとも，知られている実験データと比べることができなければ捨てなければならない．統一場の理論の本当の検証は，それが低エネルギーで知られている実験データを再現できることだからである．

問題は10次元の理論から4次元への次元の破れが，非摂動的にだけ起き得ることである．摂動論のどんな有限の次数でも，時空の次元は完全に安定なように見える．一般に場の理論だけが，非摂動的計算をするのに唯一信頼できる形式である．なぜなら，第1量子化の形式は必ず摂動的だからである．残念ながら，弦理論で現実的な非摂動的計算をする方法はまだわかっていない．これは主に，弦の場の理論がまだその幼年期にあるためである．物理学者はいまだ，どの真空解の安定性も計算できていない．そこでこの本の第III部では，量子的安定性の問題は扱わないで，運動方程式の古典解だけに焦点をあてる．

この重大な制限があっても，古典的弦の理論の実験的結果を調べた初期の試みで，GUTsを越える豊富な新しい現象論が得られていることは驚きである．第III部では，弦理論は標準的GUT理論の結果と矛盾しないかどうかをまず問うことにする．とくに，それが$SU(5)$, $O(10)$ または E_6 のGUT理論を再現できるかを問う．弦理論はこの点ではある程度成功している．たとえば第10章で，$E_8 \otimes E_8$ ヘテロティック弦が古典的に E_6 に容易にこわれ，それがカイラルフェルミオンの解と満足できるGUT現象論を与えることを示す．

しかし弦理論が GUT 理論の標準的現象論を越えることも要求せねばならない．とくに次の疑問を弦理論に問わねばならない．

1. それは，3 世代のカイラルフェルミオンを説明できるか？
2. それは，陽子崩壊の実験結果を説明できるか？
3. それは，電子の質量が小さいことを説明できるか？
4. それは，超対称性の破れの後宇宙定数が 0 になることを説明できるか？

断言するのはまだ早いが，弦理論は内容が豊富なので上の疑問に答える数学的機構を含んでいる徴候がある．とくに新しい位相的な機構が入っていて，世代の数などの基本的な現象論的概念が，新しい位相的な言葉で言い換えられているのである．**位相は標準的 GUT 現象論を越えるための重要な新しい数学的特徴となっている．**

本章の初めで，弦理論で許されるアイソスピンの群を議論する．巡回対称性や因子化などの S 行列の性質は，理論のゲージ群に非常に弱い制限しか与えないことを見出すことになるであろう．それから弦理論のアノーマリーの相殺が，理論で許されるゲージ群に強い制限を課すことを示す．基本的には，超対称な理論のゲージ群は正確に 496 個の生成子を含まねばならず，SO(32) か $E_8 \otimes E_8$ しか許されないのである．

どのようにアノーマリーの相殺が起こるかを理解するためには，特性類(characteristic class)の基本的性質を復習しておくのが便利である．とくに，超対称性の新しい進歩により，簡単なラグランジアンから **Atiyah-Singer の指数定理**を証明することができる．伝統的には Atiyah-Singer の定理は，数学的定式化の複雑さのためにほとんどの物理学者には近づき難いものであった．

現象論の議論を始めるのに，まず Chan-Paton 因子によって模型にアイソスピンを入れる [1]．弦理論の初期の頃からずっと，アイソスピンの因子は簡単なかけ算の因子として模型に容易に導入できることが知られていた．(次の章では，コンパクト化と Kac-Moody 代数によりゲージ群を導入するずっと洗練された方法を議論する.)

Chan-Paton の方法によれば，散乱振幅 T は Veneziano のボルン項 A にアイソスピン行列のトレース(その両方ともが明白に巡回対称である)をかけて，外線のいろいろな置換について和をとって得られる：

$$T(1,2,3,\ldots,N) = \sum_{\text{置換}} \mathrm{Tr}(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_N)A(1,2,3,\ldots,N). \qquad (8.1.1)$$

トレースはアイソスピン群によらず巡回対称なので，群そのものの取り方には制限はない．そこで余分の条件を課して，ゲージ群の非物理的な取り方のいくつかを除くのが望ましい．まず散乱振幅に中間状態の完全系を挿入して，次のことを要求する．

1. 振幅 T が因子化する．
2. 外線のトゥイストが固有値 ± 1 を出す．

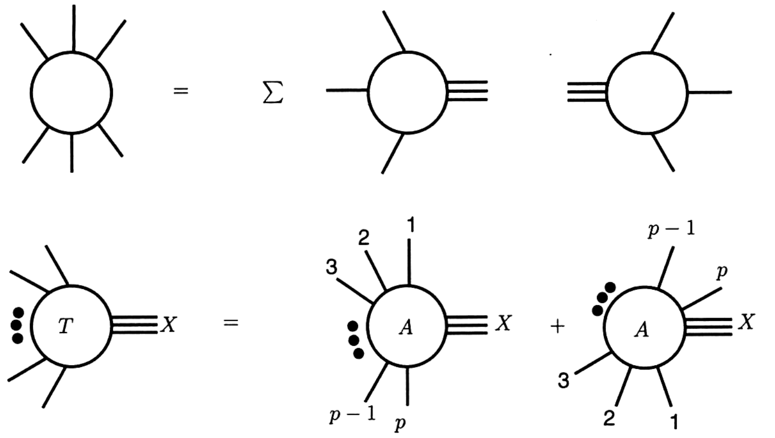


図 8.1：ユニタリー性により課される条件．振幅に Chan-Paton アイソスピン因子をかけて，アイソスピンが模型に導入できる．それはユニタリー性に由来するきつい条件に従わねばならない．因子化した散乱振幅は，Chan-Paton 因子の和になっていなければならない．外線は時計まわりまたは反時計まわりに並べてあるとする．（X は因子化した状態の集まりを表す．）

3. 外線と，内線の因子化したチャンネルの質量 0 の Yang-Mills 粒子が，ゲージ群の随伴表現に属す．

まず第 1 の条件，振幅が明白に因子化することから始めよう．図 8.1 では，N 個の外線を 2 つのかたまり，a と b にわけ，中間の線が粒子 X を表すとした．左側の部分は粒子 a が散乱して X になることを表し，右側の部分は粒子 X がこわれて粒子 b になることを表す．(5.1.7) に従い，

$$T(1,2,\ldots,N) = \sum_X \frac{1}{s-m_X^2} T(a\to X)T(b\to X) + \cdots \tag{8.1.2}$$

を得る．そこで，この因子化公式を Veneziano 振幅で表そう．各々の振幅は，

$$A(1,2,\ldots,N) = \sum_X \frac{1}{s-m_X^2} A(1,2,\ldots,X)A(X,p,p+1,\ldots,N) \tag{8.1.3}$$

に従う．Veneziano 振幅は自動的に因子化可能で，巡回対称であることに注意せよ．したがって因子 $T(a\to X)$ は，外線の巡回および反巡回順序の 2 つの項を含んでいなければならない．それで 2 つの T の積は，全部で 2×2 の項を含むはずである．これらの 4 つの項を具体的に書こう：

$$T(1,2,\ldots,N)=\frac{1}{s-m_X^2}\{\,\mathrm{Tr}(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{p-1}\lambda_p\lambda_{p+1}\cdots\lambda_{N-1}\lambda_N)$$
$$\times A(1,2,\ldots,p-1,p,X)A(X,p+1,\ldots,N-1,N)$$
$$+\mathrm{Tr}(\lambda_p\lambda_{p-1}\cdots\lambda_2\lambda_1\lambda_{p+1}\lambda_{p+2}\cdots\lambda_N)$$
$$\times A(p,p-1,\ldots,2,1,X)A(X,p+1,p+2,\ldots,N-1,N)$$
$$+\mathrm{Tr}(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p\lambda_N\lambda_{N-1}\cdots\lambda_{p+1})$$
$$\times A(1,2,\ldots,p,X)A(X,N,\ldots,p+1)$$
$$+\mathrm{Tr}(\lambda_p\lambda_{p-1}\cdots\lambda_1\lambda_N\lambda_{N-1}\cdots\lambda_{p+1})$$
$$\times A(p,\ldots,1,X)A(X,N,\ldots,p+1)\,\}. \tag{8.1.4}$$

次にこの表式を簡単にしたい．ここで第 2 の仮定を課し，トゥイスト演算子が

$$\Omega=(-1)^{N+1} \tag{8.1.5}$$

に対応するとする．すべての外線をトゥイストすれば，それは巡回順序を反巡回順序に変えることに注意せよ．仮定により，われわれは今質量のないベクトル粒子の散乱のみを考えている．それは $N=0$ をもつので，トゥイスト演算子は各外線に (-1) の因子を与える．それでトゥイスト演算子への全体の寄与は，

$$A(1,2,\ldots,p,X)=(-1)^{p+1}A(X,p,p-1,\ldots,2,1) \tag{8.1.6}$$

となる．

さて，こうするとすべての項をまとめることができて，

$$\mathrm{Tr}\big\{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p-(-1)^p\lambda_p\lambda_{p-1}\cdots\lambda_1]$$
$$\times[\lambda_{p+1}\lambda_{p+2}\cdots\lambda_N-(-1)^{N-p}\lambda_N\lambda_{N-1}\cdots\lambda_{p+1})]\big\}$$
$$\times A(1,2,\ldots,X)A(X,p+1,\ldots,N) \tag{8.1.7}$$

となる．そこで，この式にアイソスピン行列 λ_α の完全系を挿入しよう．すなわちいつでも，

$$\delta_{\alpha\beta}=\mathrm{Tr}(\lambda_\alpha\lambda_\beta) \tag{8.1.8}$$

とできるので，

$$\mathrm{Tr}\left\{[\lambda_1\cdots\lambda_p-(-1)^p\lambda_p\cdots\lambda_1][\lambda_{p+1}\cdots\lambda_N-(-1)^{N-p}\lambda_N\cdots\lambda_{p+1}]\right\}$$
$$=\sum_\alpha\mathrm{Tr}\left\{[\lambda_1\cdots\lambda_p-(-1)^p\lambda_p\cdots\lambda_1]\lambda_\alpha\right\}$$
$$\times\mathrm{Tr}\left\{\lambda_\alpha[\lambda_{p+1}\cdots\lambda_N-(-1)^{N-p}\lambda_N\cdots\lambda_{p+1}]\right\} \tag{8.1.9}$$

と書ける．

ここで最後の第 3 の条件を課そう．それは，括弧の中のラムダ行列の組み合わせ

$$\lambda=\lambda_1\cdots\lambda_p-(-1)^p\lambda_p\cdots\lambda_1 \tag{8.1.10}$$

が，群の代数の一部でなければならないことを示す．すなわち結論として Chan-Paton 因子は，質量 0 のベクトル粒子の随伴表現を保つためには，上の生成子の組み合わせが

再び代数の生成子になるゲージ群のものでなければならない．そのため必然的に，行列は Usp(N), SO(N), U(N) でなければならなくなる．（実は他の理由によって U(N) も排除される．$N=2$ 超重力は $N=1$ 物質多重項に結合できないので，U(N) をもつ開弦と閉弦を矛盾なく結合できないのである．）

残念ながら，この分析ではこれ以上の制限は出せないので，模型には予言能力はほとんどない．しかしアノーマリーの問題を考えれば，それによりゲージ群は SO(32) か $E_8 \otimes E_8$ のどちらかに決まる．ゲージ理論でクォークとレプトンの間のアノーマリーが消えることが模型作りで重要な役割りを果たしたように，アノーマリーが消えることが弦模型のゲージ群を決めるのに重要な役割りを果たすのである．

8.2 アノーマリーとファインマン図

アノーマリーは，大変深い起源をもっている [2–4]．それは場の量子論のもっとも深遠な力学に光をあてるのである．

簡単にいえば，古典的作用の対称性が量子レベルへそのまま移行しないときにはいつでも，アノーマリーが生ずる．古典的対称性が量子論を正則化する過程で生き残らないのである．大域的と局所的の 2 種類のアノーマリーがある．

ゲージ理論の大域的アノーマリーは，実は歓迎されるべきものである．たとえば，質量のないクォークのある QCD のスケール不変性の大域的アノーマリーは，クォークの質量を生成するかもしれない．つまり，アノーマリーによる大域的スケール不変性の破れがクォーク質量の起源かもしれないのである．別の大域的アノーマリーは，QCD のクォーク模型にある $\mathrm{U}(N)_R \otimes \mathrm{U}(N)_L$ 不変性を $\mathrm{SU}(N) \otimes \mathrm{SU}(N)$ に破り，これは現象論的に望ましい．しかし超弦模型にとっては，大域的アノーマリーは望ましくない．たとえば，大域的アノーマリーで多重ループ振幅のモジュラー不変性が破れれば[1]，これは理論の内的無矛盾性と有限性に，救いようのない結果をもたらす．幸いなことに弦理論では，モジュラー不変性にこのような大域的アノーマリーはないことが示せる [5]．

これに対し，ゲージ理論と超弦理論の局所的アノーマリーは是が非でも消さねばならない．そうしなければ，これらの理論は量子力学的に意味をなさない．たとえば，カイラルアノーマリーを消すことがクォークとレプトンの新しい模型を作る重要な方法の 1 つとなっている．標準模型ではクォークとレプトンは，ちょうどカイラルアノーマリーが打ち消すようなカイラリティーをもっているのである．超弦理論では共形不変性とカイラル対称性の局所的アノーマリーは，やはり除かなければならない．共形アノーマリーを除くことで，時空の次元と理論のフェルミオンの内容も決まる．一方，カイラルアノーマリーを除くことで理論のゲージ群が決まるのである．

まずもっとも簡単な局所的アノーマリー，カイラルアノーマリーを議論する．これ

[1] モジュラー不変性と前の大域的アノーマリーは，同じ大域的アノーマリーと呼ばれているが，区別するべきものである．前の大域的アノーマリーは変換のパラメーターが座標によらないものであるが，モジュラー不変性の方は依っており，恒等変換に連続的につながらないという意味で大域的である．

は，(パウリ-ビラーまたは次元正則化法などの)正則化の手続きがカイラル不変性を保たないために生じる．とくに，不変性

$$\psi \longrightarrow e^{i\gamma_5\varepsilon}\psi \tag{8.2.1}$$

をもつ理論があれば，(1.8.8)により古典的に保存するカイラルカレントがあると期待される：

$$\partial_\mu J^{\mu 5} = \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi) = 0. \tag{8.2.2}$$

ところが量子化による問題が存在する．たとえばパウリ-ビラーの方法は，仮想的な重い粒子を理論に入れてすべてのファインマン図を有限にする：

$$\frac{1}{p^2+m^2} \to \frac{1}{p^2+m^2} - \frac{1}{p^2+M^2} = \frac{M^2-m^2}{(p^2+m^2)(p^2+M^2)}. \tag{8.2.3}$$

ふつうは p^{-2} のように収束する伝播関数が p^{-4} のように収束し，ほとんどすべての発散するファインマン図が収束するようになる．有限な S 行列を得た後で，仮想的粒子の質量 M を無限大にする．ところが質量項は明白にカイラル不変性を破っている：

$$\delta(\bar{\psi}\psi) \neq 0. \tag{8.2.4}$$

したがって，パウリ-ビラー正則化法はこの対称性を保たず，軸性カレントが保存しないと期待される．**カレントの保存とファインマン振幅の正則化を，同時にみたせない**のである．しかし理論の正則化の方が重要であるから(そうでなければ理論が存在しない)，カレントの保存を犠牲にしなければならないことになる．

同様に次元正則化法も，カイラル不変性を保てない．次元正則化法は，

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^{3} p_\mu^2 &\to \sum_{A=0}^{D-1} p_A^2 \\ \int d^4p &\to \int d^Dp \end{aligned} \tag{8.2.5}$$

と置き換えることにより，ファインマン図を複素次元空間へ解析接続できると仮定している．ベクトル粒子の結合のディラック行列についてのトレースを拡張するのは容易であるが，複素空間に γ_5 の拡張がないので，軸性ベクトル結合に対してはこれは破綻する：

$$\gamma_5 \nrightarrow \Gamma_{D+1}. \tag{8.2.6}$$

γ_5 行列を複素次元に拡張できないので，次元正則化法はカイラルフェルミオンに対して破綻するのである．

したがって，軸性カレントの発散は 0 にならないと期待される．実際，ベクトル-ベクトル-軸性ベクトル(VVA)の図があって，軸性カレントの保存則が陽に破れてしまう．この三角形図は，正則化に問題をもっているからである．というのは，三角形図の中をまわる内線の各フェルミオンは p^{-1} のようにしか収束せず，収束性が不十分な図を与え，そのためにあいまいさが出てしまうのである．三角形図を注意深く正則化

することにより，

$$\partial_\mu J^{\mu 5} = \frac{-1}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho}) \tag{8.2.7}$$

を得る．これは位相的な項であり

$$-\frac{1}{4\pi^2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\mathrm{Tr}\left(A_\alpha\partial_\beta A_\gamma + \frac{2}{3}A_\alpha A_\beta A_\gamma\right) \tag{8.2.8}$$

の全微分になっている．

三角形図のこの結果は，4次元で出したものである．しかし，アノーマリーはD次元のカイラル理論にも一般化できる．その場合三角形図は，多角形図に置き換わる．まず，スピン$\frac{1}{2}$のフェルミオンと相互作用する外線のベクトルと軸性ベクトル粒子のファインマン規則を書こう．外線運動量k_i^μと偏極$\zeta_i^\mu(k)$およびアイソスピン添字a,b,cの$N-1$個のベクトル粒子と1つの軸性ベクトル粒子が内線の運動量p_i^μのフェルミオンと相互作用しているとする．ファインマン則は，

$$\begin{aligned} \text{伝播関数} &\to \frac{\Gamma\cdot p}{p^2}\delta_{ab} \\ \text{頂点 (ベクトル)} &\to \Gamma\cdot\zeta\lambda_a \\ \text{頂点 (軸性)} &\to \Gamma_{D+1}\Gamma\cdot\zeta\lambda_a \end{aligned} \tag{8.2.9}$$

である．外線の粒子は質量殻条件をみたし，偏極ベクトルは外線運動量と縮約すると0となり，外線運動量の和は0と仮定する．つまり，

$$k_{i,\mu}^2 = 0; \quad k_i\cdot\zeta_i(k_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{N} k_{i,\mu} = 0 \tag{8.2.10}$$

である．するとファインマン則により多角形図に対し，

$$G \sim \int d^D p\,\mathrm{Tr}(\lambda_{a_1}\cdots\lambda_{a_N})\mathrm{Tr}\left\{\prod_{i=1}^{N}\frac{\Gamma\cdot p_i\Gamma\cdot\zeta_i}{p_i^2}\frac{1}{2}[1+\Gamma_{D+1}]\right\} \tag{8.2.11}$$

を得る．この図のもっとも発散する部分を引き出そう．まずΓ_{D+1}を含む項についてのトレースは実際にとれて，

$$\mathrm{Tr}(\Gamma_{\mu_1}\Gamma_{\mu_2}\cdots\Gamma_{\mu_D}\Gamma_{D+1}) \sim \varepsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_D} \tag{8.2.12}$$

となることがわかる．D個のΓ行列にΓ_{D+1}をかけたもののトレースをとったときだけ残り，反対称テンソルが出ることに注意せよ．運動量のいろいろな因子を組み合わせて，反対称テンソルと縮約することになる．運動量の保存のために，独立運動量の因子の数は1つ少なくなることに注意する．一般に，残り得る項は，

$$G \sim \int d^D p\,\mathrm{Tr}(\lambda_{a_1}\cdots\lambda_{a_N})\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i^2}\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_D}\zeta^{\mu_1}\zeta^{\mu_2}\cdots k^{\mu_D} \tag{8.2.13}$$

という形だけになる．反対称テンソルのランクはDなので，外線の数と時空の次元の数の間に直接の相関があることに注意する．つまり，もっとも発散する部分は，

$$D = 2N-2 \tag{8.2.14}$$

の関係をみたすはずである．4 次元では，これは三角形図が発散することを意味している．10 次元では，**6 角形図**が発散することになる．これはまた，アノーマリー項の具体的表式を与えることにも注意せよ．外線運動量 $k_{i,\mu}$ は微分 ∂_μ で置き換わり，偏極テンソル ζ^{μ_i} は場 A^μ で置き換わるので，$k_{[\mu}\zeta_{\nu]}$ についての縮約を Yang-Mills テンソル $F_{\mu\nu}$ についての縮約で置き換えてよい．したがってフーリエ変換の後で，

$$\begin{aligned} k_\mu &\to \partial_\mu \\ \zeta_\mu &\to A_\mu \\ k_{[\mu}\zeta_{\nu]} &\to F_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{8.2.15}$$

の対応があることがわかる．すべての要素を組み合わせれば，

$$\partial_\mu J^{\mu 5} = \frac{i^{D/2}}{2^{D-1}\pi^{D/2}\left(\frac{1}{2}D\right)!}\mathrm{Tr}\,\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_D}F^{\mu_1\mu_2}\cdots F^{\mu_{D-1}\mu_D} \tag{8.2.16}$$

を得る [6–8]．

同様に，カイラルフェルミオンに結合した重力理論にもアノーマリーがある．それはやはり全微分，すなわち位相的な項に比例している．外線のグラビトンの足を 1 ループ図の内部をまわるカイラルフェルミオンに結合させれば，前のファインマン図の分析と同じことができる．主な違いは次の 3 つの点である．

1. フェルミオンをカイラルカレントではなく，エネルギー運動量テンソルに結合させねばならない．グラビトンのフェルミオンへの結合は，フィアーバインによって起こる(なぜなら，GL(N) は有限次元のスピノール表現をもたないからである．付録を見よ)．

2. 外線の偏極ベクトル ζ_μ が外線偏極テンソル $\zeta_{\mu\nu}$ となる．

3. 頂点関数は高次テンソル成分を含む．

しかし，図のもっとも発散する部分はやはり $\varepsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_D}$ を含んでおり，それが外線運動量 k_i と外線偏極テンソル $\zeta_{\mu\nu}$ と縮約されている．再びすべての因子を組み合わせれば，もっとも高い発散の項が曲率テンソルにより x 空間で書けることが容易に示せる．たとえば，1 つの軸性ベクトルと 2 つのエネルギー運動量テンソルを結合させると，

$$D_\mu J^{\mu 5} = -\frac{1}{768\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\sigma\tau}R_{\alpha\beta}{}^{\sigma\tau} \tag{8.2.17}$$

が出る．

重力の理論では，2 次元と 4 次元に 2 つの全微分項があることが，よく知られている．まず有名なガウス-ボネ恒等式

$$\chi(M) = \frac{1}{4\pi}\int d^2x\sqrt{g}\,R = 2-2g \tag{8.2.18}$$

がある．これは後で証明するが，ここで $\chi(M)$ は 2 次元多様体 M のオイラー数，R は縮約した曲率テンソル，g は閉じた多様体の種数(すなわち，穴またはハンドルの数)で

ある．2次元のスカラー曲率が全微分であるために，この恒等式は可能になっている．

4次元では，ある数 a, b, c に対し，恒等式

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}(R_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}) &= a\sqrt{g}\,R^2_{\mu\nu\sigma\rho} + b\sqrt{g}\,R^2_{\mu\nu} + c\sqrt{g}\,R^2 \\ &= \text{全微分}\end{aligned} \tag{8.2.19}$$

が成り立つ．

ふつうは全微分の積分は0である．しかし，多様体が境界をもっていたり，その位相が自明なものでなければこれは成り立たない．今の場合は，全微分の積分は境界と位相からの項をもってしまうのである．このように縮約した曲率テンソルの閉じた多様体についての積分は，種数すなわち面の穴の数の1次関数に関係しており位相的な数である．これがアノーマリー，全微分および位相的数の間の関係の起源である．

このように，ゲージアノーマリーと重力アノーマリーは両方ともファインマン図から導ける．しかし高次元では，これはとても難しくなる．高次元では添字が非常に急速に増えるからである．そこでここではこれらの結果を高次元に拡張するために，ファインマン図ではなく汎関数形式によってこれらの表式を導くことにする．

8.3 汎関数形式におけるアノーマリー

今まではアノーマリーを断片的に考えてきた．われわれの欲しいものは，任意のゲージ群と任意の次元に対して，このような全微分の項をすべて計算できるような系統的方法である．

まず，外線のベクトルまたは重力粒子と相互作用しているフェルミオンの汎関数の表式

$$\int D\psi\, D\bar{\psi}\, e^{-S} = \int D\psi\, D\bar{\psi} \exp\left\{-\int d^D\, \bar{\psi}\frac{1}{2}(1+\Gamma_{D+1})\not{D}\psi\right\} \tag{8.3.1}$$

を考えよう．ここで共変微分は，外線の Yang-Mills と重力場とのフェルミオンの結合を表している：

$$\not{D} = \Gamma^\mu(\partial_\mu + i\lambda^a A^a_\mu + \omega^{ab}_\mu M^{ab}). \tag{8.3.2}$$

ここで，Γ^μ は D 次元のガンマ行列にフィアーバイン場をかけたもの，M^{ab} はローレンツ群 O $(D-1, 1)$ の生成子である．

汎関数積分は，フェルミオン場につき2次であることに注意せよ．したがって積分はガウス型である．付録のグラスマン変数についての積分の結果を用いれば，積分が実行でき行列式を得る．そして，その行列式を再び指数化して，ゲージ場に陽によった項 $\Gamma(A, g)$ が得られる．(8.3.1)のガウス積分を具体的に実行することにより，次の行列式が得られる：

$$e^{i\Gamma(A,g)} = \det\left\{\frac{1}{2}(1+\Gamma_{D+1})\not{D}\right\}. \tag{8.3.3}$$

ここで，A と g は Yang-Mills とグラビトンの場である．次に，関係式

$$\det M = e^{\mathrm{Tr}\ln M} \tag{8.3.4}$$

を用いる．(これをもっとも容易に証明するには，行列 M を対角化する同値変換を行えばよい．そうすると，M は対角線上に固有値の並んだ対角行列になる．この形では恒等式が正しいことは自明である．最後に，逆の同値変換をして M 行列を復活すればよい.)　こうして，(8.3.3) の対数をとることができる：

$$\begin{aligned} i\Gamma(A,g) &= \ln\left\{\det\left[\frac{1}{2}(1+\Gamma_{D+1})\not{D}\right]\right\} \\ &= \mathrm{Tr}\ln\left\{\frac{1}{2}(1+\Gamma_{D+1})\not{D}\right\}. \end{aligned} \tag{8.3.5}$$

そこで，この場の汎関数のゲージ変換を計算しよう．ゲージ変換

$$A_\mu \to A_\mu - D_\mu \varepsilon \tag{8.3.6}$$

の下で，ε で Taylor 展開した後で，場の汎関数が

$$\begin{aligned} \Gamma(A'_\mu) &= \Gamma(A_\mu - D_\mu\varepsilon) \\ &= \Gamma(A_\mu) - \int d^Dx \mathrm{Tr} D_\mu \varepsilon \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu} + \cdots \\ &= \Gamma(A_\mu) + \int d^Dx \mathrm{Tr}\, \varepsilon D_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu} + \cdots \\ &= \Gamma(A_\mu) + \int d^Dx \mathrm{Tr}\, \varepsilon D_\mu J^{\mu 5} + \cdots \end{aligned} \tag{8.3.7}$$

と変換することがわかる．

$\Gamma(A'_\mu)$ の最後の表式では，ゲージ変換により生成されるカレントが

$$J^{\mu 5} = \frac{\delta\Gamma(A)}{\delta A_\mu} \tag{8.3.8}$$

で与えられることを用いた．(8.2.13) に現れている G を，汎関数の言葉で書き直すと，

$$G = D_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu}\Gamma(A_\mu) \tag{8.3.9}$$

となる．すると，

$$D_\mu J^{\mu 5} = G \tag{8.3.10}$$

つまり**軸性カレントが保存しないことは，G が 0 でないことを意味している．**

アノーマリーは，自己無矛盾性の条件，すなわち Wess-Zumino 条件 [9] をみたさなければならない．ゲージ変換の生成子は，

$$\delta_\Lambda = \frac{\delta}{\delta\Gamma} = D_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} \tag{8.3.11}$$

に等しい．したがって，G は

$$G(\Lambda) = \delta_\Lambda \Gamma(A_\mu) \tag{8.3.12}$$

とも書ける．一方で，局所的ゲージ生成子の代数は閉じるはずである．つまり，

$$[\delta_{\Lambda_1}, \delta_{\Lambda_2}] = \delta_{\Lambda_3} \tag{8.3.13}$$

するとこれから G が制限

$$\delta_{\Lambda_1} G(\Lambda_2) - (1 \leftrightarrow 2) = G(\Lambda_3) \tag{8.3.14}$$

をみたさねばならないことになる．G を $\Gamma(A_\mu)$ の変分として書けば，Wess-Zumino 無矛盾性条件がみたされることは明らかである．しかし，アノーマリーを曲率テンソルによって書くと，この条件がみたされることはまったく自明でなくなる．それでこれがわれわれの計算の強力なチェックとなるのである．

これでアノーマリーを議論するための汎関数形式が得られたので，アノーマリーの背後の数学の議論を始めよう．とくにアノーマリーが，数学者の研究している一般化された**特性類**(characteristic class)によって書けることを示す．その次に理論のもっとも美しい部分，すなわちこれらの特性類の積分がいろいろな指数定理を与えることを示すことにする．つまり，われわれの戦術は，

$$\text{アノーマリー} \longrightarrow \text{特性類} \rightarrow \text{指数定理}$$

を示すことである．

8.4 アノーマリーと特性類

特性類 [10, 11] は，可能な位相的項をすべて系統的に分析する手段を与えてくれるが，それを調べるために微分形式(form)の言葉を用いる(付録を見よ)．微分形式の理論は，ある意味でふつうの解析学の解析的方法を用いて導ける結果を出すだけにすぎない．しかし高次元では，指数の数が手に負えないほど急速に増える．それで，どんな次元の任意のランクのテンソルでも微分形式の理論の強力な記法によれば扱うことができるのに対し，標準的テンソル解析ではとても無理である．第 10 章では，微分形式の言葉がコホモロジーとホモロジーの理論に，もっとも便利な言葉であることを見ることにする．

微分形式の理論を用いて，これから一連の**特性類**を構成する．これにより実際上どの次元とどの群に対しても，視察によってすべての位相的項の集合を書き下すことができるのである．

さて，

$$P(\alpha) = P(g^{-1}\alpha g) \tag{8.4.1}$$

の性質をもつ**不変多項式**(invariant polynomial)を定義しよう．ここで，α と g は群の行列である．不変多項式の例は，

$$\mathrm{Det}(1+\alpha); \quad \mathrm{Tr}\, e^{\alpha} \tag{8.4.2}$$

である．ここで，Ω を曲率 2 形式

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega \tag{8.4.3}$$

とする．これは，ビアンキ恒等式

$$d\Omega + \omega \wedge \Omega - (-1)^{c_\Omega} \Omega \wedge \omega = 0 \tag{8.4.4}$$

をみたしている．

付録で，不変多項式に対し2つの重要な性質

$$(1)\quad dP(\Omega)=0 \qquad (2)\quad P(\Omega)=dQ\ (\text{ある}\ Q\ \text{に対し}) \tag{8.4.5}$$

を証明した．すなわち，曲率形式を用いた不変多項式は，閉じて(closed)いてかつ完全(exact)である．微分形式の理論によれば，Q を具体的に構成することができる．たとえば付録で

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,\Omega^n &= nd\int_0^1 dt\,t^{n-1}\mathrm{Tr}\left\{A(dA+tA^2)^{n-1}\right\}\\ &= d\omega_{2n-1}\end{aligned} \tag{8.4.6}$$

を示した．このように，曲率2形式の積のトレースは完全で閉じている．これは，前に証明した恒等式の微分形式の言葉による一般化になっている．たとえば4次元では，(8.2.7)と(8.2.17)を得る．任意の次元では(8.2.16)を得る．この新しい形式 ω_{2n-1} は Chern-Simons 形式と呼ばれ，(8.2.8)に与えたものである．

このことは重要である．というのは，前に2次元と4次元では全微分になる曲率テンソルの多項式があることを示したが，これらの高次の位相的項を構成することはできなかったからである．(8.4.6)はこの問題の答を要約したものになっている．

微分形式の言葉を用いれば，Wess-Zumino 無矛盾性の条件の便利な表式も得られる．D 次元空間で曲率形式の積を形式的に定義し，I_{D+2} と呼ぼう．(もちろんこれは $D+2$ 次元では0であるが，この点はちょっとおいておく.)　構成から，この形式は完全である：

$$I_{D+2}=d\omega_{D+1}. \tag{8.4.7}$$

ここで，ω_{D+1} は Chern-Simons 形式である．I_{D+2} は完全に曲率形式だけからなるので，ゲージ不変である．それがゲージ不変で，かつ完全であることから，

$$\begin{aligned}\delta_\Lambda I_{D+2} &= \delta_\Lambda d\omega_{D+1}\\ &= d\delta_\Lambda\omega_{D+1}\\ &= 0\end{aligned}$$

と書ける．したがって，Chern-Simons 形式のゲージ変換が閉じていることがわかる．そこで局所的には，

$$\delta_\Lambda\omega_{D+1}=d\omega_D \tag{8.4.8}$$

と書けることがわかる．この構成の目的は，何か他の形式のゲージ変換になっているようなアノーマリー G を見つけることである．今，

$$G=\int_M\omega_D \tag{8.4.9}$$

と書く．ストークスの定理を用いれば，

$$G = \int_M \omega_D = \int_\Sigma d\omega_D = \delta_\Lambda \int_\Sigma \omega_{D+1} \tag{8.4.10}$$

が示せる．ここで，面 M と Σ は $M = \partial\Sigma$ により関係している．

これが求める結果である．これで定義したアノーマリー項 G は，別の形式のゲージ変換となることが示せた．このとき(8.3.13)によって，

$$\delta_{\Lambda_1} G(\Lambda_2) = \delta_{\Lambda_1}\delta_{\Lambda_2} \int \omega_{D+1} \tag{8.4.11}$$

だから G は自動的に Wess-Zumino 無矛盾性条件をみたすことがわかる．この構成は，超弦でアノーマリーを打ち消すときに用いることになる．

微分形式の理論が得られたので，今や特性多項式を自由に構成することができる．

以下では 4 つの主な特性類があることを見る．

1. Chern 類

2. Pontrjagin 類

3. Euler 類

4. Stiefel-Whitney 類

さて，曲率形式 Ω が $GL(k, \mathbb{C})$ の要素，すなわち複素成分の任意の $k \times k$ 行列であるとしよう．そしてこの群の**全 Chern 形式**(total Chern form)を

$$c(\Omega) = \det\left(1 + \frac{i}{2\pi}\Omega\right) = 1 + c_1(\Omega) + c_2(\Omega_2) + \cdots \tag{8.4.12}$$

と定義しよう．この Ω でべき展開した項はどこかで止まる：

$$\begin{aligned}
c_0 &= 1 \\
c_1 &= \frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}\,\Omega \\
c_2 &= \frac{1}{8\pi^2}[\mathrm{Tr}(\Omega\wedge\Omega) - \mathrm{Tr}\,\Omega\wedge\mathrm{Tr}\,\Omega] \\
c_3 &= \frac{i}{48\pi^2}[-2\mathrm{Tr}(\Omega\wedge\Omega\wedge\Omega) + 3\mathrm{Tr}(\Omega\wedge\Omega)\wedge\mathrm{Tr}\,\Omega - \mathrm{Tr}\,\Omega\wedge\mathrm{Tr}\,\Omega\wedge\mathrm{Tr}\,\Omega] \\
&\cdots\cdots \\
c_n &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \det\Omega.
\end{aligned} \tag{8.4.13}$$

ここで，

$$dc_j(\Omega) = 0 \tag{8.4.14}$$

である．この級数はどこかで終わることに注意せよ．なぜなら，dx^μ がグラスマン値なので，Ω の十分高いべきは 0 になるからである．Chern 類 c_i に加えて，**Chern 指標**(Chern character)

$$\mathrm{Tr}\, e^{\Omega} \tag{8.4.15}$$

も導入できる．

行列 Ω を対角化して，それが対角に固有値 x_i だけをもつようにできる．つまり，いつでもある行列 S を見つけて，

$$S\Omega S^{-1} = (-2\pi i)\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \tag{8.4.16}$$

とすることができる．対角化の後では，トレースと行列式は自明になる：

$$c(\Omega) = \prod_{j=1}^{n}(1 + x_j). \tag{8.4.17}$$

4 次元の SU(2) の位相的不変量は，単に

$$c(M) = \det\left(1 + \frac{1}{4\pi}\lambda_a F^a\right) = 1 + \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}(F \wedge F) \tag{8.4.18}$$

となることに注意せよ．

Chern 類の他に，それと密接な関係のある **Pontrjagin 類**がある．Ω を $\mathrm{O}(k)$ の要素として，

$$p(\Omega) = \det\left(1 - \frac{1}{2\pi}\Omega\right) = 1 + p_1 + p_2 + \cdots \tag{8.4.19}$$

を定義しよう．

これに対し **Euler 類**は少々違うように定義する．Chern 類と Pontrjagin 類のように行列式ではなく，Pfaffian によって定義するのである．α を 2 形式とする：

$$\alpha = \frac{1}{2}\alpha_{ij}dx^i \wedge dx^j.$$

そしてこれを r 乗する：

$$\alpha^r = r!(2\pi)^r\, e(\alpha)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^{2r}. \tag{8.4.20}$$

これは反対称行列であることに注意せよ．この行列は，

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & 0 & \cdots \\ -x_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & \cdots \\ 0 & 0 & -x_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{8.4.21}$$

という形に書くことができる．不変量 $e(\alpha)$ は反対称行列 α により作られ，Pfaffian と呼ばれる．Pfaffian とはこれらの x により，

$$e(M) = x_1 x_2 \cdots x_r \tag{8.4.22}$$

で定義される．また Pfaffian $e(M)$ は，最高 Pontrjagin 類の平方根でもある：

$$p(M) = x_1^2 x_2^2 \cdots x_r^2 = e^2(M). \tag{8.4.23}$$

Euler 類の例のいくつかは,

$$\begin{aligned} D=2: \qquad & e(M) = \frac{1}{2\pi} R_{12} \\ D=4: \qquad & e(M) = \frac{1}{32\pi^2} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd} \end{aligned} \tag{8.4.24}$$

である．ここで,

$$\chi(M) = \int_M e(M) \tag{8.4.25}$$

はまさに，前に(8.2.18)と(8.2.19)で触れた恒等式である．

最後に，面白い他の特性多項式をいくつか挙げておこう．x_i が曲率形式 Ω の固有値とすれば,

$$\begin{aligned} \text{Todd 類} = \mathrm{td}(M) &= \prod_i \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}} \\ \text{Hirzebruch 類} = L(M) &= \prod_i \frac{x_i}{\tanh x_i} \\ \hat{A}\text{多項式} = \hat{A}(M) &= \prod_i \frac{\frac{1}{2} x_i}{\sinh \frac{1}{2} x_i} \end{aligned} \tag{8.4.26}$$

$\hat{A}$ 不変多項式は，重力に結合したスピン $\frac{1}{2}$ 粒子のアノーマリーを計算するのに重要な役割りを果たすことを見るであろう．

最後に **Stiefel-Whitney** 類があるが，残念ながらこれは曲率形式には関係していない．そのかわりに，Stiefel-Whitney 類はどの多様体がスピン多様体か，すなわちどれがスピノールをもてるかを決めるのに重要である．一見スピノールを許すように見える多くの多様体が，実は問題をもっている．ここでは単に，Stiefel-Whitney 類指数の重要な特徴だけを引用する．第 1 Stiefel-Whitney 類指数が 0 であることは，多様体が向きづけ可能であることを意味している：

$$\omega_1 = 0 \leftrightarrow M \text{ が向きづけ可能.} \tag{8.4.27}$$

もっとも重要なのは，その第 2 Stiefel-Whitney 類指数が 0 ならば，M がスピノールを許すことである：

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \rightarrow M \text{ はスピン多様体.} \tag{8.4.28}$$

8.5 ディラック指数

以上で特性類の重要な性質をいくつか与えたので，特性類の積分が美しい指数定理を出すことを示そう．もっとも重要なものの 1 つは，スピン多様体に定義されるディラック指数である．実はディラック指数により，他の不変量を表すことができる．N 次元空間のスピン多様体があれば，この空間でディラック方程式を定義することができる：

$$\Gamma^A D_A \psi = \not{D}\psi = 0. \tag{8.5.1}$$

ここで Γ^A はディラック行列(にフィアーバインをかけたもの)である．そこで(8.3.2)で与えられる演算子 $\not{D}$ とその固有値を調べよう：

$$i\not{D}\psi_n = \lambda_n \psi_n. \tag{8.5.2}$$

演算子 $\not{D}$ の核とはこの演算子で消滅される解，すなわちゼロ固有値の解のことである．

偶数次元空間では，スピノール空間は演算子 Γ_{D+1} の固有値により実は半分にわかれる：

$$\Gamma_{D+1}\psi_\pm = \pm\psi_\pm. \tag{8.5.3}$$

これらの解を正と負のカイラリティー解と呼ぶ．一般に0でない固有値に対しては，カイラリティーは常に対になっている．質量項のあるディラック方程式にカイラル射影をすれば $i\not{D}\psi_\pm = m\psi_\mp$ となって質量項は正と負のカイラリティーを混ぜるので，質量のあるフェルミオンは2つのワイルフェルミオンにわけられないからである．ワイルフェルミオンは，常に質量をもたないのである．ところが0の固有値の場合は，カイラリティーは対になる必要はない．ゼロ固有値のフェルミオンに対しては，正と負のカイラル状態の数が等しくなくてもよいのである．

そこで $n_\pm$ を，ゼロ固有値の正(負)カイラリティーの独立な解の数と定義しよう．またディラック演算子の**指数**(index)を，正と負のカイラリティーをもつ独立なゼロモードの数の間の差と定義しよう：

$$\mathrm{Index}(\not{D}) = n_+ - n_-. \tag{8.5.4}$$

重要なことは，この数が位相的数であることである．すなわちこれは，多様体の連続的変形のうちで，その全体の位相を変えないものの下で不変である．ディラック指数が位相的不変量であるのは，多様体の変形の際ゼロ固有値とゼロでない固有値のフェルミオンの間の遷移が起こっても，**ゼロでない固有値のフェルミオンは対でしかゼロ固有値の状態から出たり入ったりできない**ためである．これは質量を得るためには，カイラル状態は相棒を見つけねばならないからである．このように，指数に起こる変化は対でしか起こらず，各対は指数にゼロの寄与しかしない．したがって，指数は位相的不変量である(図8.2を見よ)．たとえばゼロ固有値状態に入っていく N 対のフェルミオンがあれば，

$$\delta\,\mathrm{Index}(\not{D}) = \delta n_+ - \delta n_- = N - N = 0 \tag{8.5.5}$$

となる．

この指数を表す方法はいくつかある．演算子の核(kernel)は，それが消滅する状態の集合と定義されているので，

$$\mathrm{Index}(\not{D}) = \dim\ker(\not{D}_+) - \dim\ker(\not{D}_-) \tag{8.5.6}$$

とも書ける．ここで，ディラック演算子を正と負のカイラリティーにわけておいた．

指数公式の別の書き方は

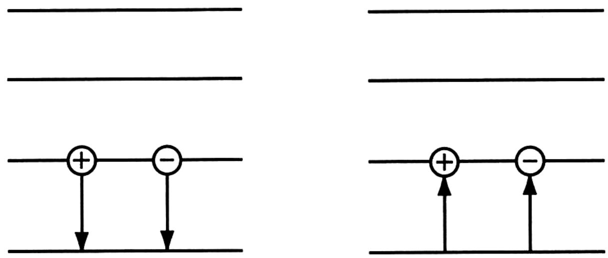


図 8.2：基底状態への対の放出と吸収．フェルミオンは反対のカイラリティーの対でしか，基底状態に入ったり出たりできない．それで，真空にある正と負のカイラル状態の間の差はいつでも同じになる．この定数がディラック指数と呼ばれる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Index}(\not{D}) &= \sum_n \langle n|\Gamma_{D+1}|n\rangle \\
&= \mathrm{Tr}(\Gamma_{D+1}) \\
&= \sum_+ 1 - \sum_- 1 \\
&= n_+ - n_-
\end{aligned} \tag{8.5.7}
$$

である．各正カイラル状態は和に $+1$ を与え，各負カイラル状態は -1 を与えるので，和がディラック指数になることに注意せよ．

上の公式は非常に美しいが，注意深く正則化しておかねばならない．指数を不注意に定義すると，意味のない結果になることに注意せよ：

$$
\sum n_+ - \sum n_- = \infty - \infty. \tag{8.5.8}
$$

打ち消しがレベルごとに起こるので，すべての正レベルについてまず和をとって，それからすべての負レベルの和を引くのは正しくない．すべての正または負レベルの和は，それ自身では無限大だからである．差だけが有限で，うまく定義されているのである．

指数を取り扱う正しい方法は，すべての正と負のレベルの和をあるパラメーターの関数として別々に定義してくれるような因子を入れることである．（各々の和は発散している.） 正則化したディラック指数の簡単な形は，

$$
\mathrm{Index}(\not{D}) = \mathrm{Tr}(\Gamma_{D+1} e^{-\beta D^2}) \tag{8.5.9}
$$

である．ここで β は任意の正の数で，D^2 はディラック演算子の 2 乗である．トレースをとっているので，ディラック演算子の 2 乗を対角化してもよく，トレースを D^2 の固有値 λ_i により書き換えることができる：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Index}(\not{D}) &= \sum_i \mathrm{sign}(i) e^{-\beta\lambda_i} \\
\mathrm{sign}(i) &= \pm.
\end{aligned} \tag{8.5.10}
$$

ゼロでない固有値の場合は正と負のカイラル解が同数あるので，異なる $\mathrm{sign}(i)$ で寄与

し和にきかない．ところがゼロ固有値 $n_{i\pm}$ は，正と負のカイラル状態が同数とは限らないので，再び

$$\begin{aligned}\mathrm{Index}(\not{D}) &= \sum \mathrm{sign}(i) e^{-\beta\lambda_i} \\ &= \sum_{\lambda_i=0} [n_{i+} + (-n_{i-})] + \sum_{\lambda_i\neq 0} [e^{-\beta\lambda_i} - e^{-\beta\lambda_i}] \\ &= n_+ - n_-\end{aligned} \tag{8.5.11}$$

を得る．

まとめると，フェルミオンはカイラルの対でのみゼロ固有値に入ったり出たりできる．それで正と負のカイラリティーの数の差は，ゼロでない固有値のフェルミオンが存在することでは変化しない(それはいつも対で起こるので指数への寄与がゼロだからである)．つまり，ゼロでない固有値のフェルミオン状態は指数にまったく影響しない．

これは単なる学問的な問題ではない．なぜなら，それは直接アノーマリーの項に関係しているからである．たとえば，カイラルカレントは

$$J_\mu^{5a} = \bar{\psi}\lambda^a\gamma_5\gamma_\mu\psi \tag{8.5.12}$$

と書けることがわかっている．単純には，運動方程式を使えばこれは保存される．その共変的発散は(アイソスピンの添字を省略して)

$$\begin{aligned}D_\mu J^{\mu 5} &= \partial_\mu J^{\mu 5} + [A_\mu, J^{\mu 5}] \\ &= \bar{\psi}\gamma_5\not{D}\psi - (\not{D}\bar{\psi})\gamma_5\psi\end{aligned} \tag{8.5.13}$$

に等しい．ふつうは $\not{D}\psi = 0$ なので，これはちょうど 0 になる．ところが今は，真空期待値の寄与を入れねばならないことに注意しなければならない．これは一般に 0 ではないのである．そこで，

$$\begin{aligned}S_F(x,y) &= \langle 0|\bar{\psi}(x)\psi(y)|0\rangle \\ \not{D}S_F(x,y) &= \delta(x,y)\end{aligned} \tag{8.5.14}$$

を定義し，カレントの発散の真空期待値をとってみよう．そうすると，

$$\begin{aligned}D_\mu J^{\mu 5} &= 2\mathrm{Tr}(\gamma_5\not{D}S_F(x,y))_{x=y} \\ &= 2\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5\delta(x,x)\right\}\end{aligned} \tag{8.5.15}$$

を得る．この最後の式は $\delta(x,x)$ を含んでおり，積分を正則化しなければ意味がない．これはすでに三角形図が発散しており，慎重な正則化が必要であることを見たので当然期待されることである．

正則化の1つの標準的方法は，熱核(heat kernel)の方法と呼ばれるもので，上の式に収束因子を入れる：

$$D_\mu J^{\mu 5} = \lim_{\tau\to 0} 2\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5 \varepsilon^{-\tau D^2}\delta(x,y)\right\}_{x=y}. \tag{8.5.16}$$

トレースはスピノールについてとり，式を正則化して(正の τ に対し)有限になるよう

にしてある.

ところが，カレントの発散のこのアノーマリー項は，まさにディラック指数であることに注意せよ．こうして，**ディラック指数と軸性カレントの間に直接関係がつけられる**のである.

このトレースを任意のスピン多様体に対して求めると，(8.4.19)と(8.4.26)を用いて，

$$\begin{aligned}\mathrm{Index}(\not{D}) &= \int_M \hat{A}(M)\\ &= 1 - \frac{1}{24}p_1 + \frac{1}{5760}(7p_1^2 - 4p_2) + \cdots\end{aligned}$$

が得られる．ここで時空の次元は 4 の倍数とした．4 次元では,

$$D = 4: \quad \mathrm{Index}(\not{D}) = -\frac{1}{24}p_1 = \frac{1}{48\cdot(2\pi)^2}\int \mathrm{Tr}(R\wedge R) \tag{8.5.17}$$

を得る．背景計量の中の Yang-Mills 場と相互作用しているフェルミオンの場合は，指数は 2 つの因子，重力場に由来する $\hat{A}$ と，ゲージ場に由来する項の積の積分が指数となる：

$$\mathrm{Index}(\not{D}) = \int_M \hat{A}(M)\mathrm{ch}(V). \tag{8.5.18}$$

この公式は，単に 4 の倍数次元だけでなく，偶数次元なら存在することに注意せよ．$D = 2$ に対しては,

$$\mathrm{Index}(\not{D}) = \int_M c_1(V) = \frac{i}{2\pi}\int \mathrm{Tr}F \tag{8.5.19}$$

を得る．$D = 4$ に対し,

$$\mathrm{Index}(\not{D}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F\wedge F) + \frac{\dim V}{48}\mathrm{Tr}\,(R\wedge R)\right] \tag{8.5.20}$$

を得る．ここで dim V はゲージ群の表現の次元である．興味のある 6 次元では,

$$\mathrm{Index}(\not{D}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\left[-\frac{i}{6}\mathrm{Tr}\,(F\wedge F\wedge F) + \frac{i}{48}\mathrm{Tr}F\wedge\mathrm{Tr}(R\wedge R)\right] \tag{8.5.21}$$

となる.

一般に Atiyah-Singer の定理は，2 つの曲率形式(1 つは重力部分ともう 1 つはゲージ部分)の積の積分として書ける．完全のために，4 つの古典的複体(complex)と，それから出るいろいろな指数定理を挙げておこう：

複体	指数	指数定理
de Rahm	Gauss-Bonnet	指数 $(d+\delta) = \chi(M) = \int e(M)$
Signature	Hirzebruch	$\tau(M) = \int L(M)\wedge\tilde{\mathrm{ch}}(V)$
Dolbeaut	Riemann-Roch	指数 $(\bar{\partial}) = \int \mathrm{td}(M)\wedge\mathrm{ch}(V)$
Spin	$\hat{A}$ genus	指数 $(\not{D}) = \int \hat{A}(M)\mathrm{ch}(V)$

(8.5.22)

ここで，e は Euler の標数，td は Todd の標数，$\tilde{\mathrm{ch}}$ は Chern の標数で，曲率形式の値を 2 倍にしてある．ch はふつうの Chern の標数 e^{Ω},$\bar{\partial}$ は 2 次元面を記述するのに複

素座標 $z, \bar{z}$ を使うとき，∂_z の複素共役である．(複素多様体は，第 10 章で詳しく議論する.)

8.6 重力およびゲージのアノーマリー

特性類の方法を用いて不変多項式を構成する強力な手段が得られたので，スピノールがゲージと重力場に結合している理論でアノーマリーを調べよう．これは Alvarez-Gaumé と Witten が計算したものである [12]．スピノールの基本的特徴を復習することから始めよう．

任意の偶数次元 $D = 2k$ で，ディラック行列は複素 2^k 次元行列である．一般に，これらのディラック行列は正と負のカイラル表現に分離する．奇数次元 $D = 2k + 1$ では，ディラック行列はやはり 2^k 次元であり 1 つの表現しかない．奇数次元では，正と負のカイラリティーは(したがってアノーマリーも)ないのである．したがって，偶数次元だけを考えることにする．

行列

$$\Gamma_{D+1} = \Gamma_0 \Gamma_1 \cdots \Gamma_{D-1} \tag{8.6.1}$$

を定義しよう．そうすると，

$$\begin{aligned} D = 4k + 2 \quad &\text{ならば} \quad \Gamma_{D+1}^2 = +1 \\ D = 4k \quad &\text{ならば} \quad \Gamma_{D+1}^2 = -1 \end{aligned} \tag{8.6.2}$$

つまり，$D = 4k + 2$ ならば，Γ_{D+1} は固有値 ± 1 をもつ．したがって CPT 反転の下で，特定の状態のカイラリティーは変わらない．正のカイラル状態は正のものへ写像され，負の状態も同じである．こうして，

$$CPT(D = 4k + 2) : \begin{cases} \psi_+ \leftrightarrow \psi_+ \\ \psi_- \leftrightarrow \psi_- \end{cases} \tag{8.6.3}$$

を得る．つまり，正と負のカイラル状態の数が同じでなくてもよく，したがってアノーマリーがあり得るのである．

ところが $D = 4k$ ならば，Γ_{D+1} は固有値 $\pm i$ をもつ．したがって CPT 反転の下で，$\Gamma_{D+1} = i$ の状態は $\Gamma_{D+1} = -i$ の状態へ変換される．正のカイラル状態は負のものへ変わり，逆も起こる．こうして，

$$CPT(D = 4k) : \begin{cases} \psi_+ \leftrightarrow \psi_- \\ \psi_- \leftrightarrow \psi_+ \end{cases} \tag{8.6.4}$$

となる．$D = 4k$ ならば正と負のカイラリティーは対になっており，重力相互作用はアノーマリーをもたないのである．

まとめると，**重力アノーマリーは $D = 4k + 2$ に限り生じ得る．**

さて，ディラック，ワイル，マヨラナスピノールを分析しよう．ワイルフェルミオンはどの偶数次元でも定義できる．これは，演算子 $\frac{1}{2}(1 + \Gamma_{D+1})$ がどの偶数次元でも

定義できるからである．ところがマヨラナスピノールは，2, 3, 4 (mod 8) の次元にのみ存在することがわかる．さらに，同時にマヨラナでワイルの状態は 2 (mod 8) の次元のみで定義できる．これをまとめると，

スピノール	次元
ディラック	任意の D
ワイル	$D=$ 偶数
マヨラナ	$D = 2, 3, 4 \pmod 8$
マヨラナ-ワイル	$D = 2 \pmod 8$

(8.6.5)

となる．

われわれのとくに興味のある場合は，10 次元のマヨラナ-ワイルフェルミオンである．10 次元では，3 種類の内線粒子が重力アノーマリーに寄与し得る．

1. N 個の外線グラビトンと相互作用するスピン $\frac{1}{2}$ のフェルミオン，

2. N 個の外線グラビトンと相互作用するスピン $\frac{3}{2}$ のフェルミオン，

3. N 個のグラビトンと相互作用する 4 階反対称テンソル．

スピノールがアノーマリーに寄与する理由は明らかである．その伝播関数は $1/p$ でしか収束せず，ふつうのパウリ-ビラー正則化法は，γ_5 因子をもつカイラル場に対してはうまくいかないからである．

4 階反対称テンソルも加えてあるのは，このテンソルの単純な共変的作用が存在しないためである[2]．それは光錐ゲージではうまく定義されているが，共変的なラグランジアンが書けないので，アノーマリーをもち得ると考えられる．

まず，グラビトンに結合したスピン $\frac{1}{2}$ 粒子を考える：

$$S = \int d^D x e\, e^{\mu a} \bar{\psi} i \gamma^a D_\mu \left[\frac{1}{2}(1-\gamma_5) \right] \psi. \tag{8.6.6}$$

平坦な空間のまわりに展開すれば，

$$e^{\mu a} = \delta^{\mu a} + h^{\mu a} + \cdots \tag{8.6.7}$$

となる．われわれはフィアーバイン場とスピノールの最低次の結合に興味がある：

$$\begin{aligned} L_1 &= -\frac{i}{4} h^{\mu\nu} \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu (1-\gamma_5) \psi \\ L_2 &= -\frac{1}{16} (h_{\lambda\alpha} \partial_\mu h_\nu^\alpha) \bar{\psi} \Gamma^{\mu\lambda\nu} \frac{1}{2} (1-\gamma_5) \psi. \end{aligned} \tag{8.6.8}$$

とくに興味のあるのは，スピン $\frac{1}{2}$ の粒子が中をまわり，外線にグラビトンの足がついている 1 ループ図である．第 1 項はふつうの 3 粒子頂点関数で，1 つの運動量と偏極テンソルの組み合わせからなるファインマン頂点を出す．しかし第 2 項は，4 点ファ

[2] これは，(反)自己双対という条件((8.6.26)を見よ)を課した場合である．

インマン図，つまり「かもめ」(sea-gull)項である．

最初は，任意の数のグラビトンの足のついたフェルミオンの1ループ図を計算することは絶望的に思える．しかし，これを割にやさしい問題に帰着させるトリックがある．簡単な対称性の議論を用いて，この問題を**一定電磁場と相互作用するスカラー荷電粒子の散乱**に帰着できることがわかるのである．幸いにして QED の荷電スカラーの問題は，よく研究された問題で解は知られている．このように問題の鍵は，複雑な問題をすでにわかっている問題に帰着することである．

このトリックは，他の2つの場合にも拡張できる．われわれは，外線にグラビトンのある内部にスピン $\frac{3}{2}$ と反対称テンソル場がまわる散乱にも興味がある．これもやはり対称性の議論により，この問題をずっと簡単な問題に帰着できる．中をまわるスピン $\frac{3}{2}$ 粒子はベクトル場に，反対称テンソル場はスピン $\frac{1}{2}$ 粒子に帰着できるのである：

$$\begin{aligned} &\text{スピン}\,\frac{1}{2}\,\text{とスピン}\,2 \to \text{スピン}\,0\,\text{とスピン}\,1 \\ &\text{スピン}\,\frac{3}{2}\,\text{とスピン}\,2 \to \text{スピン}\,1\,\text{とスピン}\,1 \\ &\text{反対称テンソルとスピン}\,2 \to \text{スピン}\,\frac{1}{2}\,\text{とスピン}\,1. \end{aligned} \tag{8.6.9}$$

ファインマン則により，多角形図は容易に構成できる．スピン $\frac{1}{2}$ 粒子の散乱の振幅は，

$$I_{1/2} = i2^{2k+1}M^2 R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) Z(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) \tag{8.6.10}$$

と表せることが知られている[3]．ここで，

$$R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) = -\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_{4k+2}} p^{(1)}_{\mu_1}\varepsilon^{(1)}_{\mu_2}\cdots p^{(2k+1)}_{\mu_{4k+1}}\varepsilon^{(2k+1)}_{\mu_{4k+2}} \tag{8.6.11}$$

で，i 番目の外線のグラビトンの偏極は，

$$\varepsilon^{(i)}_{\mu\nu} = \varepsilon^{(i)}_{\mu}\varepsilon^{(i)}_{\nu} \tag{8.6.12}$$

で与えられる．上の式で，i 番目の外線のグラビトンの偏極を2つのスピン1の偏極ベクトルの積にとってもよいことに注意せよ．これがスピン2粒子のもとの散乱振幅を，スピン1粒子のものに書き直せる鍵なのである．

幸いなことに，問題が**一定電磁場と相互作用する**(**電荷 $\frac{1}{4}$ の**)**荷電スカラー粒子の散乱**に帰着できた．これは何十年も前に Schwinger が計算している [13]．電磁場を，

$$F_{\mu\nu} = -i\sum_{j=0}^{2k+1}(p^{(j)}_{\mu}\varepsilon^{(j)}_{\nu} - p^{(j)}_{\nu}\varepsilon^{(j)}_{\mu}) \tag{8.6.13}$$

で表そう．

前に(8.3.5)で汎関数の手法を用いて，アノーマリーの項が伝播関数の行列式の対数に関係していることを示した．つまり，

$$\Gamma(A_\mu) = \ln\det\left[\frac{1}{2}(1+\Gamma_{D+1})\not{D}\right] \tag{8.6.14}$$

---

[3] M はパウリ-ビラー正則化の質量で，後で $M\to\infty$ の極限をとる．

を示した．すると，Z は

$$Z = \frac{1}{\text{体積}} \ln \det(-D_\mu D^\mu + M^2)$$
$$= -\frac{1}{\text{体積}} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \mathrm{Tr}\, e^{s(D_\mu D^\mu)} e^{-sM^2} \tag{8.6.15}$$

である．Schwinger は，

$$\frac{1}{\text{体積}} \mathrm{Tr}\, e^{sD_\mu D^\mu} = \frac{1}{4\pi} \frac{eB}{\sinh eBs} \tag{8.6.16}$$

を証明している．ここで B は電磁場の有効磁場で，e は電荷である．（この章の終わりで，これのもっと一般的証明を与える.） 反対称マクスウェルテンソルを実数で対角化することはできないが，それを常に

$$F_{\mu\nu} = 2 \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & 0 & \cdots \\ -x_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & \cdots \\ 0 & 0 & -x_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{8.6.17}$$

と書くことはできる．すると，アノーマリーの寄与は

$$I_{1/2} = -i(2\pi)^{-2k-1} R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) \prod_{i=1}^{2k+1} \frac{\frac{1}{2}x_i}{\sinh \frac{1}{2}x_i} \tag{8.6.18}$$

に等しいことがわかる．期待通り，これはちょうどディラック演算子の指数，すなわち $\hat{A}$ の積分になっている．

次に，任意の数の外線グラビトンに結合したスピン $\frac{3}{2}$ フェルミオンループのアノーマリーを計算しなければならない．再び対称性の議論を用いて，問題をずっと簡単にする．重力に結合したスピン $\frac{3}{2}$ 粒子の作用は，

$$L = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu D_\lambda \psi_\rho \tag{8.6.19}$$

である．スピノール ψ_μ は，省略してあるスピノール添字とともにベクトル添字をもつことに注意しよう．再び最低の結合だけを取り出そう：

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{i}{2} h^{\alpha\beta} \bar{\psi}_\mu \gamma_\alpha \partial_\beta \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi^\mu \\ L_2 &= \frac{i}{16}(h^\alpha_\lambda \partial_\sigma h_{\tau\alpha}) \bar{\psi}_\mu \Gamma^{\sigma\lambda\tau} \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi^\mu \\ L_3 &= \frac{i}{2}(\partial_\sigma h_{\alpha\nu} - \partial_\alpha h_{\sigma\nu}) \bar{\psi}^\sigma \gamma^\nu \psi^\alpha. \end{aligned} \tag{8.6.20}$$

再び，一般の 1 ループ振幅は

$$I_{3/2} = 2^{2k+1} i M^2 R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) Z(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) \tag{8.6.21}$$

と書ける．ここで Z は，一定電場と相互作用する内部荷電ベクトルボソンの散乱を表

す．Z を1ループで再現する荷電ベクトルボソンの有効理論を書こう：

$$Z = \mathrm{Tr}\ln H = -\int_0^\infty \frac{ds}{s}\mathrm{Tr}\, e^{-sH}. \tag{8.6.22}$$

ここで，

$$H\phi_\mu = -\left(\partial_\sigma + \frac{i}{4}A_\sigma\right)^2\phi_\mu + \frac{i}{2}F_{\mu\nu}\phi^\nu \tag{8.6.23}$$

である．すべての計算を実行すると，

$$I_{3/2} = -i(2\pi)^{-2k-1}R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)})\prod_{i=1}^{2k+1}\frac{\frac{1}{2}x_i}{\sinh\left(\frac{1}{2}x_i\right)}\sum_{j=0}^{2k+1}(2\cosh x_j - 1) \tag{8.6.24}$$

が得られる．

計算したい最後のアノーマリー項は，反対称テンソル場の寄与である．ところが，テンソル場のアノーマリーを計算するときに，この粒子には共変な作用がないので注意しなければならない．まず，$4k+2$ 次元で反対称テンソルとその曲率

$$F_{\mu_1\cdots\mu_{2k+1}} = \partial_{\mu_1}A_{\mu_2\cdots\mu_{2k+1}} + \text{巡回置換} \tag{8.6.25}$$

を考えよう．これが自己双対

$$F_{\mu_1\cdots\mu_{2k+1}} = \frac{1}{(2k+1)!}\varepsilon^{\mu_{2k+2}\cdots\mu_{4k+2}}_{\mu_1\cdots\mu_{2k+1}}F_{\mu_{2k+2}\cdots\mu_{4k+2}} \tag{8.6.26}$$

という条件を課すと問題が起こる．ビアンキ恒等式により，この関係が運動方程式と同等であることが示せるからである．言い換えると，単純な作用

$$L \sim F^2_{\mu_1\cdots\mu_{2k+1}} \tag{8.6.27}$$

は単に自己双対のものだけでなく，自己双対と反自己双対の状態を両方とも伝播させる．それで問題が生じるのである．実際，自己双対の状態だけを伝播させる共変的作用は存在しないことが証明できる [14]．

しかし，トリックを用いれば散乱振幅を計算できる．共変的作用は存在しないが，この粒子のファインマン規則は共変的に書けるからである．ここで使うトリックは，スピノール場を用いて反対称テンソル場を表すのである．

この場のエネルギー運動量テンソルは，

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{(2k)!}F_{\mu\alpha_1\cdots\alpha_{2k}}F_\nu^{\alpha_1\cdots\alpha_{2k}} - \frac{1}{2(2k+1)!}g_{\mu\nu}F^2_{\alpha_1\cdots\alpha_{2k+1}} \tag{8.6.28}$$

である．幸いなことに，作用は知られていなくても，この反対称 F テンソルのファインマン規則はすべてわかっている．ここで，この反対称テンソルをフェルミオン場により書き換えよう．

$$\phi_{\alpha\beta} = 2^{-N/4}\sum_{n=0}^{N}(\Gamma_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n})_{\alpha\beta}F^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} \tag{8.6.29}$$

と定義しよう．これの逆は

$$F_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = 2^{-N/4}(\Gamma_{\mu_n\cdots\mu_1})_{\beta\alpha}\phi^{\alpha\beta} \tag{8.6.30}$$

である．この埋め込みを用いる利点は，反対称テンソルよりフェルミオン場の方がずっと使いやすいことである．2 点関数は，

$$\langle\phi_{\alpha\beta}(q)\phi_{\gamma\delta}(-q)\rangle = (2q^2)^{-1}[(\gamma^5\gamma^\mu q_\mu)_{\alpha\gamma}(\gamma^5\gamma^\mu q_\mu)_{\beta\delta} + q^2\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}] \tag{8.6.31}$$

である．すると，最終的振幅は，

$$I_A = -\frac{i}{2}M^2 2^{2k+1} R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)})Z \tag{8.6.32}$$

と書ける．ここで，Z は荷電スカラーと外線光子との結合を表す：

$$\begin{aligned} Z &= \mathrm{Tr}\ln(i\gamma^\mu D_\mu + iM) \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-sM^2} \mathrm{Tr}\exp[-s(-D_\mu D^\mu + i\Gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu})]. \end{aligned} \tag{8.6.33}$$

ところが，

$$\mathrm{Tr}\, e^{-is\Gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}} = 2^{2k+1}\prod_{i=1}^{2k+1}\cosh\left(\frac{1}{2}x_i\right) \tag{8.6.34}$$

がわかっている．こうして反対称テンソル場からのアノーマリーの寄与は，最終的に

$$I_A = \frac{i}{4}2^{2k+1}(2\pi)^{-2k-1}R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)})\prod_{i=1}^{2k+1}\frac{\frac{1}{2}x_i}{\sinh\left(\frac{1}{2}x_i\right)}\cosh\left(\frac{1}{2}x_i\right) \tag{8.6.35}$$

となる．

もちろん，外部ゲージ場からのアノーマリーの寄与も計算しなければならない．その計算はすでにやったものとほとんど同じであるが，n 個のゲージ粒子に対応する n 個のゲージ生成子が入っている点が違う．

(8.6.18), (8.6.24), (8.6.35)を合わせ，ゲージ部分から来る混合アノーマリーの寄与も含めよう．便宜上，全体のアノーマリーを I_{D+2} によって書く．これは(8.4.7)で示したように，アノーマリーの便利な形である．なぜなら，アノーマリー項が Wess-Zumino 無矛盾性条件を自動的にみたすことを示せるからである．12 形式を取り出せば，

$$\begin{aligned} I_{12} = &\frac{-1}{720}\mathrm{Tr}\,F^6 + \frac{1}{24\cdot 48}\mathrm{Tr}\,F^4\mathrm{Tr}\,R^2 - \frac{1}{256}\mathrm{Tr}\,F^2\left(\frac{1}{45}\mathrm{Tr}\,R^4 + \frac{1}{36}(\mathrm{Tr}\,R^2)^2\right) \\ &+ \frac{(n-496)}{64}\left[\frac{1}{2\cdot 2835}\mathrm{Tr}\,R^6 + \frac{1}{4\cdot 1080}\mathrm{Tr}\,R^2\mathrm{Tr}\,R^4 + \frac{1}{8\cdot 1296}(\mathrm{Tr}\,R^2)^3\right] \\ &+ \frac{1}{384}\mathrm{Tr}\,R^2\mathrm{Tr}\,R^4 + \frac{1}{1536}(\mathrm{Tr}\,R^2)^3 \end{aligned} \tag{8.6.36}$$

を得る．ここで R は曲率テンソル，F は Yang-Mills テンソルを表す．これが最終的結果である．一見，奇跡がたくさん起こらなければ，こんなすごいものが消えるとは思えない．ところが本当に奇跡がたくさん起こるのである．以下では，弦模型が次をみたすことを示す．

(I) $n=496$．これでアノーマリーの項が半分消える．

(II) 残りの 0 でない項が，因子化した形にまとめられる．

(III) この因子化した形が，有効点粒子作用 ΔS から来る別の項で打ち消せる．

すばらしいことに，この 3 つの条件すべてが同時に課せる．

第 1 に，条件(I)は $n = 496$ とすれば容易にみたせる．そうすると(8.6.36)の多数の項が消える．

第 2 に，条件(II)をみたすのはずっと難しいが，$\mathrm{Tr}F^6$ を $\mathrm{Tr}F^2\mathrm{Tr}F^4$ と $(\mathrm{Tr}\,F^2)^3$ で表せれば，(8.6.36)の残りの項が 2 つの項の積に因子化することを示せる．すなわち，

$$\mathrm{Tr}\,F^6 = \frac{1}{48}\mathrm{Tr}\,F^2 \wedge \mathrm{Tr}\,F^4 - \frac{1}{14,400}(\mathrm{Tr}\,F^2)^3 \tag{8.6.37}$$

この奇妙に見える式がみたされていれば，

$$I_{12} \sim (\mathrm{Tr}\,R^2 + k\mathrm{Tr}\,F^2)X_8 \tag{8.6.38}$$

と分解できる．アノーマリー(8.6.36)は，$k = -\frac{1}{30}$ で

$$X_8 = \frac{1}{24}\mathrm{Tr}\,F^4 - \frac{1}{7200}(\mathrm{Tr}\,F^2)^2 - \frac{1}{240}\mathrm{Tr}\,F^2 \wedge \mathrm{Tr}\,R^2 + \frac{1}{8}\mathrm{Tr}\,R^4 + \frac{1}{32}(\mathrm{Tr}\,R^2)^2 \tag{8.6.39}$$

であれば消える．

最初は，これらの厳しい条件を成り立たせることにより，条件(II)をなんとかみたせるということはすばらしいことに思える．

どんなリー群がこの奇妙な条件(8.6.37)をみたすかを調べなければならない．ゲージ行列のトレースは，随伴表現で定義されていることに注意しよう．これを基本表現についてのトレース(付録を見よ)に変えた場合記号 “tr” を用いることにする．

(8.6.37)をみたす群が存在することの証明は容易である．まず，SO (l)の基本表現では，行列 F は反対称 $l \times l$ 行列として表されることがわかっている．また随伴表現では，F は

$$F_{ab,cd} = \frac{1}{2}(F_{ac}\delta_{bd} - F_{bc}\delta_{ad} - F_{ad}\delta_{bc} + F_{bd}\delta_{ac}) \tag{8.6.40}$$

と表せる．具体的な表式を F^6 のトレースの計算に入れれば，

$$\mathrm{Tr}\,F^6 = (l - 32)\,\mathrm{tr}\,F^6 + 15\,\mathrm{tr}\,F^2\,\mathrm{tr}\,F^4 \tag{8.6.41}$$

が得られる．因子化の条件をみたすためには，曲率の 6 次の項 F^6 を含めいくつかの項が消せなければならない．これは $l = 32$ ならば可能であることに注意せよ．その場合，まさに 496 個の生成子をもつ．こうして再び SO(32) を得る．

$E_8 \otimes E_8$ も (8.6.37)をみたすことの証明は，もう少し複雑である．群のクレプシュ-ゴルダン係数が，4 つまたは 6 つの F を縮約できる独立な不変量を与えるようになっているかどうかを知る必要がある．数学的には，4 次と 6 次の独立な Casimir 演算子があるかどうかを知る必要があるのである．幸いなことに，ある定理によって，ホモトピー群 $\pi_{2n-1}(E_8)$ が整数を含んでいれば，n 次の独立な Casimir 演算子が存在することが知られている．(ホモトピーは同値類を生成する方法で，その要素は空間や面で

はなく連続写像である.) そしてこの条件をみたす最初のホモトピー群は, π_3 と π_{15} であることが示せる:

$$\pi_3(E_8) = \mathbb{Z}; \quad \pi_{15}(E_8) = \mathbb{Z}; \quad \pi_i(E_8) = 0, \quad 3 < i < 15. \tag{8.6.42}$$

したがって, 興味のある独立不変量は 2 次のものだけで, $\mathrm{Tr}F^4$ と $\mathrm{Tr}F^6$ は独立でなく $\mathrm{Tr}F^2$ によって書ける. 最後のステップは, $\mathrm{Tr}\,F^6 \sim (\mathrm{Tr}\,F^2)^3$ に現れる係数を実際に計算することである. そのためには, 全体の係数だけに興味があるので, E_8 の中の部分群 SO(16) の特定の表現をとって計算すればよい. 随伴表現 248 は, SO(16) の下で $\mathbf{120} \oplus \mathbf{128}$ の和に分解できる. こうして, (8.6.37)が, SO(32) と $E_8 \otimes E_8$ に対して証明できる. (この式は, $\mathrm{U}(1)^{496}$ と $E_8 \otimes \mathrm{U}(1)^{248}$ に対しても簡単に証明できる.)

まだ話が終わったわけではない. まだ条件(III)をみたし, アノーマリーを最終的に消す低エネルギー有効くりこみ項 ΔS が存在することを示さなければならないからである. 単純に $D = 10$ カイラル超重力が 496 超 Yang-Mills 場に結合したものをとると, X_8 の項が消えないことがわかる. したがって, $D = 10$ カイラル超重力は量子論としては排除されねばならない. ところが超弦理論は, ゼロスロープの極限で新しい結合項をもっており, 残りの項が消えるのである.

低エネルギーの近似では超弦は, $D = 10$ カイラル超重力の作用に現れるよりも多くの項を作用にもっている. 最初はこれは驚くべきことに思われる. なぜなら超重力は, 超弦理論の低エネルギー極限だからである. しかし, 低エネルギーのレベルでも差はある. 無限個のレッジェオン状態の和は, 一般に単純に期待されるより多くのファインマン図を与えるからである. (たとえば Yang-Mills 理論は, そのラグランジアンに場の 4 次までの項をもっている. ところが第 1 量子化した弦理論では, 3 レッジェオン結合しか予言されない. 欠けている 4 粒子頂点はどこにあるのだろう? それは無限個のレッジェオンについての和から生じ, 低エネルギー極限で有効 4 粒子項を与えるのである. 一般に, 高次の樹木とループが Yang-Mills と重力理論に必要な項をすべて出すのである.)

実際, アノーマリー項を打ち消す有効樹木レベル項が存在することが示せる. これを示すために, まず 12 形式を[4]

$$I_{12} \sim (\mathrm{Tr}\,R^2 - \mathrm{tr}\,F^2)X_8 \tag{8.6.43}$$

と書こう. これは

$$I_{12} \sim (d\omega_{3L} - d\omega_{3Y})X_8 \tag{8.6.44}$$

と書き直せる. なぜなら, 恒等式

[4] $\mathrm{Tr}\,F^2 = 30\,\mathrm{tr}\,F^2$ (SO(32) と $E_8 \otimes E_8$ に対し) を用いている.

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} R^2 &= d\omega_{3L} \\ \operatorname{tr} F^2 &= d\omega_{3Y} \\ \omega_{3Y} &= \operatorname{tr}\left(AF - \frac{1}{3}A^3\right) \\ \omega_{3L} &= \operatorname{Tr}\left(\omega R - \frac{1}{3}\omega^3\right) \end{aligned} \tag{8.6.45}$$

があるからである．また，

$$\begin{aligned} \delta\omega_{3Y} &= -d\omega_{2Y}^1 \\ \delta\omega_{3L} &= -d\omega_{2L}^1 \end{aligned} \tag{8.6.46}$$

が成り立つ．ここで，オメガ項は Yang-Mills (Y) またはローレンツ (L) 接続に対応する Chern-Simons 3 形式である．この 12 形式 I_{12} を新しい 10 形式 ω_{10} によって表し，Wess-Zumino 無矛盾性条件がみたされているようにしたい．(8.4.10) の場合のように，手順は ω_{10} と ω_{11} を構成することにより G 項を見つけて，

$$\begin{aligned} I_{12} &= d\omega_{11} \\ G &= \delta_\Lambda \int_\Sigma \omega_{11} = \int_\Sigma d\omega_{10} = \int_M \omega_{10} \end{aligned} \tag{8.6.47}$$

とするのである．

12 形式から 10 形式に変形していくと，最終的結果にかなりの任意性があることがわかる．I_{12} から出発して，11 形式と，10 形式に移ることは難しくない．単に最終的結果を引用しておこう：

$$\omega_{11} = \frac{1}{3}(\omega_{3L} - \omega_{3Y})X_8 + \frac{2}{3}(\operatorname{Tr} R^2 - \operatorname{tr} F^2)X_7 + \alpha d[(\omega_{3L} - \omega_{3Y})X_7]. \tag{8.6.48}$$

ここで α は任意の定数で，

$$\omega_{10} = \left(\frac{2}{3} + \alpha\right)(\operatorname{Tr} R^2 - \operatorname{tr} F^2)X_6 + \left(\frac{1}{3} - \alpha\right)(\omega_{2L} - \omega_{2Y})X_8 \tag{8.6.49}$$

である．ここで X_6 と X_7 の次の表式を用いた：

$$\begin{aligned} dX_7 &= X_8 \\ \delta X_7 &= dX_6. \end{aligned} \tag{8.6.50}$$

以上をまとめると，G の表式が得られる：

$$G = \left(\frac{2}{3} + \alpha\right)\int(\omega_{3L} - \omega_{3Y})dX_6 + \left(\frac{1}{3} - \alpha\right)\int(\omega_{2L} - \omega_{2Y})X_8. \tag{8.6.51}$$

これが計算したかった因子 G である．さて問題は，超 Yang-Mills 理論に結合した $D = 10$ 超重力が G を打ち消すアノーマリー項を出せるかどうかである．以上の恒等式があるので，次の有効作用を加えればちょうど G を打ち消すようなアノーマリー項への新しい寄与が得られることは容易に示せる：

$$\Delta S \sim \int BX_8 - \left(\frac{2}{3} + \alpha\right)\int(\omega_{3L} - \omega_{3Y})X_7. \tag{8.6.52}$$

ここで，α は定数，ω_3 項は Chern-Simons 項，B は 2 形式 B_{MN} で，超 Yang-Mills 理論を $D=10$ 超重力に結合させたものに現れる場である(Chapline-Manton の作用)．注意深く比べてみると，B 場の変分を

$$\delta B = \omega_{2L}^1 - \omega_{2Y}^1 \tag{8.6.53}$$

ととれば，これらはアノーマリーのない理論になることがわかる．重要なことは，これは超重力で見つけられている B 場のふつうの変分ではないことである．したがって，Chapline-Manton の超重力の作用にはアノーマリーがある．これは残念なことであるが，超弦理論ではループと無限個の共鳴状態の和から生じる有効項がある．そのため B 場の変分が変更され，満足な超重力理論を得られるのである．けれども次の問題として，この相殺が予期されたように起こることを実際に示す必要がある．B 場が正しい変分をもっていて，すべてのアノーマリーが消える可能性があることを示すことは 1 つの問題である．それが実際にそのように起こることを示すのはまた別の問題なのである．

驚くべきことに，超弦全体のアノーマリーが消えることは，点粒子超重力の系のアノーマリーの相殺よりもずっと簡単にわかるのである！

8.7 弦におけるアノーマリーの相殺

$n=496$ でゲージ群が SO(32) または $E_8 \otimes E_8$ に等しければ，奇跡がたくさん起こってすべてのアノーマリーが打ち消すことを見た．しかしこれらの議論は，低エネルギー近似のみで定式化されており，一般の場合に確かめねばならない．驚くべきことに弦模型は，無限個の共鳴を簡潔に取り扱うので，超弦に対する計算は超重力理論の計算よりもずっとやさしい [15].

まず，パウリ-ビラー正則化法から出発して，ふつうの伝播関数を質量のあるものに置き換えよう：

$$\frac{1}{F_0} \to \frac{1}{F_0 - im} = \frac{F_0 + im}{L_0 + m^2}. \tag{8.7.1}$$

つまり，ふつうの場の理論の哲学を採用して，アノーマリーはパウリ-ビラー正則化が(あるいは他のどの正則化でも)カイラル不変性を破るために起こるとする．この正則化は質量項を付け加えているために，明らかにカイラル不変性を破っている．

正則化の前には，パリティを破る 1 ループ 6 角形図は，

$$T(0) = \int d^{10}p \mathrm{Tr}\left(\frac{F_0}{L_0}V(1)\cdots\frac{F_0}{L_0}V(6)\bar{\Gamma}_{11}\right) \tag{8.7.2}$$

のようになる．ここで，

$$V(i) = V(k_i, \zeta_i, 1) \tag{8.7.3}$$

で，$\frac{1}{2}(1+\bar{\Gamma}_{11})$ は NS-R 模型の「偶 G パリティ」状態を選び出す射影演算子である：

$$\bar{\Gamma}_{11} = \Gamma_{11}\Gamma_d; \quad \Gamma_d = (-1)^{\sum_{n=1}^{\infty} d_{-n}d_n}. \tag{8.7.4}$$

(GSO 射影がなければ理論はパリティを保存するようになるので，実はアノーマリー

はない.)

計算したい振幅は,

$$\lim_{m\to\infty}[T(0)-T(m)] \tag{8.7.5}$$

である. m が大きくなる極限で質量への依存性が落ち, 有限の結果が残るはずである. そこで, ディラック行列についてのトレースをすべてとろう. 具体的には, 残る振幅は,

$$G \sim im^2\varepsilon(\zeta,k)\int d^{10}p\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{L_0+m^2}V_0(1)\cdots\frac{1}{L_0+m^2}V_0(6)\Gamma_d\right) \tag{8.7.6}$$

となる. ただし,

$$\varepsilon(\zeta,k)=\varepsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_5\nu_1\nu_2\cdots\nu_5}\zeta_1^{\mu_1}\cdots\zeta_5^{\mu_5}k_1^{\nu_1}\cdots k_5^{\nu_5} \tag{8.7.7}$$

である. ここで質量が無限大の極限をとるときには, 特別の注意を払わねばならない. 一般に, 平面と向きづけ不可能な 1 ループの図からの寄与を加え合わせねばならないからである. それらに対し,

$$G_{\mathrm{P}} \sim \varepsilon(\zeta,k)\int_0^1\prod_{i=1}^5 d\nu_i\theta(\nu_{i+1}-\nu_i)\langle 0|V_0(k_1,z_1)\cdots V_0(k_6,z_6)|0\rangle$$

$$G_{\mathrm{NO}} \sim \varepsilon(\zeta,k)\int_0^2\prod_{i=1}^5 d\nu_i\theta(\nu_{i+1}-\nu_i)\langle 0|V_0(k_1,z_1)\cdots V_0(k_6,z_6)|0\rangle \tag{8.7.8}$$

が得られる. 以上をまとめ, Chan-Paton 因子から来るアイソスピン因子を含めれば,

$$\begin{aligned} G \sim &(n+32l)\mathrm{Tr}(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_6)\varepsilon(\zeta,k)\\ &\times\int_0^1\prod_{i=1}^5 d\nu_i\theta(\nu_{i+1}-\nu_i)\langle 0|V_0(k_1,z_1)\cdots V_0(k_6,z_6)|0\rangle \end{aligned} \tag{8.7.9}$$

を得る. アノーマリーが消えるには, $(n+32l)$ が 0 になることを示せばよい. ここで, この $(n+32l)$ の因子がどこから来たかを分析しておくのが重要である.

1. n は, 穴のあいた円板の内と外の端のトレースをとらねばならぬことから来る. 外のトレースは Chan-Paton 因子を与える. 内のトレースは(外線がなく)因子 $\mathrm{Tr}(1)=n$ を与える.

2. 因子 l は, アイソスピン群に由来し,

$$l=\begin{cases}1 & \mathrm{Usp}(n)\\ 0 & \mathrm{U}(n)\\ -1 & \mathrm{SO}(n)\end{cases} \tag{8.7.10}$$

に等しい.

3. もっとも重要なのは因子 32 である. 向きづけ不可能な図は 0 から 2 の積分をもち,

平面の図は 0 から 1 の積分をもつので，ヤコビアンに 32 の因子があったために生じる((5.3.24)を参照)．こうして，相殺が起こるためには，

$$\begin{aligned} l = -1 &\rightarrow \text{ゲージ群は SO}(n) \\ n + 32l = 0 &\rightarrow \text{ゲージ群は SO}(32) \end{aligned} \tag{8.7.11}$$

と決めなければならない．

まとめると，ゲージ群として SO(32) をとれば Chan-Paton 因子をもつアノーマリーのない理論が得られるのである．

8.8 まとめ

本章では，Chan-Paton 因子とアノーマリーの相殺を用いて弦理論のゲージ群を決めた．まず Chan-Paton 因子は，Veneziano ボルン項にかかっているいろいろな群の生成子のトレースである：

$$T(1,2,3,\ldots,N) = \sum_{\text{置換}} \text{Tr}(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_N)A(1,2,3,\ldots,N). \tag{8.8.1}$$

残念ながら，ユニタリー性が群に課す制限は，それが任意の N の Usp(N), SO(N) または U(N) ということだけしかない．

模型がアノーマリーをもたないと要求すると，群に対するもっと強い制限が得られる．一般に，ラグランジアンの古典的対称性が量子化の過程で残らない場合はいつでもアノーマリーが生じる．たとえばカイラルアノーマリーは，正則化の方法(例はパウリ-ビラーまたは次元正則化法)が必然的にカイラル不変性を破るために生じる．

とくに軸性カレントの発散は，0 ではなく，

$$\partial_\mu J^{\mu 5} = -\frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho} \tag{8.8.2}$$

に等しい．これは，

$$J^{\mu 5} = -\frac{1}{4\pi^2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\text{Tr}\left(A_\alpha\partial_\beta A_\gamma + \frac{2}{3}A_\alpha A_\beta A_\gamma\right) \tag{8.8.3}$$

から得られる全微分，すなわち位相的項である．

一般に高次元のアノーマリーは，位相的項に比例する．たとえば微分形式の理論を用いて，曲率テンソルの積が別の形式の発散として書けることが示せる．曲率のトレースが，Chern-Simons 形式の発散により書けることが示せるのである：

$$\text{Tr}\,\Omega^n = nd\int_0^1 dt\, t^{n-1}\text{Tr}\left\{A(dA + tA^2)^{n-1}\right\}. \tag{8.8.4}$$

これらの不変多項式の研究により，特性類の理論へと導かれる．古典的な特性類は 4 つある．Chern 類は

$$c(\Omega) = \det\left(I + \frac{i}{2\pi}\Omega\right) = 1 + c_1(\Omega) + c_2(\Omega) + \cdots \tag{8.8.5}$$

と定義できる．Pontrjagin 類は，O(k) に対し

$$p(\Omega) = \det\left(I - \frac{1}{2\pi}\Omega\right) = 1 + p_1 + p_2 + \cdots \tag{8.8.6}$$

と定義される．Euler 類は Pfaffian により定義される：

$$\alpha^r = r!(2\pi)^r e(\alpha)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^{2r}. \tag{8.8.7}$$

最後に Stiefel-Whitney 類があるが，それは曲率形式では書けない．しかし，スピン多様体を分析するときには，Stiefel-Whitney 類が重要であることがわかる．とくに，最初の 2 つの指数が 0 になる場合だけスピノールを定義できる向きづけ可能なスピン多様体を与えるのである：

$$\begin{aligned} &\omega_1 = 0 \leftrightarrow M \text{ が向きづけ可能} \\ &\omega_1 = \omega_2 = 0 \leftrightarrow M \text{ がスピン多様体.} \end{aligned} \tag{8.8.8}$$

さらに指数定理は，ふつう次の不変多項式により書かれる：

$$\begin{aligned} \text{Todd 類} &= \mathrm{td}(M) = \prod_i \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}} \\ \text{Hirzebruch 類} &= L(M) = \prod_i \frac{x_i}{\tanh x_i} \\ \hat{A}\text{多項式} &= \hat{A}(M) = \prod_i \frac{\frac{1}{2}x_i}{\sinh \frac{1}{2}x_i}. \end{aligned} \tag{8.8.9}$$

指数定理のもっとも有用なものはディラック指数定理で，ディラック方程式の正のカイラリティーのゼロ固有値解から負のカイラリティーの解を引いた数に関するものである．超対称シグマ模型を用いて，次のことが示せる：

$$\begin{aligned} \mathrm{Index}(\not{D}) &= \mathrm{Tr}(-1)^F e^{-\tau D^2} \\ &= \frac{1}{2}\int d^D x \partial_\mu J^{\mu 5} \\ &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{D/2} \int \mathrm{Tr}\, e^F \det{}^{-1/2}\left[\left(\frac{1}{2}R\right)^{-1} \sinh \frac{1}{2}R\right]. \end{aligned} \tag{8.8.10}$$

この理論的手段により超重力と弦理論のゲージと重力アノーマリーを計算できる．一般に重力とゲージのアノーマリーが生じるのは，内線が次のいずれかの場合である．

1. スピン $\frac{1}{2}$ カイラルフェルミオン，

2. スピン $\frac{3}{2}$ カイラルフェルミオン，

3. 共変な作用のない反対称テンソル．

アノーマリーの寄与の計算は，ファインマン図を用いて実際に実行できる．計算は外線の偏極テンソルについてある仮定をすることによりスピンを小さくできて非常に

簡単になる．これによりいろいろな添字について縮約するという困難な問題が，低いスピンの粒子について縮約するというずっと簡単な問題に帰着するのである．最終的結果は，

$$
\begin{aligned}
I_{1/2} &= -i(2\pi)^{-2k-1}R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) \prod_{i=1}^{2k+1} \frac{\frac{1}{2}x_i}{\sinh\frac{1}{2}x_i} \\
I_{3/2} &= -i(2\pi)^{-2k-1}R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) \prod_{i=1}^{2k+1} \frac{\frac{1}{2}x_i}{\sinh\frac{1}{2}x_i} \sum_{j=0}^{2k+1}(2\cosh x_j - 1) \qquad (8.8.11) \\
I_A &= \frac{i}{4}2^{2k+1}(2\pi)^{-2k-1}R(\varepsilon^{(i)}, p^{(j)}) \prod_{i=1}^{2k+1} \frac{\frac{1}{2}x_i}{\sinh\frac{1}{2}x_i}\cosh\frac{1}{2}x_i
\end{aligned}
$$

である．

以上を総合すれば，ゲージと重力の部分の両方からの全体のアノーマリーは，

$$
\begin{aligned}
I_{12} = &\frac{-1}{720}\mathrm{Tr}\,F^6 + \frac{1}{24\cdot 48}\mathrm{Tr}\,F^4\mathrm{Tr}\,R^2 - \frac{1}{256}\mathrm{Tr}\,F^2\left(\frac{1}{45}\mathrm{Tr}\,R^4 + \frac{1}{36}(\mathrm{Tr}\,R^2)^2\right) \\
&+ \frac{(n-496)}{64}\left[\frac{1}{2\cdot 2835}\mathrm{Tr}\,R^6 + \frac{1}{4\cdot 1080}\mathrm{Tr}\,R^2\mathrm{Tr}\,R^4 + \frac{1}{8\cdot 1296}(\mathrm{Tr}\,R^2)^3\right] \\
&+ \frac{1}{384}\mathrm{Tr}\,R^2\mathrm{Tr}\,R^4 + \frac{1}{1536}(\mathrm{Tr}\,R^2)^3 \qquad (8.8.12)
\end{aligned}
$$

となる．ところが奇跡的なことに，いくつかの仮定をすればこれを 0 とおくことができる．まず，$n = 496$ としなければならない．そして，アノーマリーを 2 つの項の積に因子化できると仮定する：

$$
\begin{aligned}
I_{12} &\sim (\mathrm{Tr}R^2 + k\mathrm{Tr}F^2)X_8 \\
X_8 &= \frac{1}{24}\mathrm{Tr}F^4 - \frac{1}{7200}(\mathrm{Tr}F^2)^2 - \frac{1}{240}\mathrm{Tr}F^2\wedge\mathrm{Tr}R^2 + \frac{1}{8}\mathrm{Tr}R^4 + \frac{1}{32}(\mathrm{Tr}R^2)^2. \qquad (8.8.13)
\end{aligned}
$$

この恒等式がみたされないので，$D = 10$ 超重力はただちに排除されることに注意しよう．ところが，弦理論は超重力にない大きな長所をもっている．超弦に高いスピン場があることのために，理論のゼロスロープ極限は正確に超重力に帰着する必要はない．とくに超弦の B 場の結合は，原理的に上に示した項を消せるようになっている．

しかしアノーマリーの項が実際に消えることは，弦の形式の完全な 1 ループ 6 角形図を用いて証明しなければならない．内線にパウリ-ビラー型の正則化を用い，それから平面と向きづけ不可能なループの和をとる．アノーマリーは，

$$
G \sim im^2\varepsilon(\zeta,k)\int d^{10}p\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{L_0+m^2}V_0(1)\cdots\frac{1}{L_0+m^2}V_0(6)\Gamma_d\right) \qquad (8.8.14)
$$

に比例している．ここで，

$$
\varepsilon(\zeta,k) = \varepsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_5\nu_1\nu_2\cdots\nu_5}\zeta_1^{\mu_1}\cdots\zeta_5^{\mu_5}k_1^{\nu_1}\cdots k_5^{\nu_5} \qquad (8.8.15)
$$

および

$$
\Gamma_d = (-1)^{\sum_{n=1}^{\infty}d_{-n}d_n} \qquad (8.8.16)
$$

である．最後に，平面と向きづけ不可能な図の和を加えると

$$G \sim (n+32l)\mathrm{Tr}(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_6)\varepsilon(\zeta,k) \times \int_0^1 \prod_{i=1}^{5} d\nu_i \theta(\nu_{i+1}-\nu_i)\langle 0|V_0(k_1,z_1)\cdots V_0(k_6,z_6)|0\rangle \tag{8.8.17}$$

を得る．この項が 0 になるためには，$n=32$ と

$$l = \begin{cases} 1 & \mathrm{Usp}(n) \\ 0 & \mathrm{U}(n) \\ -1 & \mathrm{SO}(n) \end{cases} \tag{8.8.18}$$

により，ゲージ群は SO(32) であることが必要になる．

参考文献

[1] J. E. Paton and H. M. Chan, *Nucl. Phys.* **B10**, 516 (1969).
[2] S. L. Adler, *Phys. Rev.* **177**, 2426 (1969).
[3] J. S. Bell and R. Jackiw, *Nuovo Cimento* **60A**, 47 (1969).
[4] W. A. Bardeen, *Phys. Rev.* **184**, 1848 (1969).
[5] E. Witten, in *Symposium on Anomalies, Geometry, and Topology* (edited by W. A. Bardeen and A. R. White) World Scientific, Singapore, 1985.
[6] P. H. Frampton and T. W. Kephart, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1343 (1983); *Phys. Rev.* **D28**, 1010 (1983).
[7] P. K. Townsend and G. Sierra, *Nucl. Phys.* **B222**, 493 (1983).
[8] B. Zumino, Y. S. Wu, and A. Zee, *Nucl. Phys.* **B239**, 477 (1984).
[9] J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett*, **37B**, 95 (1971).
[10] T. Eguchi, P. B. Gilkey, and A. J. Hanson, *Phys. Rep.* **66**, 213 (1980).
[11] C. Nash and S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*, Academic Press, New York, 1983.
[12] L. Alvarez-Gaumé and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B234**, 269 (1983).
[13] J. S. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951).
[14] N. Marcus and J. H. Schwarz, *Phys. Lett.* **115B**, 111 (1982).
[15] M. B. Green and J. H. Schwarz, *Phys. Lett.* **149B**, 117 (1984); **151B**, 21 (1984).
[16] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *Ann. Math.* **87**, 485, 546 (1968); **93**, 1, 119, 139 (1971).
[17] L. Alvarez-Gaumé, *Commun. Math. Phys.* **90**, 161 (1983).
[18] D. Friedan and P. Windey, *Nucl. Phys.* **B235** (FS11), 395 (1984).

第9章

ヘテロティック弦とコンパクト化

9.1 コンパクト化

弦理論の直面しているもっとも緊急の問題は，26 または 10 次元の理論を現実的な 4 次元の理論に破ることである．そのような次元の縮小ができるまでは，この理論は物理的に測定可能な量を本当に予言することはできない．

しかし場の理論の枠組みで，次元の破れが調べられるまでわれわれのできる精一杯のことは，余分の次元がすでに自発的にコンパクト化している古典解を探すことしかない．この章では，**ヘテロティック弦**を調べることにする．これは，26 次元空間を 10 次元にコンパクト化したときに生じる群 $E_8 \otimes E_8$ と $\mathrm{Spin}(32)/Z_2$ をもっている弦理論である．

前章で見たように，アノーマリーの相殺のためには O(32) または $E_8 \otimes E_8$ のどちらかの可能性が許される．しかし Chan-Paton の方法では，例外群の可能性は得られないことを見た．したがって $E_8 \otimes E_8$ の模型を作るには，自己双対な格子にコンパクト化することによる別の方法を用いねばならない．ヘテロティック弦は閉じた弦の理論であるが，その中に超 Yang-Mills 場を含んでいる．これはふつうは，I 型の超弦の開弦部分に出てくるものである．

ヘテロティック弦では，意外なほど簡単な恒等式

$$26 = 10 + 16 \tag{9.1.1}$$

を利用する．これは，26 次元の弦がコンパクト化して 10 次元の弦になったとき，16 次元の余分の次元が残ることを意味している．これを $E_8 \otimes E_8$ のルート格子にのせれば，アノーマリーのない理論が得られることが知られている．これは Freund が気付いたことである [1]．

ヘテロティック弦では，閉じた弦が 2 つの独立に動く部分をもっていることを利用する．それらは $\sigma + \tau$ と $\sigma - \tau$ のどちらの関数であるかにより，右向き部分と左向き部分と呼ばれる．ヘテロティック弦は，このようにわかれている部分を基本的な量として使っているのである．" heterosis" という言葉は，「混合した活力」 (hybrid vigor) という意味をもつ．これは左向きと右向きの部分を非対称に扱うことにより，前の I 型と II 型の超弦よりかなり洗練された混合理論ができることを意味しているのである．この理論にはタキオンもアノーマリーもなく，1 ループまで有限であることが示され

ている．

しかしヘテロティック弦の議論を始める前に，まずコンパクト化についてもっとも簡単な場合に述べてみよう．それは周期的1次元空間の中のスカラー粒子の場合である．つまり，

$$x = x + 2\pi R \tag{9.1.2}$$

という同一視をする．ここで R はこの空間の半径で，空間は実軸を $2\pi R$ の長さの1次元格子 Γ で割ったものである：

$$S_1 = \frac{R_1}{\Gamma}. \tag{9.1.3}$$

したがって，この周期的空間で定義されている場は

$$\phi(x) = \phi(x + 2\pi R) \tag{9.1.4}$$

をみたさねばならない．このために，ϕ は周期的固有関数でべき展開できる：

$$\phi(x) = \sum_n \phi_n e^{ipx}. \tag{9.1.5}$$

ここで，

$$p = \frac{n}{R} \tag{9.1.6}$$

で，n は任意の整数である．こうして，x に共役な運動量が整数で量子化されることがわかる．これはすべてのコンパクト化に共通の特徴である．

さて，これを5次元時空にある粒子に拡張して，5番目の座標が周期的になっているとしよう．ここで質量0のクライン-ゴルドン方程式

$$\Box_5 \phi(x_\mu, x_5) = 0 \tag{9.1.7}$$

をみたすスカラー場を考える．前のように，スカラー場を周期的固有関数によりべき展開できる：

$$\phi(x_\mu, x_5) = \sum_n \phi(x_\mu) e^{ip_5 x_5}. \tag{9.1.8}$$

ここで，$p_5 = n/R$ である．各固有関数がクライン-ゴルドン演算子の実質上の「質量」を変えることに注意しよう．すなわち，

$$\Box_5 = \Box_4 + \partial_5^2 = \Box_4 - p_5^2 \tag{9.1.9}$$

となっている．

これらの簡単な例から，いくつかの結論が引き出せる．

1. 次元のコンパクト化により，コンパクト化に対応した運動量の量子化が起きる．そして，運動量は整数のラベルをもつ．

2. コンパクト化した次元に由来する有効「質量」項により，コンパクト化していない時空の次元の質量スペクトラムがずれる．

3. いろいろなコンパクト化した次元の半径は完全に任意である．したがって，空間をコンパクト化する格子の選び方にはかなりの自由度がある．

4. 波動関数は，コンパクト化した座標の周期関数により展開できる．1次元ではそれは単に正弦や余弦関数である．高次元では球面調和関数である．

さて，一般相対論などの高スピンの理論をコンパクト化する場合を考えよう．この場合は5番目の次元からマクスウェル場が出てくる．

歴史的には，最初カルーツァ [2–4] がコンパクト化を考えた．彼は1919年にアインシュタインに手紙を書き，時空を5次元に拡張してアインシュタインの一般相対論とマクスウェルの電磁気学を結合させる考えを提唱したのである．カルーツァは，計量テンソルを

$$\bar{g}_{AB} = \begin{pmatrix} \bar{g}_{\mu\nu} & \bar{g}_{\mu 5} \\ \bar{g}_{5\nu} & \phi \end{pmatrix} \tag{9.1.10}$$

と書くことを提唱した．そして5次元の計量をマクスウェル場 A_μ と4次元の計量 $g_{\mu\nu}$ によって次のように定義する：

$$\begin{aligned} \bar{g}_{5\mu} &= \bar{g}_{\mu 5} = \kappa A_\mu \\ \bar{g}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} + \kappa^2 A_\mu A_\nu . \end{aligned} \tag{9.1.11}$$

今5番目の次元が巻いていて非常に小さな円になっているために，実験的に観測できないとしよう．つまり，5番目の次元を周期的とする：

$$x_5 = x_5 + 2\pi R. \tag{9.1.12}$$

すなわち，5番目の次元では距離 $2\pi R$ 進むと，出発点と同じ点にいたる．このように，もとの5次元リーマン型多様体は，

$$R_5 \to R_4 \times S_1 \tag{9.1.13}$$

によりわかれているとしよう．

ここで，5番目の次元は非常に小さいので観測できないと仮定しよう．したがって，

$$\partial_5 \to 0 \tag{9.1.14}$$

とおくことができる．この仮定により方程式は非常に簡単になる．たとえば，計量の変換はふつう

$$\delta \bar{g}_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu + \partial_\nu \Lambda_\mu + \cdots \tag{9.1.15}$$

で与えられる．5番目の次元の円周が小さいときは，

$$\delta \bar{g}_{5\mu} = \partial_\mu \Lambda_5 + \cdots \tag{9.1.16}$$

を得る．(9.1.11)を用いて書けば，これは

$$\delta A_\mu = \kappa^{-1} \partial_\mu \Lambda_5 \tag{9.1.17}$$

となる．これはまさにマクスウェルの場の U(1) ゲージ変換である．この U(1) 対称性をもち 2 つの微分しかもたない作用は 1 つしかないので，**5 次元のアインシュタイン理論は，4 次元の重力理論に結合したマクスウェル理論になる**ことが結論される．この近似で Christoffel 記号をいくつか具体的に計算してみよう：

$$\Gamma_{5\mu,\nu} = \frac{1}{2}\kappa(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \cdots = \frac{1}{2}\kappa F_{\mu\nu} + \cdots . \tag{9.1.18}$$

こうすれば，この近似で 5 次元のアインシュタイン理論を具体的に分解でき，

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2\kappa^2}\sqrt{-\bar{g}}R_{AB}\bar{g}^{AB} \\ &= -\frac{1}{2\kappa^2}\sqrt{-g}R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \cdots \end{aligned} \tag{9.1.19}$$

を得る．重力の 5 次元理論をコンパクト化すると，このように 4 次元空間に本当のマクスウェル場が現れてくるのである．

この結果を高次の多様体に一般化して，N 次元多様体から次元 P の小さなコンパクト化した多様体 K_P が同様にできるとしよう：

$$R_N \to R_{N-P} \times K_P. \tag{9.1.20}$$

この場合，この破れによって生じるゲージ群として直交群または SU(N) 群を導くことができる．このようにして，Yang-Mills 理論が高次元重力理論から現れることが示せるのである．

このカルーツァ-クライン理論は Yang-Mills と重力理論の両方を 1 つの美しい枠組みに統一するが，このアプローチにはカルーツァのもとの提唱のときからあった重大な欠点が 1 つある．すなわち，なぜ 5 番目の次元が突然巻き上がり小さなボールになったのか？ それが量子学的に巻き上がり，半径がプランク長のボールになるとクラインが示唆したことは重要なことであるが，それもどのようにして次元の破れが実際に起きたかという難しい問題には答えていない．われわれはまだ超弦理論においても，この 70 年以上も前に初めて出された問題に直面しているのである．

次に，弦理論の枠組みでコンパクト化の問題を考えよう [5]．弦理論は 26 または 10 次元から 4 次元へ落ちなければならない．まず開弦の i 番目の座標のコンパクト化を考えよう：

$$X^i(\sigma,\tau) = x^i + 2\alpha' p^i \tau + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}\alpha_n^i \cos n\sigma\, e^{-in\tau}. \tag{9.1.21}$$

前と同じく，i 番目の座標の周期性により運動量が整数 M_i 倍というように量子化される：

$$p^i = \frac{M_i}{R_i}. \tag{9.1.22}$$

ここで R_i は，i 番目のコンパクト化した座標の半径である．これは前と完全に同じである．一般には，コンパクト化した次元の半径は同じである必要はない．前のように，コンパクト化した次元の存在のために理論の質量スペクトラムがずれる．ハミルトニ

アンを分析することにより，質量が

$$\alpha' m^2 = \frac{\alpha'}{R^2} \sum_{i=1}^{10-D} M_i^2 + N \tag{9.1.23}$$

で与えられることがわかる．ここで，N は質量演算子

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{D} \alpha_{-n}^{i} \alpha_n{}^{i} \tag{9.1.24}$$

である．このように質量スペクトラムは，(9.1.9)のように整数 M_i の 2 乗だけずれているのである．

ところが閉弦の場合は，質量に余分の寄与がある．ゴムひもがシリンダーの管に巻き付くのと同じに，閉じた弦が i 番目の次元に N_i 回完全に巻き付くという余分の現象が生じるからである．重要なのは，この配位はハミルトニアンに新しい寄与をするが，点粒子のコンパクト化には対応するものがないことである．こうして，閉じた弦に対し，

$$X^i = x^i + 2\alpha' p^i \tau + 2N_i R\sigma + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^i e^{-2in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^i e^{-2in(\tau+\sigma)}) \tag{9.1.25}$$

を得る．ここでは 2 つの整数 M_i と N_i があり，それらは閉弦に対するコンパクト化の効果を表している．実は整数 N_i は，コンパクト化した次元のまわりに整数回巻き付いた弦のソリトン状態を記述しているのである．このソリトン状態は位相的に安定であることに注意しよう．

ずれた質量は

$$\frac{1}{2}\alpha' m^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10-D} (\alpha' M_i^2 / R^2 + R^2 N_i^2 / \alpha') + N + \tilde{N}$$

で与えられる．ここで，N と $\tilde{N}$ は閉じた弦の 2 つの異なる部分のエネルギー演算子である．

以上の議論では，$10-D$ 次元空間をトーラス上にコンパクト化した．しかしそれは現象論的には望ましいものではない．というのは，これでは $N=4$ 超対称性が残ってしまいカイラルフェルミオンがないからである．それでリー群の格子(付録を見よ)などの，もっと洗練された空間にコンパクト化する方が望ましい．そこでヘテロティック弦に移って，$E_8 \otimes E_8$ または Spin(32)/Z_2 の格子にコンパクト化することを考えることにする．

9.2 ヘテロティック弦

さて，今度は Gross, Harvey, Martinec, Rohm のヘテロティック弦 [6] を議論しよう．前の章で，アノーマリーの相殺のためには O(32) または $E_8 \otimes E_8$ が必要であることを見た．ところが Chan-Paton 因子では，例外群は出ないことも見た．したがっ

て $E_8 \otimes E_8$ のアイソスピン群を出すには，コンパクト化の方法を使わねばならない．

ヘテロティック弦は閉弦であり，左向きと右向きの部分のコンパクト化を別々にやっているというふつうと異なる特徴をもっている．左向きの部分は純粋にボソン的で，26 次元の弦のうち 16 次元が格子上にコンパクト化しているとしよう．（後でこの 16 次元の格子は，$E_8 \otimes E_8$ または $\mathrm{Spin}(32)/Z_2$ の格子にとる．）

一方，右向きの部分は超対称とする．すなわち，GS マヨラナ-ワイルフェルミオン場 $S^a(\tau-\sigma)$（ここで添字 a は，光錐ゲージで 1 から 8 まで動く）と時空の弦の場 X^i を含むとする．つまり，

左向き	右向き
$X^i(\tau+\sigma)$	$X^i(\tau-\sigma)$
$X^I(\tau+\sigma)$	$S^a(\tau-\sigma)$

ここで I は 16 次元格子の方向を示し，1 から 16 まで動く．i は時空の添字で，光錐ゲージで 1 から $10-2=8$ まで動く．

時空の座標 X^i は，左向きと右向きの両方に現れていることに注意しよう．以上をすべてまとめて，ヘテロティック弦の光錐での作用は

$$S=-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\tau\int_0^{\pi}d\sigma\left[\partial_a X^i\partial_a X^i+\sum_{I=1}^{16}\partial_a X^I\partial_a X^I+i\bar{S}\gamma^-(\partial_\tau+\partial_\sigma)S\right] \tag{9.2.1}$$

となる．この作用においていろいろな場がその正しい左向きや右向きの部分に入っているという制限を課しておかねばならない．すなわち，

$$\begin{aligned}&(\partial_\tau-\partial_\sigma)X^I=0\\&\gamma^+S=\frac{1}{2}(1+\gamma_{11})S=0\\&\gamma^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^0+\gamma^9)\end{aligned} \tag{9.2.2}$$

という制限を課す．この作用は，超対称変換

$$\begin{cases}\delta X^i=(p^+)^{-1/2}\bar{\varepsilon}\gamma^i S\\ \delta S^a=i(p^+)^{-1/2}\gamma_-\gamma_\mu(\partial_\tau-\partial_\sigma)X^\mu\varepsilon\end{cases} \tag{9.2.3}$$

の下で明らかに不変である．

さて，基準モードにより理論の場を展開しよう（スピノールの規格化を(3.8.8)から，少し変えていることに注意）：

$$
\begin{aligned}
X^i(\tau-\sigma) &= \frac{1}{2}x^i + \frac{1}{2}p^i(\tau-\sigma) + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^i}{n}e^{-2in(\tau-\sigma)} \\
X^i(\tau+\sigma) &= \frac{1}{2}x^i + \frac{1}{2}p^i(\tau+\sigma) + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\tilde{\alpha}_n^i}{n}e^{-2in(\tau+\sigma)} \\
S^a(\tau-\sigma) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a e^{-2in(\tau-\sigma)} \\
X^I(\tau+\sigma) &= x^I + p^I(\tau+\sigma) + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\tilde{\alpha}_n^I}{n}e^{-2in(\tau+\sigma)}.
\end{aligned}
\tag{9.2.4}
$$

同様に，作用から直接正準交換関係を読みとることができる．それから，さらにいろいろな振動子の間の正準交換関係が書き下せる：

$$
\begin{aligned}
[x^i, p^j] &= i\delta^{ij} \\
[\alpha_n^i, \alpha_m^j] &= [\tilde{\alpha}_n^i, \tilde{\alpha}_m^j] = n\delta_{n,-m}\delta^{ij} \\
[\alpha_n^i, \tilde{\alpha}_m^j] &= 0 \\
[\tilde{\alpha}_n^I, \tilde{\alpha}_m^J] &= n\delta_{n,-m}\delta^{IJ} \\
\left\{S_n^a, \bar{S}_m^b\right\} &= (\gamma^+ h)^{ab}\delta_{n,-m}.
\end{aligned}
\tag{9.2.5}
$$

ここで，h はカイラリティー射影演算子 $h = \frac{1}{2}(1+\gamma_{11})$ である．

（しかし，少々微妙な交換子が1つある．コンパクト化した自由度を左向きモードとしたことに注意しよう．それでこれらのモードの量子化の際には，この制限を考慮しなければならない．そうしないと理論の中に矛盾が生じるからである．幸いにこの制限による修正は，次のように正準交換関係に $\frac{1}{2}$ をかけることだけですむ：

$$
[x^I, p^J] = \frac{i}{2}\delta^{IJ}. \tag{9.2.6}
$$

ゲージ条件のディラック括弧の方法を用いるか，または新しく定義したこの交換子が制限と矛盾しないことを確かめることにより，この交換子が正しいことを具体的に確かめられる．）

次に，各部分の数演算子を定義しよう：

$$
\begin{aligned}
N &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_{-n}^i\alpha_n^i + \frac{1}{2}n\bar{S}_{-n}\gamma^- S_n\right) \\
\tilde{N} &= \sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{\alpha}_{-n}^i\tilde{\alpha}_n^i + \tilde{\alpha}_{-n}^I\tilde{\alpha}_n^I).
\end{aligned}
\tag{9.2.7}
$$

これは，両方の部分の振動子を次のように分類できることを意味する：

左向きモード	右向きモード
$\tilde{\alpha}^i$	α^i
$\tilde{\alpha}^I$	S^a
$\tilde{N}$	N

(9.2.8)

これらの定義を用いれば，前と同じように状態の質量が

$$\frac{1}{4}m^2 = N + (\tilde{N} - 1) + \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{16}(p^I)^2 \tag{9.2.9}$$

と書けることがわかる．

さらに，今は閉じた弦を考えていることから来る余分の制限が1つある．(2.8.7)のように，理論はσ空間の原点によってはならない．つまり，$U(\theta)$をσパラメーターにつきθだけ閉弦をまわす演算子とすれば，物理的状態は次の条件をみたさねばならない：

$$U(\theta)|\mathrm{phys}\rangle = |\mathrm{phys}\rangle. \tag{9.2.10}$$

ヘテロティック弦に対しては，回転の演算子は

$$U(\theta) = \exp\left\{2i\theta\left(N - \tilde{N} + 1 - \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{16}(p^I)^2\right)\right\} \tag{9.2.11}$$

である．この演算子がσの任意関数に作用すれば，変換

$$U(\theta)F(\sigma)U^{-1}(\theta) = F(\sigma + \theta) \tag{9.2.12}$$

を起こす．したがって物理的状態で$U(\theta) = 1$を保証するためには，次の条件をみたさねばならない：

$$N = \tilde{N} - 1 + \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{16}(p^I)^2. \tag{9.2.13}$$

今までは16次元格子に何の構造も考えなかった．理論を決めるために，この空間を

$$T^{16} = \frac{R^{16}}{\Lambda} \tag{9.2.14}$$

にとってみる．ここでΛは16次元の，まだ決まっていない格子を表している．

この16次元格子を，基底ベクトル

$$e_i^I \tag{9.2.15}$$

で張ろう．16次元空間を格子にコンパクト化するということは，1つの格子ベクトルで決まる方向に動けば，いつかは同じ点に来るということである．そこでこの基底を用いて，弦の重心座標がこれらの基底ベクトルのどれにそっても周期的であるようにしよう．すなわち，

$$\begin{aligned} X^I &= X^I + 2\pi L^I \\ L^I &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{16} n_i e_i^I R_i. \end{aligned} \tag{9.2.16}$$

ここで，n_iは整数，R_iはいろいろなコンパクト化した次元の半径である．つまり基底ベクトルで決まっているどの方向に動いても，もとの点に帰ってくるのである．これは運動量に自明でない制限を与える．すなわち，ふつうの量子力学から$2p^I$がI方向の並進の生成子であることがわかっているので，それが周期的であるということは，

次の並進の演算子が状態に作用したとき固有値 1 をもたねばならないことを意味している：

$$e^{2\pi i p^I \cdot L^I} = 1. \tag{9.2.17}$$

この演算子は単に(9.2.16)の並進を生成し，I 番目方向のトーラスのまわりにちょうど 1 回転動き，もとの点にもどってくるのである．

したがって，正準運動量は

$$p^I = \sqrt{2} \sum_{i=1}^{16} m_i e_i^{*I} / R_i \tag{9.2.18}$$

と定義しなければならない．ここで m は整数で，e^* は**双対格子**(dual lattice) Λ^* を

$$\delta_{ij} = \sum_{I=1}^{D} e_i^I e_j^{*I} \tag{9.2.19}$$

となるようなものとして定義している．

ここで，理論をコンパクト化する格子はまったく任意というわけではないことを述べねばならない．まず第 1 に，ヒルベルト空間が σ の原点によらないという制限(9.2.13)のために，それは**偶格子**(even lattice)でなければならない．(9.2.11)の $U(\theta)$ 演算子は，$\frac{1}{2}(p^I)^2 =$ 整数のときだけ，フォック空間で 1 に等しくなり得ることに注意しよう．すなわち，

$$(p^I)^2 = \text{偶数} \tag{9.2.20}$$

となる．したがって，巻き付き数 L^I は整数の偶格子上になければならないのである．

リー群に対応する格子の計量テンソルは，

$$g_{ij} = \sum_{I=1}^{16} e_i^I e_j^I \tag{9.2.21}$$

と定義される．したがって計量は整数値でなければならず，g_{ij} は偶数であることがわかる．第 2 に，格子は**自己双対**(self-dual)でなければならない(すなわち，格子ベクトルが双対格子上のベクトルと等しい)．これは，モジュラー不変性のためであり，9.6 節で 1 ループ図を議論するときにもっと詳しく述べる．偶の自己双対格子は非常に少ない．まずそれらは $8n$ 次元にしか存在しない．8 次元では 1 つしかなく，それは E_8 のルート格子 Γ_8 である．16 次元では，2 つだけあって，

$$\Gamma_8 \times \Gamma_8; \quad \Gamma_{16} \tag{9.2.22}$$

である．このために，格子は $E_8 \otimes E_8$ または $\mathrm{Spin}(32)/Z$ のいずれかのものに決まってしまう．このように，実はゲージ群の取り方は非常に限られているのである．

E_8 の計量は，次の通りである：

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & -1 \\ & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & -1 & 2 & \\ & & & & -1 & & & 2 \end{pmatrix}. \tag{9.2.23}$$

E_8 のルート格子を記述するには，何通りかの方法がある．もっとも簡単なやり方は次のものである：

$$\pm \boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_i; \quad 1 \leq i \neq j \leq 7 \tag{9.2.24}$$

で与えられる 84 個のルートベクトルと

$$\frac{1}{2}(\pm \boldsymbol{e}_1 \pm \boldsymbol{e}_2 \pm \boldsymbol{e}_3 \pm \cdots \pm \boldsymbol{e}_8) \tag{9.2.25}$$

で与えられる 128 個のルートベクトルと

$$\pm \boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_8 \tag{9.2.26}$$

で与えられる 28 個のベクトルを考える．これらはカルタン部分代数の 8 つの成分と合わせて全体で 248 個の生成子を作り，この群の随伴表現をなしている．

この章の後の方で，Simply laced 群，すなわち同じ長さのルートをもつ群という概念も用いる．Simply laced 群は A, D, E の型の群である（付録を見よ）．

ヘテロティック弦で出合うリー群の種類を，簡単にまとめておこう：

格子	ルート
偶	$(p^I)^2 =$ 偶；$(g_{ij} =$ 偶$)$
自己双対	$\Lambda = \Lambda^*$；$(\det g_{ij} = 1)$
Simply laced	同じ長さ；(A, D, E)

これらの格子は，$U(\theta) = 1$ の条件により偶格子でなければならず，(9.6 節で見るように) モジュラー不変性のために自己双対格子でなければならないので重要である：

$$U(\theta) = 1 \rightarrow \text{偶格子}$$
$$\text{モジュラー不変性} \rightarrow \text{自己双対格子}.$$

16 次元では，偶の自己双対格子は $E_8 \otimes E_8$ と Spin(32)/Z のルート格子だけである．

9.3　スペクトラム

さて，理論のスペクトラムを調べよう．まず理論の中の右向き部分は，明らかに時空の超対称性をもつことに注意する．時空の超対称性の生成子は，場の変換から容易に構成できる．前の章で見たように，これにより対称性に付随したカレントを構成で

きるのである．前に(3.8.22)で，光錐の超対称な演算子は，

$$Q^a = i\sqrt{p^+}(\gamma^+ S_0)^a + 2i(p^+)^{-1/2}\sum_n (\gamma_i S_{-n})^a \alpha_n^i \tag{9.3.1}$$

と書けることを見た．これは右向き部分に作用する．そして正準交換関係が与えられているので，容易に

$$\{Q^a, Q^b\} = -2(h\gamma^\mu P_\mu)^{ab} \tag{9.3.2}$$

を示すことができる．

左向き部分を分析するために，アイソスピンがChan-Paton因子とはまったく異なるやり方で導入されていることに注意しよう．ふつうのChan-Paton因子は一連の生成子のトレースが振幅にかかるだけであるのに対し，コンパクト化の過程から現れるアイソスピン因子 I は調和振動子自身についているので，それがフォック空間の許される状態の数を，非常に大きくすることに注意しよう．

一般に，2つの部分は互いに交換しないので，ヘテロティック弦のフォック空間の要素は，左と右向き部分の積になる：

$$|0\rangle_R \times |0\rangle_L. \tag{9.3.3}$$

まず右向き部分を最低次で調べよう．前の(3.8.13)と(3.8.14)のように，超弦の8つのフェルミオン的 $|a\rangle$ またはボソン的 $|i\rangle$ 基底状態は，互いに表せる：

$$\begin{aligned} |a\rangle_R &= \frac{i}{8}(\gamma_i S_0)^a |i\rangle_R \\ |i\rangle_R &= \frac{i}{16}[\bar{S}_0\{\gamma_i, \gamma_+\}]^a |a\rangle_R. \end{aligned} \tag{9.3.4}$$

このように，右向きの質量のない部分には，全部で $8+8=16$ の状態がある．

次に，左向き部分を調べよう．ここでは，

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{-1}^j |0\rangle_L &\to 8 \text{ 状態} \\ \tilde{\alpha}_{-1}^I |0\rangle_L &\to 16 \text{ 状態} \\ |p^I; (p^I)^2 = 2\rangle_L &\to 480 \text{ 状態} \end{aligned} \tag{9.3.5}$$

がある．

(スペクトラムのこの特定の表現が，明白な $E_8 \otimes E_8$ の対称性を破っていることが非常に重要である．これを見るには，16個の α^I 演算子があり，それが群のルート格子の次元に対応するが，これらの16個の演算子は群の表現を作っていないことに注意する．同様に，ベクトル $|p^I; (p^I)^2 = 2\rangle$ は長さ2の480個のルートに対応する．しかしこれも群の表現を作らない．16と480を加えて496個の状態を作って初めて，群の随伴表現を作るのである．質量のあるレベルでも，状態を組み合わせて $E_8 \otimes E_8$ の状態を作れるが，高い質量レベルではそれがどんどん難しくなる．そこで後でKac-Moody代数に基づく議論を与え，どのようにして全体のスペクトラムが $E_8 \otimes E_8$ 対称になるかを示す.)

質量0のレベルでは，右向きと左向き部分をかけてスペクトラムを得る．ヘテロティッ

ク弦の最低レベルの状態の全部の数は，左と右向き部分の積により $16 \times 504 = 8064$ 状態となる．これらの状態の分解は次のようになる．8064 状態のうち，128 状態は $N = 1, D = 10$ 超重力(光錐ゲージ)に属すことがわかる：

$$\text{超重力} \rightarrow \tilde{\alpha}^i_{-1}|0\rangle_L \times |i \text{ または } a\rangle_R. \tag{9.3.6}$$

これを異なる状態にわけると，

$$\begin{aligned} \text{グラビトン} &\rightarrow \tilde{\alpha}^i_{-1}|0\rangle_L \times |j\rangle_R + (i \leftrightarrow j) \\ \text{反対称テンソル} &\rightarrow \tilde{\alpha}^i_{-1}|0\rangle_L \times |j\rangle_R - (i \leftrightarrow j) \\ \text{グラビティーノ} &\rightarrow \tilde{\alpha}^i_{-1}|0\rangle_L \times |a\rangle_R \end{aligned} \tag{9.3.7}$$

となる．

他の状態は，$E_8 \otimes E_8$ で定義される超 Yallg-Mills 理論に入る．たとえば，超 Yang-Mills 多重項 (A^a_μ, ψ^a) は，群の随伴表現に入り 496 状態がある．これらの 496 個の同レベル状態は，左向き部分に含まれている $480 + 16$ 状態で与えられる：

$$\tilde{\alpha}^I_{-1}|0\rangle_L + |p^I; (p^I)^2 = 2\rangle_L. \tag{9.3.8}$$

右向き部分をかけて超 Yang-Mills 状態多重項は，496×8 状態として表される：

$$\text{超 Yang-Mills} \rightarrow \left[\tilde{\alpha}^I_{-1}|0\rangle_L + |p^I\rangle_L\right] \times |i \text{ または } a\rangle_R. \tag{9.3.9}$$

まとめると $m^2 = 0$ では，ちょうど 10 次元超重力と Yang-Mills 場が得られる．

ここで群の既約表現を作るには，$480 + 16$ を組み合わせねばならなかったことに注意しよう．つまり一般に，ヘテロティック弦のフォック空間は，$E_8 \otimes E_8$ の多重項に明白に組んでいないのである．たとえば次のレベルでは，状態が代数の既約表現をなすことは計算の最後の段階になってからわかるのである．

次のレベルは $m^2 = 8$ で，右向き部分に対しては 128 ボソンと 128 フェルミオンがある：

$$\begin{aligned} 128\ \text{ボソン}: &\begin{cases} \alpha^i_{-1}|j\rangle_R \\ S^a_{-1}|b\rangle_R, \end{cases} \\ 128\ \text{フェルミオン}: &\begin{cases} \alpha^i_{-1}|a\rangle_R \\ S^a_{-1}|i\rangle_R. \end{cases} \end{aligned} \tag{9.3.10}$$

上の式では，2 つのフェルミオンのテンソル積でボソンを作っていることに注意しよう．

左向きの部分はかなり複雑で，全部で 73,764 状態を含む．したがって，全体で $256 \times 73,764 = 18,883,584$ 状態がある！ スカラー状態は，

$$\text{スカラー}: \begin{cases} |p^I, (p^I)^2 = 4\rangle_L & \rightarrow 61,920\ \text{状態} \\ \tilde{\alpha}^I_{-1}|p^J, (p^J)^2 = 2\rangle_L & \rightarrow 7,680\ \text{状態} \\ \tilde{\alpha}^I_{-1}\tilde{\alpha}^J_{-1}|0\rangle_L & \rightarrow 136\ \text{状態} \\ \tilde{\alpha}^I_{-2}|0\rangle_L & \rightarrow 16\ \text{状態} \end{cases} \tag{9.3.11}$$

で，全体で 69,752 状態ある．($|p^I, (p^I)^2 = 4\rangle$ の中の状態を数える際に，格子 Γ_{16} 上の長さ 2 乗が $2m$ (m は整数)に等しい点の数が，m の約数の 7 乗の和に 480 をかけたものになることを使った．したがってこの状態に対し，$480(1+2^7) = 61,920$ 状態がある [6].)

最初は，これらの 69,752 のスカラー状態が $E_8 \otimes E_8$ 多重項にわけられることは，全然明らかなことではない．ところが注意深く分析すれば，それらが次の $E_8 \otimes E_8$ 多重項にわかれることがわかる：

$$(\mathbf{3875}, \mathbf{1})+(\mathbf{1}, \mathbf{3875})+(\mathbf{248}, \mathbf{248})+(\mathbf{248}, \mathbf{1})+(\mathbf{1}, \mathbf{248})+(\mathbf{1}, \mathbf{1})+(\mathbf{1}, \mathbf{1}). \tag{9.3.12}$$

左向き部分の 3976 個のベクトルは，

$$\text{ベクトル} \to \begin{cases} \tilde{\alpha}^i_{-1}|p^I, (p^I)^2 = 2\rangle_L & \to 3840 \text{ 状態} \\ \tilde{\alpha}^i_{-2}|0\rangle_L & \to 8 \text{ 状態} \\ \tilde{\alpha}^i_{-1}\alpha^I_{-1}|0\rangle_L & \to 128 \text{ 状態} \end{cases} \tag{9.3.13}$$

と分類され，またテンソル状態

$$\tilde{\alpha}^i_{-1}\tilde{\alpha}^j_{-1}|0\rangle_L \to 36 \text{ 状態} \tag{9.3.14}$$

もある．したがって，左向き部分の状態の数は 73,764 となる．

高次のレベルでは，縮退は指数的に

$$d(M) \sim e^{(2+\sqrt{2})\pi\sqrt{\alpha'}M} \tag{9.3.15}$$

と増える．

これらの状態が $E_8 \otimes E_8$ 多重項に，再分類できることは明らかではなかった．高次のレベルでは，高い質量のものがすべて群の既約表現に再分配できることを示すのはとても絶望的な課題と思われる．これをすべてのレベルで証明するために必要なものは，もちろん高い対称性である．これは 9.7 節で Kac-Moody 代数を適用するときにやることにする．

9.4 共変的およびフェルミオン的定式化

今までヘテロティック弦のスペクトラムを光錐ゲージで分析したが，明白に共変的な第 1 量子化の作用も書くことができる．まず，右向き超対称部分を共変的な形に書こう．P_μ と Q^α が超ポアンカレ群の 2 つの生成子を表すとする．そして x 方向の並進を与える演算子を一般化しよう．超並進の群の要素は

$$h = e^{iX\cdot P + i\theta Q} \tag{9.4.1}$$

で与えられる．ここで θ は 10 次元のスピノールである．この演算子は，座標の関数を X だけずらしフェルミオン的座標を θ だけずらす．ここで

$$\Pi_\alpha = h^{-1}\partial_\alpha h = (\partial_\alpha X^\mu - i\bar{\theta}\gamma^\mu\partial_\alpha\theta)P_\mu + \partial_\alpha\theta Q \tag{9.4.2}$$

$(\alpha=1,2)$を構成する．さて，右向きGS作用は，

$$S_R=\int d^2z\frac{1}{2}\,e\,\mathrm{Tr}(\Pi_\alpha\Pi_\beta)e_a^\alpha e^{a\beta}+\int d^3\xi\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\mathrm{Tr}(\Pi_\alpha\Pi_\beta\Pi_\gamma)+\int d^2z\,e\,\lambda^{++}(e_+^\alpha\Pi_\alpha)^2 \tag{9.4.3}$$

と書ける．右辺の第1項は，GS作用のいつもの2次の項である．第2項は，Wess-Zumino項として書かれたGS作用の非線形項である．これは境界が弦の世界と一致する体積についての3次元積分である．これら2つの項の和が，GS作用のもう1つの形を与えているのである．作用の第3項は，単に右向きの制限を課している．

左向きの作用も同様に共変的に書けるが，**フェルミオンかボソン**のどちらかを用いることができる．リー群の理論から，代数の生成子はボソンまたはフェルミオン場の積によって書けることがわかっているからである．したがって，

$$S_L=\frac{i}{2}\int d^2ze\,\psi^I\partial_\alpha\psi^Ie_+^\alpha \tag{9.4.4}$$

を得る．ここでは$I=1,\ldots,32$で，SO(32)の基本表現を表す．重要なのは，これらのフェルミオンがローレンツスカラーとして変換することである．添字Iは内的な添字なのである．もちろんこれらのフェルミオン振動子に，Ramond（周期的）またはNeveu-Schwarz（反周期的）境界条件のいずれかをとることができる．

ボソンによる表現に対しては，同じ左向き部分を

$$S_L=\int d^2z\frac{1}{2}e(e_a^\alpha\partial_\alpha X^I)^2+e\lambda^{--}(e_-^\alpha\partial_\alpha X^I)^2 \tag{9.4.5}$$

と表せる．ここで$I=1$から16である．これはもちろん，ローレンツ共変性を破って前に用いた光錐表示を出すようにできる．（最初は，左と右の部分が$\pm$で分類されるのは奇妙に見える．というのはこれは2次元で，ローレンツ不変でない方向をとり出しているように見えるからである．しかし，$\pm$方向は接空間に入っているので，上の定式化はやはりパラメーターつけかえ不変である．つまり，2次元パラメーターつけかえ不変性は破れていないのである．）

さて，左と右向き部分を含む全体の時空の作用（引くアイソスピン部分）を共変的に書こう：

$$S=\int d^2z\,e\left\{\frac{1}{2}(e_a^\alpha\partial_\alpha X^\mu)^2-\frac{i}{2}\psi^\mu\rho^-e_-^\alpha\partial_\alpha\psi_\mu+\frac{i}{2}(\chi_\alpha\rho^\beta\rho^\alpha\psi^\mu)\partial_\beta X_\mu\right\}. \tag{9.4.6}$$

この作用は，「$N=\frac{1}{2}$」超対称性

$$\begin{aligned}\delta e_-^\alpha&=i\varepsilon\rho_-\xi^\alpha\\ \delta\chi_\alpha&=-2\nabla_\alpha\varepsilon\\ \delta X^\mu&=i\varepsilon\psi^\mu\\ \delta\psi^\mu&=[\partial_\alpha X^\mu+i\chi_\alpha\psi^\mu\rho^\alpha]\varepsilon\end{aligned} \tag{9.4.7}$$

をもつ．さて，光錐ゲージをとるかわりに共形ゲージをとろう．するとヘテロティック弦の作用は

$$S = \frac{1}{2}\int d^2z[(\partial_\alpha X^\mu)^2 + i\psi^\mu\rho^-\partial_-\psi_\mu + i\psi^I\rho^+\partial_+\psi^I] \tag{9.4.8}$$

となる．

以上の重要な点は，ヘテロティック弦の共変な作用が存在し，場のアイソスピン部分を表すのに，フェルミオンかボソン場のどちらでも使えることを示すことであった．ボソン場による光錐定式化に限定されているわけではないのである．

しかし共変的に書いても，ヘテロティック弦は少々不格好で人工的に見えることに注意すべきである．多分将来，理論のより美しい定式化ができるようになるであろう．

9.5 樹木

ヘテロティック弦の樹木図は，光錐の超弦で構成したのとほとんど同じに構成される．ただし，今は頂点が左と右向きの成分をもっており，また 16 次元格子へのコンパクト化も考慮に入れなければならない．

超重力多重項を記述するために，スピノール場を表すスピン 3/2 場 $U^{\mu a}$ と，グラビトンの偏極テンソルを表す $\rho^{\mu\nu}$ を導入する．質量殻条件をみたす光錐ゲージでは，外線粒子が質量をもたず横成分だけをもつようにとる：

$$\begin{aligned} &\rho^{+\mu} = \rho^{\mu+} = k_\mu\rho^{\mu\nu} = 0 \\ &U^{+a} = k_\mu U^{\mu a} = \gamma^+ U^{\mu a} = \frac{1}{2}(1-\gamma_{11})U^{\mu a} = 0. \end{aligned} \tag{9.5.1}$$

第 3 章で展開した超弦の光錐頂点との類推によれば，(3.9.2) の頂点に類似したヘテロティック弦の頂点関数を構成できる．けれどももっとローレンツの添字を出すために，余分の ρ^μ を挿入する必要がある．さらに頂点は**左向きと右向きモードの頂点の直積**である．ここで超重力部分のボソンとフェルミオン放出頂点を次のようにとろう：

$$\text{超重力：}\begin{cases} V_B = \rho_{\mu\nu}(k)\int_0^\pi d\sigma B^\mu \tilde{P}^\nu e^{ik\cdot X} \\ V_F = \int_0^\pi d\sigma\, F^a \tilde{P}_\nu U^{a\nu}(k) e^{ik\cdot X}. \end{cases} \tag{9.5.2}$$

ここで，(3.9.6) の定義を用いた：

$$\begin{aligned} &k^+ = 0 \\ &B^i = P^i + \frac{1}{2}k^i R^{ij} \\ &P^i = \frac{dX^i}{d(\tau-\sigma)} = \frac{1}{2}p^i + \sum_{n\neq 0}\alpha_n^i e^{-2in(\tau-\sigma)} \\ &R^{ij} = \frac{1}{8}\bar{S}\gamma^{ij-}S \\ &\bar{F}^a = \frac{i}{2}(p^+)^{-1/2}\left[\bar{S}\gamma\cdot P - \frac{1}{6} : R^{ij}k^i\bar{S}\gamma^j :\right]^a \\ &\tilde{P}^i = \frac{1}{2}p^i + \sum_{n\neq 0}\tilde{\alpha}_n^i e^{-2in(\tau+\sigma)}. \end{aligned} \tag{9.5.3}$$

(すべての k^+ が 0 になる系をとって，非常に簡単化していることに注意しよう．0 でない k^+ に対する計算は，破れているローレンツ生成子 M^{-i} でローレンツ変換する必要があるので，実はとても複雑になる.)

また，ゲージボソンに対する頂点も書ける．しかし 1 つ面倒なことは，ゲージ群の随伴表現の 496 個のベクトルボソンが，カルタン部分代数の一員として変換する 16 個の「中性」ゲージボソンと，$(K^I)^2 = 2$ の K^I に対応する 480 個の「荷電」ボソンにわけられることである．その中性のものは，

$$|i\rangle_R \times \tilde{\alpha}^I_{-1}|0\rangle_L \tag{9.5.4}$$

で定義され，帯電しているものは

$$|i\rangle_R \times |K^I; (K^I)^2 = 2\rangle_L \tag{9.5.5}$$

で与えられる．したがってゲージボソンには 2 種類の頂点が必要である．中性ゲージボソンの頂点は本質的に前のと同じである．ただしローレンツ添字を内部空間のものにする必要がある：

$$\text{中性ゲージボソン：}\begin{cases} V^I_B = \rho^I_\mu(k) \int_0^\pi d\sigma\, B^\mu \hat{P}^I e^{ik_\mu X^\mu} \\ V^I_F = \int_0^\pi d\sigma\, F^a \hat{P}^I U^{aI}(k) e^{ik_\mu X^\mu}. \end{cases} \tag{9.5.6}$$

ここで，

$$\hat{P}^I = \frac{dX^I}{d(\tau+\sigma)} = p^I + \sum_{n\neq 0} \tilde{\alpha}^I_n e^{-2in(\tau+\sigma)}$$

である．同様に荷電ゲージ粒子の放出の頂点は，内部運動量 K^I の関数で

$$\text{荷電ゲージボソン：}\begin{cases} V^K_B = \rho_\mu(k) \int_0^\pi d\sigma\, B^\mu e^{ik_\mu X^\mu} : e^{2iK^I X^I} : C(K) \\ V^K_F = \int_0^\pi d\sigma\, F^a U^a(k) e^{ik_\mu X^\mu} : e^{2iK^I X^I} : C(K). \end{cases} \tag{9.5.7}$$

ここで，頂点の正規順序部分は左向き部分に由来し，C は後で定義するものである．

頂点関数の正しい形を得ていることを確かめる 1 つの方法は，これに超対称性の演算子(9.3.1)を具体的に作用させて，ボソンの頂点がフェルミオンの頂点に変わり，逆も正しいことを証明することである．しかし，3.9 節で与えた証明にそった証明はかなり複雑なので与えないことにする．

また系の伝播関数も，閉弦の伝播関数を一般化して容易に見つけられる．けれども，頂点関数の σ と τ 依存性を吸収して，それを伝播関数につけるのが便利であることがわかる．これはいつでも可能である．なぜなら，すでに見たように σ のずらしの行列は $U(\sigma)$ で与えられ，τ のずらしの演算子は光錐のハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2}p^2 + 2N + 2(\tilde{N} - 1) + \sum_{I=1}^{16} (p^I)^2 \tag{9.5.8}$$

で生成されるからである．それを取り出す前には，頂点関数は，

$$V(k,\tau) = e^{iH\tau}\int_0^\pi d\sigma\, U(\sigma)\tilde{V}_0 U^\dagger(\sigma)e^{-iH\tau}$$

である．われわれの欲しい頂点関数は，

$$\tilde{V}_0 = \tilde{V}(\tau = \sigma = 0) \tag{9.5.9}$$

である．そして伝播関数は，今は σ と τ 積分を吸収しており，

$$\begin{aligned}\Delta &= \int_0^\infty d\tau \int_0^\pi \frac{d\sigma}{\pi} e^{-H\tau}U(\sigma)\\ &= \int_{|z|<1} d^2z|z|^{p^2/4-2}z^N\bar{z}^{\tilde{N}-1+(1/2)\sum_I (p^I)^2}\\ &= \frac{1}{H}\delta\left(N-\tilde{N}+1-\frac{1}{2}\sum_I (p^I)^2\right)\end{aligned} \tag{9.5.10}$$

となる．上の伝播関数はちょうど予想されるものである．つまりデルタ関数は，状態を σ の回転によらなくする制限(9.2.13)を課し，極は光錐のハミルトニアンの逆になっている．

したがって N 点関数は

$$\langle 0,k_1|\tilde{V}(k_2)\Delta\cdots\Delta\tilde{V}(k_{N-1})|0,k_N\rangle \tag{9.5.11}$$

と書ける．

ここで，運動量 k_i，偏極 ρ_i，チャージ K_i をもつ 4 つの質量 0 のゲージボソンの散乱振幅を構成しよう．ただし，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 k_i^\mu &= 0\\ \sum_{i=1}^4 K_i &= 0\\ K_i^2 &= 0\end{aligned} \tag{9.5.12}$$

である．4 点関数の計算は長いが容易にできる：

$$A_4 = g^2K(\rho_i,k_i)\varepsilon\frac{\Gamma\left(-1+\frac{u}{8}+\frac{U}{2}\right)\Gamma\left(-1+\frac{s}{8}+\frac{S}{2}\right)\Gamma\left(-1+\frac{t}{8}+\frac{T}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{u}{8}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{8}\right)\Gamma\left(1-\frac{t}{8}\right)}. \tag{9.5.13}$$

ここで，

$$\begin{aligned}K =& -\frac{1}{4}[st\rho_1\cdot\rho_3\rho_2\cdot\rho_4 + su\rho_2\cdot\rho_3\rho_1\cdot\rho_4 + tu\rho_1\cdot\rho_2\rho_3\cdot\rho_4] \\ & -\frac{1}{2}s[\rho_1\cdot k_4\rho_3\cdot k_2\rho_2\cdot\rho_4 + \rho_2\cdot k_3\rho_4\cdot k_1\rho_1\cdot\rho_3 \\ & \quad + \rho_1\cdot k_3\rho_4\cdot k_2\rho_2\cdot\rho_3 + \rho_2\cdot k_4\rho_3\cdot k_1\rho_1\cdot\rho_4] \\ & -\frac{1}{2}t[\rho_2\cdot k_1\rho_4\cdot k_2\rho_3\cdot\rho_1 + \rho_3\cdot k_4\rho_1\cdot k_2\rho_2\cdot\rho_4 \\ & \quad + \rho_2\cdot k_4\rho_1\cdot k_3\rho_3\cdot\rho_4 + \rho_3\cdot k_1\rho_4\cdot k_2\rho_2\cdot\rho_1] \\ & -\frac{1}{2}u[\rho_1\cdot k_2\rho_4\cdot k_3\rho_3\cdot\rho_2 + \rho_3\cdot k_4\rho_2\cdot k_1\rho_1\cdot\rho_4 \\ & \quad + \rho_1\cdot k_4\rho_2\cdot k_3\rho_3\cdot\rho_4 + \rho_3\cdot k_2\rho_4\cdot k_1\rho_1\cdot\rho_2]\end{aligned} \tag{9.5.14}$$

であり，ε は位相因子，さらに

$$\begin{aligned}& s = -(k_1+k_2)^2; \quad t = -(k_2+k_3)^2; \quad u = -(k_1+k_3)^2 \\ & s+t+u = 0 \\ & S = (K_1+K_2)^2; \quad T = (K_2+K_3)^2; \quad U = (K_1+K_3)^2 \\ & S+T+U = 8\end{aligned} \tag{9.5.15}$$

である．

9.6　1ループ振幅

しかしながら，理論の本当の検証は1ループ図の計算［6, 7］であり，そこで理論が有限になることを要求しよう．1ループ図を，これらの頂点と伝播関数によって書き下すことは今や容易なことである：

$$A_{\text{loop}} = \text{Tr}[\Delta V(N)\Delta\cdots\Delta V(1)]. \tag{9.6.1}$$

ここでは荷電ゲージボソンの散乱を考えている．

再び，トレースの計算は長いが容易にできる．トレースをとった後，

$$\begin{aligned}A_{\text{loop}} =& \bar{\varepsilon}K\int\prod_{i=1}^{4}d^2z_i|w|^{-2}\left[\frac{-4\pi}{\ln|w|}\right]^5\bar{w}^{-1}f(\bar{w})^{-24} \\ & \times\prod_{1\le i<j\le 4}[\chi(c_{ji},w)]^{(1/2)k_i\cdot k_j}[\psi(\bar{c}_{ji},\bar{w})]^{K_i\cdot K_j}L\end{aligned} \tag{9.6.2}$$

を得る．ここで，

$$\chi(z,w)=\exp\left[\frac{\ln^2|z|}{2\ln|w|}\right]\left|\frac{1-z}{\sqrt{z}}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{(1-w^m z)(1-w^m/z)}{(1-w^m)^2}\right| \tag{9.6.3}$$

$$\psi(\bar{z},\bar{w})=\exp\left[\frac{\ln^2\bar{z}}{2\ln\bar{w}}\right]\frac{1-\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}}}\prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(1-\bar{w}^m\bar{z})(1-\bar{w}^m/\bar{z})}{(1-\bar{w}^m)^2}\right) \tag{9.6.4}$$

$$L(\bar{w},\bar{z}_i,K_i)=\sum_{P\in\Lambda}\exp\left[\frac{1}{2}\ln\bar{w}\left(P-\sum_{i=1}^{4}\frac{\ln\bar{z}_i}{\ln\bar{w}}Q_i\right)^2\right] \tag{9.6.5}$$

であり，また，

$$Q_i=\sum_{j=1}^{i-1}K_j;\quad \nu_i=\sum_{j=1}^{i}\frac{\ln z_j}{2\pi i};\quad \tau=\frac{\ln w}{2\pi i};\quad c_{ji}=z_{i+1}\cdots z_j \tag{9.6.6}$$

である．ここの $P\in\Lambda$ についての和は，格子のすべての点についての和を表し，K は (9.5.14) の樹木で得たのと同じ運動学的因子である．最後の結果は，1 ループ超弦振幅に非常に似ているので，振幅が

$$\begin{cases}\nu_i\to\nu_i+1\\ \nu_i\to\nu_i+\tau\end{cases} \tag{9.6.7}$$

の下で不変であることは容易に示せる．もう少し難しいのは，積分が $\tau\to\tau+1$ と $\tau\to-\tau^{-1}$ の下で不変であることで，これはモジュラー不変性を証明するのに必要である．

幸い積分の大部分の項は，(5.5.1) の 1 ループ振幅で得たのと同じものになっている．けれども異なる項，すなわち格子に依存する因子の不変性を確かめねばならない．

前と同じく，Θ 関数はその変数にモジュラー変換をすれば，次のように変換する：

$$\Theta_1\left(\frac{\bar{\nu}}{c\bar{\tau}+d}\,\middle|\,\frac{a\bar{\tau}+b}{c\bar{\tau}+d}\right)=\varepsilon(c\bar{\tau}+d)^{1/2}\exp\left(\frac{-i\pi c\bar{\nu}^2}{c\bar{\tau}+d}\right)\Theta_1(\bar{\nu}|\bar{\tau}). \tag{9.6.8}$$

ここで $\varepsilon^8=1$ である．χ 関数は Θ 関数によって書け

$$\chi\left(\frac{\nu}{c\tau+d}\,\middle|\,\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\frac{1}{|c\tau+d|}\chi(\nu|\tau)$$

を得る．分配関数 $f(w)$ も

$$\begin{gathered}f(w)=(i/\tau)^{1/2}w^{-1/2}w'^{1/24}f(w')\\ \tau=\frac{\ln w}{2\pi i}\to\frac{-1}{\tau}=\frac{-2\pi i}{\ln w'}\end{gathered} \tag{9.6.9}$$

と変換する．もっとも重要な変換は，L のものである：

$$L(\bar{w},\bar{z}_i,K_i)$$
$$=\left(\frac{-2\pi}{\ln\bar{w}}\right)^8\sum_{P\in\Lambda}\exp\left[\frac{2\pi^2}{\ln\bar{w}}\left(P-\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i\ln\bar{z}_i}{2\pi i}\right)^2+\frac{1}{2\ln\bar{w}}\left(\sum_{i=1}^{N}Q_i\ln\bar{z}_i\right)^2\right]. \tag{9.6.10}$$

最後の等式は格子が**自己双対**であることに決定的に依存しており，これが格子に対する制限を要求するおそらくもっとも強力な議論の1つであろう．これらの要素を一緒にすると，

$$\begin{aligned}
&\bar{w}^{-1} f(\bar{w})^{-24} \prod_{1\le i\le j\le 4} \psi(\bar{\nu}_{ji}|\tau)^{K_i\cdot K_j} L(\tau,\nu_i) \\
&\quad \to (\bar{w}')^{-1} f(\bar{w}')^{-24} \bar{\tau}^{12} \left[\prod_{1\le i\le j\le 4} \psi\left(\frac{-\bar{\nu}_{ij}}{\bar{\tau}} \,\middle|\, \frac{-1}{\bar{\tau}} \right) \bar{\tau} \exp\left(\frac{i\pi \bar{\nu}_{ij}^2}{\bar{\tau}} \right) \right]^{K_i\cdot K_j} \\
&\qquad \times L\left(\frac{-1}{\bar{\tau}}, \frac{-\nu_i}{\bar{\tau}} \right) (\bar{\tau})^{-8} \exp\left(-\frac{i\pi}{\bar{\tau}} \left(\sum_{i=1}^{4} Q_i \bar{\nu}_i \right)^2 \right).
\end{aligned} \tag{9.6.11}$$

(9.6.11)には，明らかにモジュラー不変性を破るように見える項が2つある．それは，$\bar{\tau}$ のいろいろな因子と，$\bar{\tau}$ を含む指数である．幸い両方とも0になる．まず，$\bar{\tau}$ の因子が消えるのは，

$$\prod_{1\le i\le j\le 4} \bar{\tau}^{K_i\cdot K_j} = \bar{\tau}^{-4}$$

だからである．これにより $\bar{\tau}^{12-4-8} = 1$ となる．指数因子も，

$$\prod_{1\le i\le j\le 4} \bar{\nu}_{ij}^2 K_i \cdot K_j = \left(\sum_{i=1}^{4} Q_i \bar{\nu}_i \right)^2$$

のために0になる．(9.6.11)の $\bar{\tau}$ の因子と，$\bar{\tau}$ の指数が打ち消したので，これでこの組み合わせがモジュラー不変になることがわかる．

振幅が $\nu_i \to \nu_i + 1$ と $\nu_i \to \nu_i + \tau$ の下で不変になることは，積分の領域を切断できることを意味している：

$$0 < \mathrm{Im}\,\nu_i < \mathrm{Im}\,\tau; \quad -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\nu_i < \frac{1}{2}. \tag{9.6.12}$$

また，閉弦の1ループ図の場合のように $\tau \to \tau + 1$ と $\tau \to -1/\tau$ の下での不変性のために，基本領域

$$-\frac{1}{2} \le \mathrm{Re}\,\tau \le \frac{1}{2}; \quad |\tau| > 1 \tag{9.6.13}$$

をとってもよい．この基本領域をとることにより $\tau = 0$ での特異性を避けることができ，有限の1ループ振幅が得られる．

この議論では，ふつうの超弦のようにモジュラー不変性が振幅が有限であることを示すのに重要であった．特異性のない基本領域をとることができるために振幅が有限になる．しかしこの計算では，なぜ理論がモジュラー不変なのか明らかではない．そこでもっとも簡単な場合を分析して，どこでモジュラー不変性が入ってくるのかを見よう．問題を簡単にするために，外線のない真空1ループ振幅を考えよう．

まず，((9.6.1)のトレースの計算に現れる)関数 F を定義しよう：

$$F(\tau, X) = \sum_{L\in\Lambda} e^{-i\pi\tau(L-X)^2}. \tag{9.6.14}$$

ここで和は格子点についてとり，X はルート格子空間の任意の 16 次元ベクトルで，各点には整数 n_i をつけてある：

$$L = \sum n_i e_i^I. \tag{9.6.15}$$

F は周期的

$$F(\tau, X) = F(\tau, X + e_i) \tag{9.6.16}$$

であることに注意しよう．このずらしは単に整数 n_i に吸収できるからである．この関数をそのフーリエ変換 $\tilde{F}$ で書こう：

$$F(\tau, X) = \sum_{M \in \Lambda^*} e^{-2iM \cdot X} \tilde{F}(\tau, M). \tag{9.6.17}$$

F は周期的なので，M は必然的に**双対格子**上にのることに注意しよう：

$$M^I = \sum_{i=1}^{16} m_i e_i^{*I}. \tag{9.6.18}$$

さて，逆フーリエ変換をして $\tilde{F}$ を F により求める：

$$\tilde{F}(\tau, M) = \int \frac{d^{16}X}{\sqrt{|g|}} e^{2\pi i M \cdot X} F(\tau, X). \tag{9.6.19}$$

ここで $\sqrt{|g|}$ はトーラスの体積である．F の表式をこの式に代入する．この積分をすれば，$\tilde{F}$ の具体的な形

$$\tilde{F}(\tau, M) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \tau^{-8} e^{i\pi M^2/\tau} \tag{9.6.20}$$

が得られる．この等式を 1 ループ真空振幅に実際現れる表式に代入したい．それにはハミルトニアンについてのトレースを計算しなければならないが，それは $(p^I)^2$ についての和を含んでいる．このようにして，トレースの計算に次の関数 f が現れる：

$$f(\tau) = \tau^4 \sum_{L \in \Lambda} e^{-i\pi\tau L \cdot L}. \tag{9.6.21}$$

(9.6.14)から，

$$F(\tau, 0) = f(\tau) \tau^{-4} \tag{9.6.22}$$

が得られる．次に $\tilde{F}$ の表式を代入して，f の表式を得る：

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(-\frac{1}{\tau}\right)^4 \sum_{M \in \Lambda^*} e^{i\pi M \cdot M/\tau} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} f^* \left(-\frac{1}{\tau}\right). \end{aligned} \tag{9.6.23}$$

ここで，f^* は**双対格子**について定義した(9.6.21)のふつうの f にほかならない．これが主要な結果である．

まとめると，モジュラー変換 $\tau \to -1/\tau$ は格子を双対格子に置き換えることがわ

かった．したがってモジュラー不変性のためには，格子が自己双対であることを要求する必要がある．実はこれが，格子が自己双対である条件の原因である．自己双対性(これにより，結局は $E_8 \otimes E_8$ または $\mathrm{Spin}(32)/Z_2$ に制限される)と，モジュラー不変性の間に強いつながりがあることがわかった．これらの群をとったのは，もともとアノーマリーの相殺のためだったが，モジュラー不変性と振幅の有限性のためにまさにこれらの群が必要なのである．

9.7　E_8 と Kac-Moody 代数

前に状態のスペクトラムは，明白に $E_8 \otimes E_8$ 不変ではないことを見た．努力してようやく，低い状態が群の既約表現に入れられることが示せたのである．高いレベルでは状態の数が急速に増えて何千万にもなるので，状態を実際に $E_8 \otimes E_8$ の多重項にわけるのはとても無理になる．

この節では，第4章で展開した Kac-Moody 代数［8–10］の手法を用いて，全レベルでヘテロティック弦が実際に $E_8 \otimes E_8$ 対称なスペクトラムをもつことを示すことにする．その章で定義した**頂点演算子**(vertex operator)を用いて，Kac-Moody 代数の表現を生成するのである(これは，格子が偶で，自己双対で，代数がレベル1の場合だけうまくいく)．

われわれの欲しい表現は Chevalley 基底で，それによれば496個の生成子は，16個の互いに交換する生成子(これがカルタン部分群をなす)と，480個のルートベクトルにわかれている．16個の p^I ベクトルが

$$[p^I, p^J] = 0 \tag{9.7.1}$$

という条件に従うことに注意しよう．明らかに，いつでもカルタン部分代数は互いに交換するベクトル p^I で表すことができる．しかし難しいのは，480個のルートベクトルを作ることである．

480個の状態をもつ1番簡単な演算子は頂点演算子である．それは原点をまわる線積分

$$E(K) = \oint \frac{dz}{2\pi i z} V(K, z) C(K) \tag{9.7.2}$$

によって書ける．ここで頂点関数 V は，(時空ではなく)格子上に定義されているものである：

$$V(K, z) = \ :e^{2iK^I X_L^I(z)}:. \tag{9.7.3}$$

そして

$$(K^I)^2 = 2$$
$$z = e^{2i(\tau+\sigma)} \tag{9.7.4}$$

である．コサイクル $C(K)$ はまだ決まっていない．ベクトル K^I は定義により，16次元ルート格子空間の480個の方向を向いていることに注意しよう．

次に，カルタン部分代数の 16 要素 p^I とルート格子空間の 480 要素が，$E_8 \otimes E_8$ の交換関係をみたすことを要求する．これはさらに C 演算子を決める．要求することは，

$$[E(K), E(L)] = \begin{cases} \varepsilon(K,L)E(K+L), & (K+L)^2 = 2 \\ K^I p^I, & K+L=0 \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{9.7.5}$$

および

$$[p^I, E(K)] = K^I E(K) \tag{9.7.6}$$

である．ここで $\varepsilon(K,L)$ は代数の構造定数で ± 1 の値をとる．

ある意味でわれわれはまだ何もやっていない．単に Chevalley 基底で $E_8 \otimes E_8$ の代数のよく知られている交換子を書き，それからわれわれの仮定がそれをみたすことを要求したにすぎない．自明でないことは，これらの式の解が実際に存在し，それが C の値を決めることである．

しばらくの間因子 C を落として，交換関係がみたされるかどうかを見よう．容易に

$$V(K,z)V(L,w) = (wz)^{-\frac{1}{2}K\cdot L}(z-w)^{K\cdot L} : e^{2iK\cdot X(z)+2iL\cdot X(w)} : \tag{9.7.7}$$

が示せる．これは $|w| < |z|$ に対して成り立つ．これから，

$$E_K E_L - (-1)^{K\cdot L} E_L E_K = \oint\oint \frac{dw}{2\pi i w}\frac{dz}{2\pi i z}(z-w)^{K\cdot L}(wz)^{-\frac{1}{2}K\cdot L} : e^{2iK\cdot X(z)+2iL\cdot(w)} : \tag{9.7.8}$$

が示せる．ここで w 積分は，第 1 項では $|z| > |w|$ で実行し，第 2 項では $|z| < |w|$ で実行する．最後の表式を注意深く調べることにより，Chevalley 基底の等式をすべてみたしているが統計がみな間違っていることがわかる．つまり交換子ではなく反交換子が出るのである．これが $C(K)$ の因子を導入しなければならなかった理由である．そこで条件

$$C(K)C(L) = \varepsilon(K,L)C(K+L) \tag{9.7.9}$$

を課さねばならない．$C(K)$ 演算子は,「コサイクル」または「トゥイスト」と呼ばれ，正しい統計を得るために生成子 $E(K)$ の定義に入れてあるのである．運動量 p^I の状態に作用させれば，$C(K)$ が

$$C(K)|p\rangle = \varepsilon(K,p)|p\rangle \tag{9.7.10}$$

という性質をもつことを示せる．この法則が結合則をみたすことを要求すれば，これらの位相に制限がつく．つまり状態に次々と C を作用させ，結合則を要求することにより，容易に

$$\varepsilon(K,L)\varepsilon(K+L,M) = \varepsilon(L,M)\varepsilon(K,L+M) \tag{9.7.11}$$

が得られる．これらを 2 コサイクル条件と呼ぶ．$C(K)$ と位相にはいくつかの具体的な表現が存在する．それらはいつでも，

$$\begin{aligned} \varepsilon(K,L)\varepsilon(L,K) &= (-1)^{K\cdot L} \\ \varepsilon(K,0) = -\varepsilon(K,-K) &= 1 \end{aligned} \tag{9.7.12}$$

ととることができる．

付録で，リー代数の生成子は，カルタン生成子と固有ベクトル E_α にわけられることを示してある．これによりヘテロティック弦に現れる演算子とリー群の生成子の間の正確な対応がわかる：

ヘテロティック	カルタン-ワイル
p^I	H_i
$E(K)$	E_α
K^I	$\boldsymbol{\alpha}$

(9.7.13)

証明の最後のステップは，16 個の p^I と 480 個の $E(K)$ が理論の頂点を生成し（たとえば(9.5.6)，(9.5.7)を見よ），したがってフォック空間はこれらの演算子が真空に作用したものからなることに注意することである．ところが，これらの生成子は全体で $E_8 \otimes E_8$ の 496 個の生成子を作っているので，全体のスペクトラム自身が $E_8 \otimes E_8$ の既約表現により分類されているはずである．

9.8 ローレンツ的格子

今までは，1 つの部分が 26 次元から 10 次元へコンパクト化しているヘテロティック弦を議論してきた．次はふつうの空間を考えられるように，10 次元空間を D 次元時空にコンパクト化しなければならない．もっと別の面白い可能性は，**最初から 26 次元と 10 次元の空間を直接 D 次元へコンパクト化して**，中間の過程をとび越えることである．これが Narain のアプローチ［13, 14］で，今まで考えた $E_8 \otimes E_8$ よりも大きなランク $26 - D$ のゲージ群が得られる．

まず 26 次元と 10 次元の 2 つの部分を考え，それらを D 次元時空へコンパクト化しよう．すると左向き部分は $26 - D = p$ 次元をもち，右向き部分は $10 - D = q$ 次元をもつ．コンパクト化した次元を

$$
\begin{aligned}
X^A &= q^A + 2L^A(\tau + \sigma) + \sum_{n \neq 0} \frac{i}{2n} \alpha_n^A e^{-2in(\tau+\sigma)} \\
X^B &= q^B - 2\tilde{L}^B(\tau - \sigma) + \sum_{n \neq 0} \frac{i}{2n} \alpha_n^B e^{-2in(\tau-\sigma)}
\end{aligned}
\tag{9.8.1}
$$

と表そう．ここで A は 1 から p まで，B は 1 から q まで動く．$p = q + 16$ の関係があり，これにより両方の部分のコンパクト化していない時空の次元数が D であることが保証されていることに注意しよう．

さて $L_0 - \tilde{L}_0$ が状態を消すという制限を課し，閉弦に特定の σ の原点がないようにする．これから条件

$$
\frac{1}{2}(k^2 - \tilde{k}^2) = \tilde{N} - N + 1 = \text{整数} \tag{9.8.2}
$$

が出る．質量の関係は，今は

$$
\frac{1}{2}m^2 = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}\tilde{k}^2 + N + \tilde{N} - 1 \tag{9.8.3}
$$

で与えられる．$p=16, q=0$ とすれば，これらの式はすべてふつうのヘテロティック弦に帰着することに注意しよう．

さて，最終的結果がモジュラー不変であることを確かめよう．これにより，まだ任意である格子に新しい条件がつくことになる．一般の場合にした 1 ループの計算 (9.6.2) は，ふつうのヘテロティック弦のものとほとんど同じである．項を注意深く分析してみると，一般化した場合は新しい因子

$$\sum e^{-i\pi\bar{\tau}(L-\sum_{i=1}^{4} K_i \bar{\nu}_i/\bar{\tau})^2 + i\pi\tau\tilde{L}^2} \tag{9.8.4}$$

を含むことがわかる．そこで $\tau \to \tau+1$ の下でのこの因子の変化を計算する．すると，新しい位相因子

$$e^{-i\pi(L^2-\tilde{L}^2)} \tag{9.8.5}$$

が出る．この項を打ち消すためには，

$$(L^A)^2 - (\tilde{L}^B)^2 = \text{偶数} \tag{9.8.6}$$

としなければならない．ここの余分の負号のために，格子上の計算はユークリッド的でなく「ローレンツ的」になる．(ふつうのヘテロティック弦では $\tilde{L}$ は 0 なので，格子のローレンツ的振る舞いはわからない.)

最後にモジュラー変換 $\tau \to -1/\tau$ を適用すると，格子が自己双対でなければならないことがわかる．まとめると，1 ループレベルのモジュラー不変性は，**偶の自己双対ローレンツ的格子**の場合に保たれる．

数学的にはこのようなローレンツ的格子は，整数 n に対し条件 $p-q=8n$ をみたすとき存在することが示せる．今の場合は $n=2$ である．

また，この格子のパラメーターの数を計算することもできる．まずローレンツ的格子は，SO(p,q) 変換を除いて一意的であることが示せる．しかしわれわれの導いた質量公式は，SO(p) と SO(q) の下だけで不変である．したがって，全部のパラメーターの数は，

$$\dim \mathrm{SO}(p,q) - \dim \mathrm{SO}(p) - \dim \mathrm{SO}(q) = pq \tag{9.8.7}$$

である．このように，格子を決めるパラメーターの全部の数は $p(p-16)$ になる．

このコンパクト化の方法により，使える群の数がかなり増えた．群の全体のランクは $26-D$ である．つまり，SO $(52-2D)$ ぐらい大きい群も考えられるのである．4 次元時空ではこれは SO(44) である．$E_8 \otimes E_6 \otimes E_7 \otimes \mathrm{SU}(2)$ や $E_8 \otimes E_6^2 \otimes G$ でもよい．ここで G は SO(4) か SU(3) のどちらかである．また $E_8 \otimes E_8 \otimes G_{10-d}$ でもよい．この場合 G は simply laced でなければならない．

これまでの議論から，ローレンツ的格子はヘテロティック弦をコンパクト化するまったく新しい方法と結論するかもしれない．実はこれは完全には正しくない．ローレンツ的格子は，ヘテロティック弦のふつうの描像の中で表せることがわかるからである．たとえば，背景場があるときの次の弦の作用を考える：

$$g_{ij}\partial_\alpha X^i \partial^\alpha X^j + \varepsilon^{\alpha\beta} B_{ij}\partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j + \varepsilon^{\alpha\beta} A_i^I \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^I. \tag{9.8.8}$$

ここで I は1から16を動き，B_{ij} は反対称テンソル，$\varepsilon^{\alpha\beta}$ は2空間の反対称テンソルである．さて，g_{ij}, B_{ij}, A_i^I 場が定数の背景場であると仮定する．このアプローチのパラメーターの数は，これらの場の中の独立なモードの数を数えれば容易にわかる．全体で $pq = q(q+16)$ 個のパラメーターに対し，それと同数の

$$\begin{Bmatrix} g_{ij} \\ A_i^I \\ B_{ij} \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}q(q+1) \\ 16q \\ \frac{1}{2}q(q-1) \end{Bmatrix} \tag{9.8.9}$$

となる．X が，

$$X^i = 2\sigma n^i + q^i(\tau) \tag{9.8.10}$$

で近似できると仮定してこの系を量子化する．この表式を作用に入れて，これらの背景場の下で系を量子化する．これらの背景場の総体的効果は，ローレンツ的格子上へのコンパクト化で入る新しいパラメーターの数とちょうど等しい pq 個だけパラメーターを付け加えることになっている．さらにこれらの背景場があるときの伝統的コンパクト化が，実はローレンツ的格子へのコンパクト化と同等であることが示せるのである．

まとめると，ローレンツ的格子は背景場を含めたときの伝統的コンパクト化と同等であるばかりでなく，コンパクト化の非常に大きな組を分類する非常に便利な枠組みを与えてくれるのである．

9.9　まとめ

アノーマリーの相殺のためには，O(32) または $E_8 \otimes E_8$ が必要である．しかし，Chan-Paton 因子は例外群を入れられない．そこで超弦に例外群を入れる方法として，コンパクト化を考えざるを得ない．

1次元のもっとも簡単なコンパクト化は，

$$x = x + 2\pi R \tag{9.9.1}$$

の同一視をすればよい．1次元のスカラー関数は周期的固有関数で展開することになる：

$$\phi(x) = \sum_n \phi_n e^{ipx}. \tag{9.9.2}$$

ここで，

$$p = \frac{n}{R} \tag{9.9.3}$$

である．周期的境界条件をとることにより，運動量がこのように量子化されることがわかる．

これに対しヘテロティック弦は，26次元が10次元にコンパクト化し，16次元格子が残るようになっている．それは閉弦で右向きと左向きの部分が分離している．右向き部分は，純粋に10次元でフェルミオン的超弦とボソン的弦を含む．左向きの部分はもともと26次元であるが，10次元にコンパクト化し，格子上に定義された16次元理

論と 10 次元のボソン的弦になる(これが右向きのボソン的弦と組み合わさって，ボソン的閉弦を完成する)．光錐ゲージでは，最終的作用は，

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\tau \int_0^\pi d\sigma \left[\partial_a X^i \partial_a X^i + \sum_{I=1}^{16} \partial_a X^I \partial_a X^I + i\bar{S}\gamma^-(\partial_\tau + \partial_\sigma)S\right] \tag{9.9.4}$$

となり，制限

$$\begin{aligned}(\partial_\tau - \partial_\sigma)X^I &= 0\\ \gamma^+ S = \frac{1}{2}(1+\gamma_{11})S &= 0\end{aligned} \tag{9.9.5}$$

が課されている．この作用は，超対称変換

$$\begin{cases}\delta X^i = (p^+)^{-1/2}\bar{\varepsilon}\gamma^i S\\ \delta S^a = i(p^+)^{-1/2}\gamma_-\gamma_\mu(\partial_\tau - \partial_\sigma)X^\mu\varepsilon\end{cases} \tag{9.9.6}$$

の下で明らかに不変になっている．

ヘテロティック弦のスペクトラムを分析するときは，コンパクト化した次元のまわりの運動量の量子化と，弦の巻き付きも考慮しなければならない．これからスペクトラムの条件が出る：

$$\frac{1}{4}m^2 = N + (\tilde{N} - 1) + \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{16}(p^I)^2. \tag{9.9.7}$$

そして，スペクトラムに対する最後の制限が閉弦が任意の σ 回転で不変なことから出る．この回転を生成する演算子は

$$U(\theta) = \exp\left\{2i\theta\left(N - \tilde{N} + 1 - \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{16}(p^I)^2\right)\right\} \tag{9.9.8}$$

である．そこで，

$$N = \tilde{N} - 1 + \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{16}(p^I)^2 \tag{9.9.9}$$

を要求する．

またヘテロティック弦に対し頂点関数も構成できる．それらは実は前に第 3 章で構成したふつうの超弦頂点の左向きと右向きの積である．今，超重力の多重項に次の仮定をしよう：

$$\begin{aligned}V_B &= \rho_{\mu\nu}(k)\int_0^\pi d\sigma\, B^\mu \tilde{P}^\nu e^{ik\cdot X}\\ V_F &= \int_0^\pi d\sigma\, F^a \tilde{P}_\nu U^{a\nu}(k) e^{ik\cdot X}.\end{aligned} \tag{9.9.10}$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
k^+ &= 0 \\
B^i &= P^i + \frac{1}{2} k^j R^{ij} \\
P^i &= \frac{dX^i}{d(\tau-\sigma)} = \frac{1}{2} p^i + \sum_{n \neq 0} \alpha_n^i e^{-2in(\tau-\sigma)} \\
R^{ij} &= \frac{1}{8} \bar{S} \gamma^{ij-} S \\
\bar{F}^a &= \frac{i}{2} (p^+)^{-1/2} \left[\bar{S} \gamma \cdot P - \frac{1}{6} : R^{ij} k^i \bar{S} \gamma^j : \right]^a \\
\tilde{P}^i &= \frac{1}{2} p^i + \sum_{n \neq 0} \tilde{\alpha}_n^i e^{-2in(\tau+\sigma)}
\end{aligned}
\tag{9.9.11}
$$

である．この頂点関数とふつうの伝播関数（と制限）を用いれば，4つの質量0のゲージボソンの散乱の4点関数が計算できる：

$$
A_4 = g^2 K(\rho_i, k_i) \cdot \varepsilon \frac{\Gamma\left(-1+\frac{u}{8}+\frac{U}{2}\right) \Gamma\left(-1+\frac{s}{8}+\frac{S}{2}\right) \Gamma\left(-1+\frac{t}{8}+\frac{T}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{u}{8}\right) \Gamma\left(1-\frac{s}{8}\right) \Gamma\left(1-\frac{t}{8}\right)}. \tag{9.9.12}
$$

ここで，K は偏極の複雑な関数で，S, T, U は

$$
\begin{aligned}
& S = (K_1+K_2)^2; \quad T = (K_2+K_3)^2; \quad U = (K_1+K_3)^2 \\
& S + T + U = 8
\end{aligned}
\tag{9.9.13}
$$

と定義される．

同様に1ループ振幅を定義でき，明らかにモジュラー不変になることが示せる．したがって $\tau = 0$ の特異性を打ち消す自由度があり，理論が1ループで有限になる．

理論のスペクトラムを分析してみると，$E_8 \otimes E_8$ 多重項によりスペクトラムを構成することは非常に難しいことがわかった．けれども，スペクトラムがこの群の既約表現で表せることは，Kac-Moody 代数を用いれば容易に証明できる．Kac-Moody 生成子は，次の交換関係をもつ：

$$
[T_m^i, T_n^j] = i f^{ijl} T_{m+n}^l + k m \delta^{ij} \delta_{m,-n}. \tag{9.9.14}
$$

これは，円周上に拡がったふつうのリー代数のように見えることに注意しよう．この代数をカルタン-ワイル表現で書き換えることもでき，その場合生成子は

$$
\begin{aligned}
& [H_i(\theta), H_j(\theta')] = 0 \\
& [H_i(\theta), E_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta')] = -2\pi \delta(\theta-\theta') \boldsymbol{\alpha}_i E_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta)
\end{aligned}
\tag{9.9.15}
$$

および

$$
[E_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta), E_{-\boldsymbol{\alpha}}(\theta')] = 2\pi \delta(\theta-\theta') \sum_i \boldsymbol{\alpha}_i H_i(\theta) + 2\pi i \delta'(\theta-\theta') \tag{9.9.16}
$$

および

$$
[E_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta), E_{\boldsymbol{\beta}}(\theta')] = \begin{cases} 2\pi \delta(\theta-\theta') E_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}(\theta), & \text{もし} \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in \Gamma \text{ならば} \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{9.9.17}
$$

をみたす．

頂点演算子を用いれば，Kac-Moody 代数の表現を具体的に作ることができる．頂点演算子は理論のスペクトラムを生成するので，スペクトラム自身が Kac-Moody 変換の下で不変になる．したがって，たとえスペクトラムが明白に $E_8 \otimes E_8$ 対称でなくても，それが実はこの群の下で対称になることが確立されるのである．

D 次元時空への異なるコンパクト化を用いれば，今与えたよりさらに一般的な新しいコンパクト化が可能になる．左向き部分を 26 から直接 D 次元時空へコンパクト化し，右向き部分を 10 から D 次元時空へコンパクト化することにより，中間の $E_8 \otimes E_8$ ヘテロティック弦をとびこすことができる．このコンパクト化の新しい特徴は，モジュラー不変性のために，**ローレンツ的格子**，すなわち計量が反対符号の格子に制限されることである．そのようなローレンツ的格子はうまく定義されることが示せる．したがってこれにより，まったく新しい種類のヘテロティック型の弦が可能となり，それは SO $(52-2D)$ ぐらい大きな群をもっている．これらの模型は標準的ヘテロティック弦とずいぶん違って見えるが，一定背景場 g_{ij}, A_i^I, B_{ij} を用いれば，これらの新しい種類の模型を生成できることが示せる．

参考文献

[1] P. G. O. Freund, ITP preprint, 1984.
[2] Th. Kaluza, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.* **K1**, 966 (1921).
[3] O. Klein, Z. *Phys.* **37**, 895 (1926).
[4] H. C. Lee, *Introduction to Kaluza-Klein Theories*, World Scientific, Singapore, 1984.
[5] E. Cremmer and J. Scherk, *Nucl. Phys.* **B108**, 409 (1976); **B118**, 61 (1977).
[6] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. Martinec, and R. Rohm, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 502 (1985); *Nucl. Phys.* **B256**, 253 (1986); **B267**, 75 (1986).
[7] S. Yahikozawa, *Phys. Lett.* **166B**, 135 (1986).
[8] I. B. Frenkel and V. G. Kac, *Invent. Math.* **62**, 23 (1980).
[9] G. Segal, *Commun. Math. Phys.* **80**, 301 (1982).
[10] V. G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, Birkhäuser, Boston (1983).
[11] K. S. Narain, *Phys. Lett.* **B169**, 41 (1986).
[12] K. S. Narain, M. H. Sarmadi, and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B279**, 369 (1987).

第10章

Calabi-Yau空間とオービフォールド

10.1 Calabi-Yau空間

ヘテロティック弦はふつうの弦理論の定式化よりずっと進んだものではあるが，理論を4次元に落とせるかという問題と，厳密な現象論ができるかという問題はまだ残されている．残念ながら答は否である．

現在われわれの手法はあまりに原始的なので，理論が自発的な次元の破れを起こせるかという問に答えられない．弦の場の理論かM理論でさらに発展があって初めて，理論の本当の真空についての結論が出せるのであろう．

驚くべきことに，かなりゆるいコンパクト化の制限でうまくいく現象論が得られることがわかった．今までのどの解も最小の $\mathrm{SU}(3)\otimes\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{U}(1)$ と完全に一致はしないが，古典的真空についての2, 3の仮定で非常に近いところまでいけるのである．

しかし残念ながら，豊富すぎて困る．何千もの可能な古典解があり，どうやって真空を選ぶかはまだ残された問題なのである．したがって弦についての単純な現象論はできるが，理論の本当の真空に関してはっきりしたことがいえるには非摂動的形式の発展を待たねばならない．この章では，コンパクト化が起こると**仮定**し，弦理論の古典的真空を書き下す方法を2つ議論する．

1. **Calabi-Yau空間．** 4次元の $N=1$ 超対称性が破れないことを要求する．この簡単な仮定により，共変的に一定のスピノールをもつ多様性を考えることになる．これがさらに，6次元多様体を**Calabi-Yau多様体**［1, 2］に制限する．

2. **オービフォールド．** トーラスを不連続群の作用で割ったものにコンパクト化する．これによりゲージ群をこわし，異なる低エネルギーの予言が得られる．（オービフォールドは多分Calabi-Yau空間の特別な極限であろう．ただしこれは完全には明らかではない．）

しかしまず理論の低エネルギー極限を考え，$D=10$ 超重力が $E_8\otimes E_8$ 超Yang-Mills理論（付録を見よ）に結合した理論を出し，破れ方についていくつかのよさそうな仮定をしよう．Candelas, Horowitz, Strominger, Witten［1, 2］は，ゼロスロープ極限について次の仮定をした．

1. 10次元の宇宙は，4次元と6次元の宇宙の積にコンパクト化する：

$$M_{10} \to M_4 \times K_6. \tag{10.1.1}$$

ここで，M_4 宇宙は最大に対称な空間，すなわち，

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{R}{12}(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) \tag{10.1.2}$$

で，K はコンパクトである．(4次元多様体が最大対称であるという仮定により，多様体が de Sitter，反 de Sitter または Minkowski のいずれかに制限される.)

2. $N=1$ 局所的超対称性が破れないで，コンパクト化の後でも残る．

3. ボソン的場のいくつかは0にできる：

$$H = d\phi = 0. \tag{10.1.3}$$

とくに第2の $N=1$ 超対称性の仮定は，それが多様体 K_6 の構造に自明でない制限を課すので重要である．もし超対称性が破れなければ，その生成子 Q は真空 $|0\rangle$ 上で0でなければならない．超対称性の下でのフェルミオン場の変換は

$$\delta\psi = [\bar{\varepsilon}Q, \psi] \tag{10.1.4}$$

で与えられる．この式の真空期待値は，もし超対称性が保たれていれば(Q が真空を消滅するので) 0になる：

$$\langle 0|\delta\psi|0\rangle = 0. \tag{10.1.5}$$

しかし古典的極限では，フェルミオン場の変換とその真空期待値とは同じである：

$$\delta\psi \sim \langle 0|\delta\psi|0\rangle. \tag{10.1.6}$$

したがってもし $N=1$ 超対称性がコンパクト化で残れば，フェルミオン場の変換は0でなければならない：

$$\delta\psi = 0. \tag{10.1.7}$$

これはさらに，超対称性のパラメーター ε に自明でない制限を出す．もともと ε は任意のスピノール場であった．ところが $N=1$ 超対称性が成り立つことを要求すると，無限個の可能な ε のうち $N=1$ 超対称性を保つものだけを選ぶことになる．

さて，$D=10$ のフェルミオンの変換(付録を見よ)は，

$$\begin{aligned}
\delta\psi_i &= \kappa^{-1}D_i\varepsilon + \frac{\kappa}{32g^2\phi}(\Gamma_i^{jkl} - 9\delta_i^j\Gamma^{kl})\varepsilon H_{jkl} + \cdots \\
\delta\chi^a &= \frac{-1}{4g\sqrt{\phi}}\Gamma^{ij}F_{ij}^a\varepsilon + \cdots \\
\delta\lambda &= \frac{-1}{\sqrt{2}\phi}(\Gamma\cdot\partial\phi)\varepsilon + \frac{\kappa}{8\sqrt{2}g^2\phi}\Gamma^{ijk}\varepsilon H_{ijk} + \cdots
\end{aligned} \tag{10.1.8}$$

に等しい [3]．ここでローマ字 i, j, k, a, b, c は6次元の添字で，高次の4フェルミオン相互作用項は落とした．さらにビアンキ恒等式がある：

$$dH = \mathrm{Tr}\, R\wedge R - \frac{1}{30}\mathrm{Tr}\, F\wedge F. \tag{10.1.9}$$

さて，第2と第3の条件を課して，パラメーター ε に制限を出そう．変換は

$$
\begin{aligned}
\delta\psi_i &= \frac{1}{\kappa} D_i \varepsilon = 0 \\
\delta\chi^a &= \Gamma^{ij} F^a_{ij} \varepsilon = 0
\end{aligned}
\tag{10.1.10}
$$

に帰着する．これらは非常に強い制限で，とくに第1のものは ε が**共変的に一定のスピノール**(covariantly constant spinor)，すなわち $D_i\varepsilon = 0$ であることを要求している．とくにこれは共変微分のスピン接続，したがって空間自身に強い制限を課す．

たとえば(10.1.10)の最初の式は，ε をある距離だけ平行移動させてもスピノールを不変にすることを示している．さらにそのような変位を2度して，閉じた経路のまわりに一周してみる(付録を見よ)．(10.1.10)を再び微分すれば，閉じた経路のまわりのスピノールの変化を得るのである．こうして，

$$
\begin{aligned}
D_i\varepsilon = 0 &\to [D_i, D_j]\varepsilon = 0 \\
&\to R_{ijkl}\Gamma^{kl}\varepsilon = 0
\end{aligned}
\tag{10.1.11}
$$

を得る．これは，閉じた経路のまわりにまわってもスピノールが不変であることを示している．さらにこれは，多様体が Ricci 平坦であることを意味している：

$$
R_{ij} = 0. \tag{10.1.12}
$$

とくにこの最後の条件は，計量テンソルが平坦な4次元 Minkowski 空間を記述することを示すので重要である．こうして，de Sitter と反 de Sitter 空間は排除される．

さて，任意のスピノールをとり，閉じた曲線のまわりに平行移動しよう．閉じた経路をまわると，スピノールは

$$
\varepsilon \to \varepsilon + \Delta^{mn}[D_m, D_n]\varepsilon \tag{10.1.13}
$$

となる．ここで閉じた経路の面積は，Δ^{mn} に比例するとした．こうしてスピノールはもとの方向から回転し，その回転行列は2つの変位の交換子であり，それが曲率テンソルになることがわかる：

$$
\varepsilon \to U\varepsilon. \tag{10.1.14}
$$

ここで

$$
U = 1 + \Delta^{mn}[D_m, D_n] + \cdots \tag{10.1.15}
$$

である．そこで続けて何回か閉じた経路をまわり，各回ごとに同じ点から同じ点へ帰ってみる．一般に，同じ点のまわりに任意回の閉じた経路をまわるたびに，もとのスピノールに小さな回転をかけたものを得る．それで，そのような回転のすべての集合は群をなす：

$$
\varepsilon \to U_2 U_1 \varepsilon = U_3 \varepsilon. \tag{10.1.16}
$$

この群は**ホロノミー群**(holonomy group)と呼ばれる．

さて，この結果を今の特別な場合へあてはめてみよう．多様体 K^6 に対し，任意の

スピノールは O(6) ゲージ場のスピン接続をもつ．そして，O(6) の下で変換するスピノールは $2^3 = 8$ 成分もつ．ところが，

$$\mathrm{O}(6) = \mathrm{SU}(4) \tag{10.1.17}$$

であることがわかっている．したがってこの O(6) のスピノールの 8 成分は，SU(4) によっても分類できる：

$$\mathbf{8} = \mathbf{4} \oplus \mathbf{4}. \tag{10.1.18}$$

これらの 2 つの表現は，SU(4) の下で反対のカイラリティーのスピノールとして変換する．ここでスピノール ε が正のカイラリティーをもつようにできる．カイラリティーの制限が成分を半分打ち消すので，それは SU(4) の **4** として変換することになる．

しかし今調べているスピノールは，任意のスピノールではなく，

$$D_i \varepsilon = 0 \tag{10.1.19}$$

をみたしている．これは，

$$\varepsilon = U\varepsilon \tag{10.1.20}$$

を意味している．すなわち，閉じた経路を動かした後もスピノールは同じである．

それで問題は次のようになる．SU(4) の **4** を不変にする O(6) の部分群は何か？ 答はなじみの深いもので，Higgs の破れの理論からわかっている．そこでは，次の問題の答を知りたかった．**一定スピノールまたはベクトルを不変にする最大の群は何か？**

この問に答えるには，SU(4) 変換により，いつでも ε を

$$\varepsilon \to \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix} \tag{10.1.21}$$

という形にできることに注意しよう．ここまでのところは何もしていない．単に任意のスピノールをとり，SU(4) 回転によりこの形にしただけである．しかしこれで，このようなスピノールを不変にする最大の群 U が SU(4) の中の 3×3 複素行列の部分群，すなわち SU(3) であることが明らかである．U 行列を今はブロック対角形

$$U = \begin{pmatrix} \mathrm{SU}(3) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.1.22}$$

に制限していることに注意する．これで明らかに $\varepsilon = U\varepsilon$ をみたすことができる．重要なことは，この結果が完全に一般的であることである．ε の特定の表現をとったのはこの一般的結果を示すためだけであり，これは ε のいかなる表現に対しても正しい．

結論として，共変的に一定のスピノールが存在すれば，ホロノミー群は O(6) から SU(3) になる．これを K^6 が SU(3) ホロノミーをもつという．

今従った論理は，

$$N = 1 \text{ 超対称性} \to D_i \varepsilon = 0 \to \mathrm{SU}(3) \text{ ホロノミー} \tag{10.1.23}$$

とまとめられる．これは重要な結果であるが，ちょっと使いものにならない．SU(3) ホロノミーをもつ多様体については，あまり知られていないからである．実際具体的なことは何もわかっていないのである．したがってこの重要な情報は，現象論には使えない．しかし，われわれの原理から導ける情報をすべてつくしたわけではないのでまだ希望はある．

理論に共変的に一定なスピノールがあることの，すべての意味をつくしたわけではない．たとえば，スピノール場から次の量をいつでも作れる：

$$J^i_j = -ig^{ik}\bar{\varepsilon}\Gamma_{kj}\varepsilon. \tag{10.1.24}$$

これは空間の本当のテンソルとして変換する．次に，スピノールの恒等式をいくつか使い，

$$J^n_m J^p_n = -\delta^p_m \tag{10.1.25}$$

を示すことができる．空間をそれ自身に写像し $J^2 = -1$ をみたすこのようなテンソル J を構成できればいつでも，その多様体は**概複素**(almost complex) であるという．(2 次元では，このテンソルの意味することは，数 i が存在して $i^2 = -1$ となるということで自明である.)　もし ε が共変的に一定ならば，このテンソルは大変に面白いものである．たとえば微分により

$$D^m J^n_m = 0 \tag{10.1.26}$$

を得る．これは計量が，Ricci 平坦であるだけでなく **Kähler** でもあることを意味している．(これらの言葉はすぐに定義する.)　最後に 1 形式

$$\Gamma = \Gamma^q_{mp} J^p_q dx^m \tag{10.1.27}$$

も定義できる．ここで Γ^q_{mp} は Christoffel 記号である．この形式は

$$d\Gamma = 0 \tag{10.1.28}$$

をみたすことがわかる．これは第 1 Chern 類が 0 になること $c_1 = 0$ を意味する．

まとめると，われわれの仮定論理をたどれば，

$$N = 1 \text{ 超対称性} \to D_i\varepsilon = 0 \to K \text{ は Ricci 平坦，Kähler で第 1Chern 類が } 0 \tag{10.1.29}$$

となる．

この新しい結果の大きな長所は，第 1 Chern 類が 0 の Ricci 平坦な Kähler 多様体はたくさん知られていることである．このように袋小路の SU(3) ホロノミーにたよるかわりに，この種の Kähler 多様体にたよる方がずっとよい．

まだ未解決の問題の 1 つは，これら 2 種類の多様体の間の関係である．幸いなことに，Calabi が予想し (Yau が後に証明し) た次の定理 [4–6] がある．

定理 (Calabi-Yau)　第 1 Chern 類が 0 の Kähler 多様体は，いつでも SU(3) ホロノミーの Kähler 計量をもつ．

こうして Calabi-Yau の定理を用いて，(少なくとも原理的には) 現象論のための 6

次元多様体を何千でも作ることができる．

このような Calabi-Yau 多様体を作るためには，まず代数幾何学とコホモロジーの基本的なことをいくつか復習することが大切である．そこで少々わき道にそれ，コホモロジーの言葉で Kähler と Ricci 平坦な計量の簡単な性質をいくつか議論しよう．コホモロジー理論からのこれらの結果の多くが，超弦の現象論に直接使えることがわかる．

10.2　de Rahm コホモロジーの概観

付録に述べたように，微分形式の理論はべき零の演算子から出発する：

$$\begin{aligned} d &= dx^\mu \partial_\mu \\ d^2 &= 0. \end{aligned} \tag{10.2.1}$$

N 形式 ω が閉じている (closed) とは，

$$\text{閉：}\quad d\omega = 0 \tag{10.2.2}$$

のことである．同様に，それが完全である (exact) とは，$N-1$ 形式 α が存在して

$$\text{完全：}\quad \omega = d\alpha \tag{10.2.3}$$

であることである．完全な形式の集合は，閉じた形式の部分集合であることに注意しよう：

$$\text{完全形式} \subset \text{閉形式}. \tag{10.2.4}$$

3 次元では，これらのことはスカラー ϕ の勾配 (gradient) の回転 (curl) がいつでも 0 というよく知られていることにまとめられる：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\phi \to \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0. \tag{10.2.5}$$

実際微分形式の理論により，3 次元のふつうのテンソル解析の多くの定理を簡単に書くことができるのである．

マクスウェルの理論では，2 つの場のテンソル A_μ と B_μ が全微分だけしか違わないとき同じ物理を記述するという．すなわち，

$$A_\mu - B_\mu = \partial_\mu \lambda \to A_\mu \sim B_\mu. \tag{10.2.6}$$

もちろんこれがゲージ理論の本質である．この数学的言葉では，2 つの形式 ω と ω' が完全形式だけ違うとき同じ同値類に属すという：

$$\omega - \omega' = d\alpha \to \omega \sim \omega'.$$

マクスウェルの理論では，すべての同等でない場の集合を構成したい．微分形式の理論ではこのために，集合 $H^p(M)$ を完全形式を除いたすべての閉 p 形式の集合として定義する．すなわち，

$$H^p(M) = \frac{\text{閉}\,p\,\text{形式}}{\text{完全}\,p\,\text{形式}}. \tag{10.2.7}$$

これが，多様体 M 上に定義された**第 p de Rahm コホモロジー(cohomology)群** $H^p(M)$ を定義する．

コホモロジー群は，特定の多様体にどれだけの独立な閉 p 形式が定義できるかを数えていることに注意しよう．このようにコホモロジーは，多様体の**局所的構造**によっているのである．しかしその名が示唆するように，コホモロジーと**ホモロジー**(homology)の間には双対性がある．ホモロジーは多様体の**大域的**性質に基づくものである：

$$\text{コホモロジー} \longrightarrow \text{多様体の局所的性質}$$
$$\text{ホモロジー} \longrightarrow \text{多様体の大域的性質}.$$

ホモロジーとコホモロジーの間の関係をもっと正確にするために，この双対性をどのように得るかを見よう．まず，多様体 M 上の領域 C での積分を書く：

$$\int_C \omega.$$

ここで C は，線，面，体積，等々である．これは p 形式 ω をとり，面 C と一緒にして実数を作る写像と考えることができる．こうしてこの演算を，微分形式と面の「スカラー積」と見なすことができる：

$$\langle C|\omega\rangle \equiv \int_C \omega. \tag{10.2.8}$$

さて，なじみ深いストークスの定理を N 次元空間に拡張し，微分形式の言葉で表そう：

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega. \tag{10.2.9}$$

ここで C は N 次元多様体で，∂C は C の「境界」として定義されている．次にストークスの定理を書き換えて，スカラー積の式として書こう：

$$\text{ストークスの定理：}\quad \langle C|d\omega\rangle = \langle \partial C|\omega\rangle. \tag{10.2.10}$$

こうして，コホモロジー演算子 d の双対が境界演算子 ∂ に等しいことがわかった：

$$d \leftrightarrow \partial. \tag{10.2.11}$$

この双対性により，境界演算子 ∂ も，コホモロジー群に双対なもの，すなわちホモロジーを定義するのではないかと思われる．

話を正確にするために，**単体**(simplex)を例にとって境界演算子 ∂ と面 C の意味を明らかにしよう．点 p_1 から p_2 へのびている線分を，1 次元単体と定義しよう．1 次元単体は決まった向きづけ，すなわち方向をもっている：

$$\text{線分} = [p_1, p_2] = -[p_2, p_1]. \tag{10.2.12}$$

三角形を 2 次元単体として定義しよう．これは 3 つの点すなわち頂点で名前をつけられる：

$$\text{三角形} = [p_1, p_2, p_3] = -[p_1, p_3, p_2]. \tag{10.2.13}$$

2次元単体は3点につき巡回対称であるが，点を反巡回的に並べると符号が替わることに注意しよう．次にこの概念を一般化して，N 次元単体を

$$N\text{ 次元単体} = [p_1, \ldots, p_{N+1}] \tag{10.2.14}$$

により導入する．（点 p_i の差をとってできるベクトルは，線形独立でなければならないことに注意．そうでないと単体がつぶれて低次元のものになる.）

さて，m 次元単体を $m-1$ 次元単体に写像する境界演算子を定義しよう．たとえば，

$$\partial_1[p_1, p_2] = [p_1] - [p_2] \tag{10.2.15}$$

である．ここで $[p]$ は点である．このように線分の「境界」を，2端点と定義する．三角形に作用させると，境界演算子は線分を作る：

$$\partial_2[p_1, p_2, p_3] = [p_1, p_2] + [p_2, p_3] + [p_3, p_1]. \tag{10.2.16}$$

このように2次元単体(三角形)に境界演算子を作用させると，それが単に3つの辺にわかれ，線すなわち1次元単体となるのである．

境界演算子がべき零であることは，容易に確かめられる．たとえば簡単な三角形の場合は，

$$\begin{aligned}\partial_1\partial_2[p_1, p_2, p_3] &= \partial_1\{[p_1, p_2] + [p_2, p_3] + [p_3, p_1]\}\\ &= [p_1] - [p_2] + [p_2] - [p_3] + [p_3] - [p_1]\\ &= 0.\end{aligned} \tag{10.2.17}$$

したがって境界演算子がべき零であるという重要な結果が得られる：

$$\partial^2 = 0.$$

これは任意の場合へ一般化できる．そこで境界演算子がどのように N 次元単体に作用するかを定義しよう：

$$\partial_N[p_1, \ldots, p_{N+1}] = \sum_{i=1}^{N+1} (-1)^i [p_1, \ldots, \hat{p}_i, \ldots, p_{N+1}]. \tag{10.2.18}$$

ここで ^ のついた点は除外される．このように境界演算子は，N 次元単体を $(N-1)$ 次元単体に写像するものである．そして，

$$\partial_{N-1}\partial_N = 0 \tag{10.2.19}$$

を一般の場合に容易に示すことができる．

ホモロジーの理論との類推で，**サイクル**(cycle) Z の集合を，

$$\partial Z = 0 \tag{10.2.20}$$

に従う単体の集合として定義しよう．たとえば，2次元のドーナツまたはトーラスをとってみよう．この面上に書けるサイクルには何種類かある．たとえば第5章で，連続的に点に縮められないドーナツ上のサイクルが2種類あることを見た．しかしトー

ラス面上の閉曲線で，連続的に点に縮められるサイクルもある．そこで後者のサイクルを除くような定義が望ましい．

今**境界**の集合 B を，何か高次元単体 C の境界として書ける単体として定義しよう：

$$B = \partial C. \tag{10.2.21}$$

境界の集合は，サイクルの集合の部分集合であることに注意しよう：

$$境界 \subset サイクル. \tag{10.2.22}$$

2 つの単体が同じ同値類にあるというのは，それらの差が境界のみになっていることである．このように，すべての同等でない単体の集合を取り出すことが望ましく，これは**第 p ホモロジー群**

$$H_p(M) = \frac{p\text{-サイクル}}{p\text{-境界}} \tag{10.2.23}$$

を定義することによりできる．これにより，連続的に点に縮められるトーラス上の不要なサイクルを除き，トーラスをまわる 2 つの独立なサイクルだけを取り出すことができる．このように，ホモロジーの概念は自然なものである．

10.3 コホモロジーとホモロジー

コンパクト多様体に対し，ホモロジーとコホモロジー群の間の関係はどんなものであろうか？ その間にある双対性のために，それらは同じ次元をもつことが示せる．ここで Betti 数を H の次元として定義しよう：

$$b_p = \dim H^p(M) = \dim H_p(M). \tag{10.3.1}$$

c_p をコンパクト多様体 M 上に定義されたサイクルの集合，ω_p を M 上に定義された閉形式の集合とする．そして，行列 Ω_{pq} を，

$$\Omega(c_p, \omega_q) = \int_{c_p} \omega_q \tag{10.3.2}$$

によって作る．行列 Ω は，**周期行列**(period matrix)と呼ばれる((5.6.31)と(5.11.8)を見よ)．するとまったく一般的な条件の下で，それが逆をもつ行列であることが示せる．つまり，それは行列式が 0 でない $N \times N$ 行列である．ところが，もし周期行列が N 次元の正方行列であるのならば，閉形式 ω_p の次元はサイクル c_p の次元に等しく，したがって Betti 数がコホモロジーとホモロジー群の両方に対し同じであることが証明される．これは極めて重要な結果である．なぜなら，特定の多様体の Betti 数を計算するのに，その局所的(コホモロジー)または大域的(ホモロジー)性質のいずれを用いてもよいことになるからである．

Betti 数が位相的な量で，多様体の全体の位相にしかよらないことも重要である．したがって，Betti 数のどんな線形結合も位相的な数である．とくにもっとも重要なものはオイラー数

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^i b_i \tag{10.3.3}$$

である．

これらの Betti 数の性質を理解するには，ラプラシアンなど演算子をいくつか導入しなければならない．また，p 形式を $(N-p)$ 形式に変える Hodge の $*$ 作用素も導入しよう：

$$\begin{aligned} &*\left(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right) \\ &= \frac{\sqrt{g}}{(n-p)!} \varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{i_{p+1} i_{p+2} \cdots i_N} dx^{i_{p+1}} \wedge dx^{i_{p+2}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_N}. \end{aligned} \tag{10.3.4}$$

ここで，$\varepsilon_{ijkl\cdots}$ は N 次元の完全反対称テンソルである．さらに，

$$\begin{aligned} **\,\omega_p &= (-1)^{p(N-p)} \omega_p \\ \omega_p \wedge *\,\omega_q &= \omega_q \wedge *\,\omega_p \end{aligned} \tag{10.3.5}$$

に注意しよう．

N 空間では，p 形式と $(N-p)$ 形式の積は N 形式を与え，それは体積 $d^N x$ に比例する．したがって，p と $(N-p)$ 形式の積を積分すればふつうの数が得られる．そこで内積

$$(\alpha_p \mid \beta_p) = \int_M \alpha_p \wedge *\,\beta_p \tag{10.3.6}$$

を定義しよう．

これでスカラー積の定義ができたので，微分 d の双対 δ を定義できる：

$$(\alpha_p \mid d\beta_{p-1}) = (\delta\alpha_p \mid \beta_{p-1}). \tag{10.3.7}$$

具体的には，d の随伴(adjoint)は，

$$\delta = (-1)^{Np+N+1} * d* \tag{10.3.8}$$

で与えられる．また，

$$\delta^2 = 0 \tag{10.3.9}$$

も得られる．随伴は微分形式の次数を 1 下げ，d は 1 上げることに注意しよう．

ラプラシアン(Laplacian)を

$$\Delta = (d+\delta)^2 = \delta d + d\delta \tag{10.3.10}$$

と定義しよう．

p 形式 ω が調和(harmonic)であるとは，

$$\text{調和：}\quad \Delta\omega = 0 \tag{10.3.11}$$

と定義しよう．

p 形式 ω が coclosed であるとは，

$$\text{coclosed:}\quad \delta\omega = 0 \tag{10.3.12}$$

と定義しよう．

p 形式が coexact であるとは，ある $p+1$ 形式に対し，

$$\text{coexact:} \quad \omega = \delta\alpha \tag{10.3.13}$$

となることと定義しよう．

ここで重要な定理がある．

定理(Hodge)　境界のないコンパクト多様体上で，どんな p 形式も，完全，coexact，調和形式の和に一意的に分解できる．すなわち，

$$\omega_p = d\alpha_{p-1} + \delta\beta_{p+1} + \gamma_p. \tag{10.3.14}$$

ここで γ_p は調和形式である．

これは強力な結果である．なぜなら，各コホモロジー類は調和形式を 1 つだけしか含まないことが示せるからである．これを示すには，微分形式とそのラプラシアンとの内積を作る：

$$(\omega \mid \Delta\omega) = |\delta\omega|^2 + |d\omega|^2. \tag{10.3.15}$$

したがって，微分形式が調和である(つまり $(\omega|\Delta\omega)=0$)ことは，それが完全で coexact であることと同等である(なぜなら $|\delta\omega|^2=0$ で $|d\omega|^2=0$ だから)．実際，

$$\delta\omega = d\omega = 0 \text{ の場合だけ}, \Delta\omega = 0 \tag{10.3.16}$$

が示せる．

しかし，$d\omega=0$ ならば $d\delta\beta=0$ となり，$\delta\beta=0$ となる．したがって，(10.3.14)は

$$\omega = d\alpha + \gamma \tag{10.3.17}$$

に帰着する．このように，**すべてのコホモロジー類は 1 つの調和代表元を含む**のである．

完全形式の各同値類の中に調和代表元が 1 つあるということから，Betti 数を定義する別の方法が得られる．Betti 数は多様体上に独立な調和形式がいくつあるかを数えるということができるのである．こうして，Betti 数の同等な表し方が次のように得られる：

$$\text{Betti 数} = \begin{cases} \text{独立な閉形式の数} \\ \text{独立なサイクルの数} \\ \text{調和形式の数.} \end{cases} \tag{10.3.18}$$

このように，Betti 数を計算するにはこの 3 つの同等な形のどれを用いてもよいのである．

独立な調和形式による最後の Betti 数の表し方により，Betti 数の別の定義もできる．調和形式の集合は，ラプラシアンの核(すなわち，0 に写像される微分形式)として表せる．したがって，Betti 数を

$$b_p = \begin{cases} \dim \ker \Delta_p \\ \dim H_p \\ \dim H^p \end{cases} \tag{10.3.19}$$

とも定義できる．

これらの Betti 数のいくつかの性質を調べておくことが役に立つことが後でわかる．まず N 次元多様体に対して，いつでもスカラー積

$$(\omega_p \mid \omega_{N-p}) = \int_M \omega_p \omega_{N-p} \tag{10.3.20}$$

を定義できる．その結果これら 2 つの空間は，同じ数の独立要素をもつ．したがって，

$$b_p = \dim H^p = b_{N-p} = \dim H_{N-p}. \tag{10.3.21}$$

これは，**ポアンカレ双対性**と呼ばれる．ふつう $b_0 = 1$ ととるので，$b_N = 1$ である．

ポアンカレ双対性を証明する別の方法は，特定の微分形式が調和であれば，その双対も調和であることに注意することであろう：

$$\Delta\omega = 0 \to \Delta * \omega = 0. \tag{10.3.22}$$

ところが，独立な調和形式の数は Betti 数に等しく，Hodge $*$ 演算は p 形式を $(N-p)$ 形式に変えるので，ポアンカレ双対性が成り立たねばならないのである．

最後に，多様体の積があれば，積多様体のオイラー数は各多様体のオイラー数の積になる：

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \times \chi(N). \tag{10.3.23}$$

(10.3.3) に与えられている Betti 数によってこれを書けば，

$$b_k(M \times N) = \sum_{p+q=k} b_p(M) b_q(N) \tag{10.3.24}$$

となる．これらは積多様体の Kunneth 公式と呼ばれている．

いくつかの簡単な多様体をとり，その Betti 数を計算してみよう．

2 次元トーラス

2 次元トーラスは，2 通りの独立な方法でサイクルに切断できる．したがって，トーラス上に描ける独立な 1 サイクルの次元は 2 である．したがって，$b_1 = 2$．またポアンカレ双対性により，

$$T_2 : \begin{cases} b_0 = b_2 = 1 \\ b_1 = 2 \end{cases} \tag{10.3.25}$$

を得る．したがってトーラスのオイラー数 (10.3.3) は，

$$\chi(T_2) = 1 - 2 + 1 = 0 \tag{10.3.26}$$

である．

リーマン面

第 5 章で見たように，種数 g のリーマン面を独立なサイクルにわけるには $2g$ 通りの方法がある．各穴またはハンドルがそのようなサイクルを 2 つもつのである．したがって $b_1 = 2g$．こうして，

$$\begin{cases} b_0 = b_2 = 1 \\ b_1 = 2g \end{cases} \tag{10.3.27}$$

を得る．したがって閉じたリーマン面のオイラー数は，

$$\chi(M) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g \tag{10.3.28}$$

である．

N 次元球面

球面 S_N 上のサイクルは，もちろんいつでも点に縮小できる．したがって独立なサイクルはない．つまり，

$$S_n : \begin{cases} b_0 = b_N = 1 \\ b_p = 0 & \text{その他.} \end{cases} \tag{10.3.29}$$

したがって，オイラー数は，

$$\chi(S_N) = \begin{cases} 0 & N \text{ が奇数の場合} \\ 2 & N \text{ が偶数の場合.} \end{cases} \tag{10.3.30}$$

とくに，

$$T_2 = S_1 \times S_1 \tag{10.3.31}$$

により，オイラー数の積の規則を用いてトーラスのオイラー数が

$$\chi(T_2) = \chi(S_1)^2 = 0 \tag{10.3.32}$$

であることが示せる．これは前の計算と一致する．

球面の積

(10.3.24)を用いて，積 $S_3 \times S_3$ に対し

$$S_3 \times S_3 : \begin{cases} b_0 = b_6 = 1 \\ b_3 = 2 \\ b_p = 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{10.3.33}$$

が示せる．オイラー数は 0 になることがわかる．これは 3 次球面のオイラー数も 0 であることから期待される：

$$\chi(S_3 \times S_3) = \chi(S_3) \times \chi(S_3) = 0. \tag{10.3.34}$$

同様に，積 $S_2 \times S_2 \times S_2$ をとると，それは Betti 数

$$S_2 \times S_2 \times S_2 : \begin{cases} b_0 = b_6 = 1 \\ b_2 = b_4 = 3 \\ b_p = 0 \qquad \text{その他} \end{cases} \tag{10.3.35}$$

をもつ．そのオイラー数は，

$$\chi(S_2 \times S_2 \times S_2) = \chi(S_2)^3 = 8 \tag{10.3.36}$$

となることがわかる．

4 次元トーラス

4 次元トーラスは

$$T_4 = T_2 \times T_2 \tag{10.3.37}$$

と書くことができる．(10.3.24)の積多様体に対する Kunneth 公式により，容易に

$$T_4 : \begin{cases} b_0 = b_4 = 1 \\ b_1 = b_3 = 4 \\ b_2 = 6 \end{cases} \tag{10.3.38}$$

が得られる．この Betti 数をオイラー数にすれば，予期通り

$$\chi(T_4) = \chi(T_2)\chi(T_2) = 0 \tag{10.3.39}$$

を得る．

6 次元トーラス

6 次元トーラスに対し，

$$T_6 = T_2 \times T_2 \times T_2 \tag{10.3.40}$$

である．したがって，Kunneth 関係を用いて積多様体の Betti 数が求まる．容易に

$$T_6 : \begin{cases} b_0 = b_6 = 1 \\ b_1 = b_5 = 6 \\ b_2 = b_4 = 15 \\ b_3 = 20 \end{cases} \tag{10.3.41}$$

を示すことができる．これからオイラー数は 0 に等しいことがわかる：

$$\chi(T_6) = 0. \tag{10.3.42}$$

T_6 中の各円周がオイラー数 0 をもつのでこれも正しい．明らかにこれらの簡単な規則を用いて，T_N の Betti 数を求めることが可能である．

実および複素射影空間

空間 CP_N は，ふつうの複素 $(N+1)$ 次元空間をとり，ある 0 でない複素数 λ に対し同一視

$$z_p = \lambda z_p \tag{10.3.43}$$

をすることにより得られる．この最後の条件が，複素 $(N+1)$ 次元空間を複素射影 N 次元空間にするのである．CP_N は実射影空間 P_N の一般化である．後者は実 $(N+1)$ 次元空間で，ある 0 でない実数 k に対し，

$$x_p = kx_p \tag{10.3.44}$$

による同一視をして作られる．これはまた球面 S_N で対心点を同一視しても得られる．実射影および複素射影空間の例は，

$$\begin{aligned} CP_1 &= S_2 \\ P_3 &= \mathrm{SO}(3) = \mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2 \\ CP_N &= \frac{\mathrm{SU}(N+1)}{\mathrm{U}(N)} \end{aligned} \tag{10.3.45}$$

などである．その Betti 数は

$$P_N : \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_N = 0 \quad (N\text{ が偶数}); \quad = 1 \quad (N\text{ が奇数}) \\ b_i = 0 \quad \text{その他} \end{cases} \tag{10.3.46}$$

$$\chi(P_N) = 1 \quad (N\text{ が偶数}); \quad = 0 \quad (N\text{ が奇数})$$

および

$$CP_N : \begin{cases} b_{\text{偶}} = 1 \\ b_{\text{奇}} = 0 \end{cases}$$

である．したがって，

$$\chi(CP_N) = N + 1 \tag{10.3.47}$$

となる．

10.4 Kähler 多様体

今までは主に実多様体を議論してきた．しかしわれわれの結果は，非常に容易に複素多様体に拡張できる．

N 次元複素多様体を定義するには，$2N$ 次元実多様体とふつうの複素数 $z = x + iy$ $(i^2 = -1)$ の一般化が必要である．$2N$ 次元実空間があれば，必要なものは i のかわりになる $2N \times 2N$ テンソル場 J_i^j で，行列の式として，

$$J^2 = -1 \tag{10.4.1}$$

をみたすものである．そうすると，複素数として

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + J\boldsymbol{y} \tag{10.4.2}$$

が定義できる．

このようなテンソル場をもつ多様体は，**概複素**(almost complex)と呼ばれる．

しかし単にテンソル場 J が存在する以上のことが必要である．それを対角化したい．つまり，複素座標

$$\begin{aligned} z_a &= x_a + iy_a \\ \bar{z}_a &= x_a - iy_a \end{aligned} \tag{10.4.3}$$

を使って，座標変換をして，

$$J_a^b = i\delta_a^b \tag{10.4.4}$$

としたいのである．問題は座標変換

$$z'_a = z'_a(z_b) \tag{10.4.5}$$

を用いて，ある点 p の近傍で常に J を対角化できるかということである．(z'_a は $\bar{z}$ の関数ではない.)　このような座標変換は**正則**(holomorphic)と呼ばれ，解析的という概念を一般化したものである．異なる点 p に対してはもちろん異なる正則変換を用いてつなぎ合わせ，全空間をおおうようにしなければならない．

多様体のどの点 P の近傍でも J を対角化できる正則変換をいつでも見つけられるならば，多様体が複素構造をもち**複素多様体**(complex manifold)であるという．

こうして，次の類似が得られる：

1 次元	N 次元
i	$J_a^b = i\delta_a^b$
解析的	正則
$z = x + iy$	$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + J\boldsymbol{y}$

(10.4.6)

(直観的には，J が対角になっている近傍をつなぎ合わせることは，一般相対論の「エレベーターの問題」と似ている．一般座標変換により，任意の点で局所的に Christoffel 記号を 0 に変換することが常にできる．これはエレベーターが自由に落下すれば重力がなくなるのに対応している．しかし一般に，大域的にすべての Christoffel 記号を 0 に変換することはできない．できるのは空間が平坦なときだけである．しかし多様体のどの点でも，エレベーターの系に入ることはできる.)

最初は，この定義は簡単な概念なのにくどいように思える．しかしある種の $2N$ 次元実多様体は，この基準にあわないことが示せる．たとえば球面 S_{2N} は，($S_2 = CP_1$ なので S_2 を除き)複素多様体ではない．したがって $2N$ 次元実多様体が，N 次元複素多様体として書けるということは，全然明らかなことではないのである．

さて，これらの複素多様体上の微分形式を議論しよう．基底微分を

$$dz^j = dx^j + idy^j \tag{10.4.7}$$

と複素化しよう．そして p 形式の概念を，(p,q) 形式に一般化する：

$$\omega = \omega_{ijk\cdots u;\bar{i}\bar{j}\bar{k}\cdots\bar{u}} dz^i \wedge dz^j \cdots dz^u \wedge d\bar{z}^i \wedge d\bar{z}^j \cdots d\bar{z}^u. \tag{10.4.8}$$

ここで p 個の棒なし添字と，q 個の棒つき添字がある．次に，2 つの外微分

$$\begin{aligned} \partial\omega &= \frac{\partial}{\partial z^l}\omega_{ijk\cdots;\bar{i}\bar{j}\bar{k}\cdots\bar{u}} dz^l \wedge dz^i \cdots \wedge d\bar{z}^u \\ \bar{\partial}\omega &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}^l}\omega_{ijk\cdots;\bar{i}\bar{j}\bar{k}\cdots\bar{u}} d\bar{z}^l \wedge dz^i \cdots \wedge d\bar{z}^u \end{aligned} \tag{10.4.9}$$

を定義する．これらの 2 つの微分の性質は，

$$\begin{cases} \partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0 \\ \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0 \\ d = \frac{1}{2}(\partial + \bar{\partial}) \end{cases} \tag{10.4.10}$$

である．各形式は 2 つの添字 (p,q) をもつ．これを用いれば新しいコホモロジー群が定義できる．d に基づく de Rahm コホモロジーの代わりに，$\bar{\partial}$ に基づく Dolbeaut コホモロジーが得られるのである．d のかわりに $\bar{\partial}$ を用いて，(p,q) 形式に閉と完全を定義できる：

$$H^{p,q}(M) = \frac{\bar{\partial}\text{閉 } (p,q) \text{ 形式}}{\bar{\partial}\text{完全 } (p,q) \text{ 形式}}. \tag{10.4.11}$$

前と同じく，随伴演算子とラプラシアンも作れる．実は複素の場合，ラプラシアンが 2 つ

$$\begin{aligned} \Delta_\partial &= \partial\partial^\dagger + \partial^\dagger\partial \\ \Delta_{\bar{\partial}} &= \bar{\partial}\bar{\partial}^\dagger + \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial} \end{aligned} \tag{10.4.12}$$

ある．ここで Hodge の定理の複素版が得られる．

定理（Hodge） すべての複素 (p,q) 形式は，一意的な分解

$$\omega = \alpha + \bar{\partial}\beta + \bar{\partial}^\dagger\gamma \tag{10.4.13}$$

をもつ．ここで α は調和形式

$$\Delta_\partial \alpha = 0$$

であり，β と γ はそれぞれ $(p,q-1)$ 形式と $(p,q+1)$ 形式である．

またBetti 数の一般化もあり，

$$\dim H^{p,q}_{\partial}(M) = h^{p,q} \tag{10.4.14}$$

で与えられる．Betti 数との関係は，

$$b_n = \sum_{p+q=n} h^{p,q} \tag{10.4.15}$$

である．また複素共役により，

$$h^{p,q} = h^{q,p}$$

と，ポアンカレ双対性

$$h^{p,q} = h^{N-p,N-q} \tag{10.4.16}$$

も得られる．

ここで **Kähler 多様体**が定義できる．エルミートな計量 $g_{i\bar{j}}$ をもつ複素多様性があれば，いつでも形式

$$\Omega = g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j \tag{10.4.17}$$

が作れる．これは Kähler 形式と呼ばれる．そして，

$$d\Omega = 0 \tag{10.4.18}$$

であれば，その複素多様体を Kähler と呼ぶ．つまり Kähler 多様体は，閉の Kähler 形式をもつのである．

上の定義のために，Kähler 多様体は多くの美しい性質をもち，もっとも美しい複素多様体の 1 つとなっている．ここでは単にその性質をいくつか挙げるだけにする．

1. Kähler 多様体のエルミートな計量は 1 つの関数，すなわち Kähler ポテンシャル ϕ の微分により書ける：

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}. \tag{10.4.19}$$

2. 具体的計算により，容易に Kähler 多様体が

$$2\Delta_d = \Delta_\partial = \Delta_{\bar{\partial}} \tag{10.4.20}$$

をみたすことが示せる．これは，Kähler 多様体上で作れるいろいろなラプラシアンがすべて同じであることを示している強力な恒等式である．したがって，Kähler 多様体にはどのラプラシアンを用いても同じである．

3. もし多様体が Kähler 計量をもてば，Betti 数の偶の成分は 1 以上でなければならず，奇の Betti 数は偶数でなければならない．すなわち，整数 p と n に対し

$$\text{Kähler} \ \rightarrow \begin{cases} b_{2p} \geq 1 \\ b_{2n+1} = \text{偶数} \end{cases} \tag{10.4.21}$$

である．(この簡単な基準により，多くの種類の多様体が排除される．たとえば，これで $S_3 \times S_3$ が Kähler 計量をもつ多様体であることが否定される．なぜなら，$b_2 = 0$ であるから．また P_N も排除されるが，CP_N は許される．)

4. もし J_m^n テンソルが共変的に一定ならば計量は Kähler である．複素多様体に対しては逆も正しい：

$$\nabla^a J_a^b = 0 \leftrightarrow \text{エルミートな計量が Kähler.} \tag{10.4.22}$$

5. もし複素多様体のねじれ率(torsion)形式が 0 ならば，計量は Kähler である．

6. Kähler 多様体の 0 でない Christoffel 記号は,

$$\Gamma^c_{ab} = g^{c\bar{c}} g_{a\bar{c},b} \tag{10.4.23}$$

だけである．曲率テンソルの 0 でない成分は,

$$R^d_{ab\bar{c}} = -\Gamma^d_{ab,\bar{c}} \tag{10.4.24}$$

と，対称性と複素共役で関係のつく他の成分だけである．縮約した Ricci テンソルは,

$$R_{a\bar{b}} = -\frac{\partial^2(\ln\det g)}{\partial z^a \partial \bar{z}^{\bar{b}}} \tag{10.4.25}$$

となる．2 形式

$$R = R_{a\bar{b}} dz^a \wedge d\bar{z}^{\bar{b}} \tag{10.4.26}$$

は閉じている．すなわち，$dR = 0$.

7. 直接の帰結として，Kähler 多様体は $\mathrm{U}(N)$ ホロノミーをもつ．実は Kähler 多様体のもう 1 つの定義としてこれが使えるのである．ホロノミー群は，多様体のまわりに閉じた経路を作って生成される群で,

$$[D_a, D_b] \sim R^{ij}_{ab} M_{ij} \tag{10.4.27}$$

の関数であることに注意しよう．ただし M_{ij} はある $2N$ 次元接空間群の回転行列である．この回転の係数は，反対称リーマンテンソル R_{abcd} の関数であり，R_{abcd} は $2N \times 2N$ 反対称回転行列の要素と見なせる．このように，一般の多様体に対し，$\mathrm{SO}(2N)$ ホロノミーがある．しかし多様体が Kähler ならば，前に得た曲率テンソルへの制限のために，$\mathrm{SO}(2N)$ 回転行列がその部分群 $\mathrm{U}(N)$ に限られることが示せる．(10.4.24)が曲率テンソルの 0 でない唯一の成分であるという制限のために，$\mathrm{SO}(2N)$ 対称性が破れるのである．

8. $\mathrm{U}(N)$ ホロノミーをもつ Kähler 多様体は，その第 1 Chern 類が 0 であることを要求すればさらに制限される．この場合，$\mathrm{U}(N)$ ホロノミーが $\mathrm{SU}(N)$ ホロノミーになる．実はすべての N に対して成り立つ Calabi-Yau の定理があって，**第 1 Chern 類が 0 の Kähler 多様体はいつでも $\mathrm{SU}(N)$ ホロノミーの Kähler 計量をもつのである**．実際第 1 Chern 類が 0 になることは，Ricci 平坦な計量と同等であることが示せる．したがって，この 2 つの概念をとりかえて使ってもよい．

ここで，Kähler 多様体の具体例を考えておくのが有用である．

リーマン面

いかなる向きづけ可能なリーマン面も，Kähler 計量をもつ．どんなリーマン面の線要素も,

$$ds^2 = e^{\sigma} dz d\bar{z} \tag{10.4.28}$$

の形にできるので Kähler である．なぜならば，いつでも Kähler ポテンシャルを

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}\phi = e^\sigma \tag{10.4.29}$$

となるようにとれるからである．リーマン面上のどんな 2 形式も，Kähler 形式も含めて閉じているので，リーマン面は自明に Kähler である．

複素 N 次元空間

複素 N 次元空間は自明に Kähler である．なぜなら，その標準的線素

$$ds^2 = \sum_i |dz^i|^2 \tag{10.4.30}$$

がいつでも Kähler 形式にできるからである．

球面

S_N は，一般に Kähler 計量をもたないことに注意する．これは，0 でない整数 p に対し，偶 Betti 数 b_{2p} がすべて 0 になるからである．したがって，それらは 1 以上でなく Kähler 多様体の条件をみたさない．例外は 2 次元球面 S_2 で，これは（0 でない）偶 Betti 数をもたない．2 次元球面が Kähler 計量をもつことを示すには，2 次元球面の線素が

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} \tag{10.4.31}$$

になることに注意する．これを複素形にすれば，Kähler 形式

$$\Omega = \frac{i}{2}\frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} \tag{10.4.32}$$

が書ける．この Kähler 形式は完全であり，したがって空間は Kähler 計量をもつ．S_2 は Kähler であるが，$c_1 \neq 0$ であり Ricci 平坦ではない．

p と q が奇数であれば，$S_p \times S_q$ は複素多様体であることに注意する．しかしこれは，それらが Kähler であることを意味するわけではない．実際，$S_3 \times S_3$ と $S_1 \times S_5$ は両方とも複素多様体であるが，Kähler ではない．しかし $S_2 \times S_2 \times S_2$ は Kähler である（が，Ricci 平坦ではない）．

N 次元複素射影空間

CP_N が Kähler であることを証明するには，計量が CP_N 上で Fubini-Study 計量として書けることに注意すればよい：

$$\Omega = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\ln\left(1 + \sum_{i=1}^{N} z^i \bar{z}^i\right). \tag{10.4.33}$$

CP_N の複素部分多様体

CP_N の複素部分多様体も Kähler であることは容易にわかる．実際部分多様体に対しても，CP_N に定義されている計量を使えばよいのである．ただし，部分多様体に接している計量テンソルの成分だけをとるように注意しなければならない．もとの計量が Kähler なので，（同じ計量である）部分多様体の計量も Kähler のはずである．

トーラス

2 次元トーラス T_2 は，実は第 1 Chern 類が 0, $c_1 = 0$ である．また 4 次元トーラス T_4 が Kähler であることも示せる．最後に 6 次元トーラス T_6 は Kähler で Ricci 平坦である．したがって 6 次元トーラスへのコンパクト化は，$N = 1$ 超対称性を保つという望ましい性質をもつように見える．ところが 6 次元トーラスの欠点としてあまりたくさんの対称性が残ってしまう．T_6 上では $N = 4$ 超対称性が保たれ，現象論の観点からは受け入れられない．

これらの結果を表にまとめよう．

多様体	複素	Kähler	R-Kähler	χ
S_2	Y	Y	N	2
S_{2n-1}	N	N	N	0
S_{2n+2}	N	N	N	2
$(S_3)^2$	Y	N	N	0
$S_1 \times S_5$	Y	N	N	0
$(S_2)^3$	Y	Y	N	8
$S_1 \times S_{2n+1}$	Y	Y	Y	0
T_2	Y	Y	Y	0
T_6	Y	Y	Y	0
CP_3	Y	Y	N	4
CP_M	Y	Y	–	$M+1$

ここで，R-Kähler は Ricci 平坦で Kähler のことであり，Y (N) はイエス（ノー）を示す．χ はオイラー数，$n = 1, 2, 3, \ldots$ である．

さらに，Ricci 平坦である条件により，Kähler 多様体にさらに制限が加わる．たとえば複素 3 次元の Kähler 多様体が $c_1 = 0$ をもつのは，共変的に一定の正則 3 形式 ω が存在する場合に限ることが示せる．これはたとえば，$S_2 \times S_2 \times S_2$ が Ricci 平坦な Kähler 計量をもたないことを示している．（この多様体が，$b_3 = 0$ をもつことはわかっている．したがって定義により，この多様体上には調和 3 形式はない．ところがこれは正則 3 形式をもたないことを意味している．したがって，Ricci 平坦な Kähler 計量はない．）

これから得られる簡単な帰結は，複素 3 次元のどんな調和 $(p, 0)$ 形式にも，ω をかけて調和 $(0, 3-p)$ 形式を作ることができることである：

$$c_1 = 0 \to h^{p,0} = h^{0,3-p}. \tag{10.4.34}$$

ω が共変的に一定で，ラプラシアンの下で定数のように振る舞うので，この恒等式が成り立つ．したがって調和形式は，ω をかけても調和形式である．また $(p,0)$ 形式はエルミート計量テンソル $g_{a\bar{b}}$ と縮約しているので，$(0,3-p)$ 形式となる．

これによりさらに，**ほとんどすべての Hodge 係数を消す**ことができる．いろいろな反転対称性と前の対称性を用いることにより，$h^{1,1}, h^{2,1}, h^{1,0}$ だけが SU(3) ホロノミーをもつ多様体の独立な係数として残ることが示せるのである．これらのうち $h^{1,0}$ も次の理由で消せる．ラプラシアンは，いつでも

$$\Delta_d = -\nabla^2 + \text{曲率項} \tag{10.4.35}$$

と展開できることがわかっている．1 形式に作用させると，曲率テンソルの項は Ricci テンソルになる．ところが Ricci 平坦な多様体上では，Ricci テンソルは 0 である．したがって調和 1 形式は共変的に一定でなければならない．これは調和 1 形式の Betti 数が 0，すなわち $b_1 = 0$ を意味する．ところが(10.4.15)により，これは $h^{1,0} = 0$ も意味する．以上を一緒にすれば，Ricci 平坦な多様体に対し，

$$\chi = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} h^{p,q} = 2(h^{1,1} - h^{2,1}) \tag{10.4.36}$$

を示すことができる．Ricci 平坦な計量に対するこの最後の等式は，世代の問題を議論するときに極めて重要になる．$h^{1,1}$ と $h^{2,1}$ が，多様体式に定義できる正と負のカイラリティーのフェルミオンの数に関係していることがわかるのである．したがって上の式は，世代数がオイラー数の半分ということを示している：

$$\text{世代数} = \frac{1}{2}|\chi|. \tag{10.4.37}$$

こうして世代数が位相的に導出できる！

10.5 スピン接続の埋め込み

代数的位相のこれらの基本的結果がいくつか得られたので，弦の現象論にこれらの結果を適用しよう．

$N=1$ 超対称性の条件が，共変的に一定のスピノールの存在を意味することを前に見た．それはさらに，6 次元多様体 K が Kähler で，Ricci 平坦で，SU(3) ホロノミーをもつことを意味していた：

$N=1$ 超対称性 $\to$ 共変的に一定のスピノール $\to$ Kähler, Ricci 平坦，SU(3) ホロノミー．

さて残りの条件，ビアンキ恒等式(10.1.9)

$$dH = \mathrm{Tr}\, R \wedge R - \frac{1}{30} \mathrm{Tr}\, F \wedge F \tag{10.5.1}$$

を使おう．これは実は奇妙な恒等式である．なぜなら，右辺にリーマンテンソルと Yang-Mills テンソルの両方があるからである．この式は何の内容もない恒等式であったが，今の仮定

$$d\phi = H = 0 \tag{10.5.2}$$

があるときには，この式をみたすのはとても難しいことがわかる．つまり，系が制限されすぎているために，この式をみたすのは自明なことではないのである．

この奇妙な等式をみたす 1 つの魅力的な方法は，$E_8 \otimes E_8$ **ゲージ場の一部をリーマンスピン接続と等しくおくことである**．後者は SU(3) ホロノミーをもつ．これにより，スピン接続と Yang-Mills ゲージ場の間に自明でないつながりができる．この埋め込みを次のようにゲージ場に行う：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}. \tag{10.5.3}$$

ここで ω はスピン接続で，ゲージ場行列の一部に入っている．このように，スピン接続場を Yang-Mills ゲージ場に埋め込むには，SU(3) を含むゲージ群の部分群を見つける必要がある．これはもちろん，Yang-Mills 場のもとのゲージ対称性を破っていることを意味する．もっとも簡単な分解は，

$$E_8 \otimes E_8 \supset \mathrm{SU}(3) \otimes E_6 \otimes E_8 \tag{10.5.4}$$

である．けれども，クレプシュ-ゴルダン係数がビアンキ恒等式を正確にみたすことを確かめねばならない．とくにビアンキ恒等式(10.1.9)の中の因子 $\frac{1}{30}$ を得ることを示さねばならないのである．

Yang-Mills ゲージ場は E_8 の随伴表現で 248 成分ある．これらの 248 成分を $\mathrm{SU}(3) \otimes E_6$ の表現にわけねばならないが，これはいつでも可能である．

$$\mathbf{248} = (\mathbf{3}, \mathbf{27}) \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \overline{\mathbf{27}}) \oplus (\mathbf{8}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{78}) \tag{10.5.5}$$

を得る．(10.5.1)がみたされているかどうかを見るために，SU(3) の随伴表現から $\mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{3}}$ に変えよう．λ を SU(3) の生成子として，$\mathbf{8}$ 表現と $\mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{3}}$ 表現のこの行列の 2 乗のトレースの間の関係を知りたい．答は，

$$\mathrm{Tr}(\lambda_8^a)^2 = 3\,\mathrm{Tr}(\lambda_{\mathbf{3}+\bar{\mathbf{3}}}^a)^2 \tag{10.5.6}$$

である．(10.5.5)の SU(3) の内容に注目しよう．SU(3) の $\mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{3}}$ 表現の 27 組の場と，$\mathbf{8}$ 表現の 1 組があることに注意する．しかし(10.5.6)で見たように，$\mathbf{8}$ 表現の 2 乗のトレースの和を SU(3) 行列の $\mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{3}}$ 表現に変えるときは，3 をかけなければならない．こうして，$\mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{3}}$ 表現の中の全体の大きさは，

$$27 + 3 \times 1 = 30$$

に等しく，全体の因子は 30 となる．スピンの埋め込みのために曲率テンソルは Yang-Mills テンソルと同じ空間に定義されており，(10.5.5)の SU(3) の特定の表現を勘定すると足りない因子 30 が出てくるので，(10.5.1)がみたせるのである．

$\mathrm{SU}(3) \otimes E_6$ への破れは現象論的には良いものである．なぜならば E_6 は GUT の模型作りに広く調べられているからである．

これに対しもとの E_8 群は，カイラルフェルミオンを記述するのに必要な複素表現をもたないが，E_6 はもっている．実際 $\mathbf{27}$ 多重項は，まさに E_6 での模型作りで好ま

しい多重項である．群 E_6 は低エネルギー超対称性の観点からも良いものである．なぜならば，**27** のフェルミオンは Higgs の **27** と超対称多重項を作り得るからである．

まとめると，現象論的に良い結論

$$\mathrm{Tr}\, R \wedge R = \frac{1}{30}\mathrm{Tr}\, F \wedge F \to \text{スピン埋め込み} \to \mathbf{27}\ \text{フェルミオン} \tag{10.5.7}$$

を得られる．

フェルミオンが **27** 表現なので，次の問が考えられる．いくつの世代があるか？ すでに見たように，GUT 理論は世代の問題をかかえていた．1 つより多い世代を仮定する理由はないのである．

超弦の描像では情況はまったく逆である．以下であまりに多くの世代が出ることを示す！

10.6 フェルミオンの世代

代数的位相の弦の現象論への強力な応用の 1 つは，純粋に位相的な考察により世代数が計算できることである．

理論により予言される世代の数を計算するには，まず質量のない粒子の数を計算しなければならない．粒子の 10 次元クライン-ゴルドン演算子は，コンパクト化の後 4 次元と 6 次元の 2 つのクライン-ゴルドン演算子の和になる：

$$\Box_{10}\psi = (\Box_4 + \Box_6)\psi = 0. \tag{10.6.1}$$

一般に，$\Box_6$ は m^2 で表される固有値をもつ．すなわち $\Box_6\psi_m = m^2\psi_m$ なので，波動方程式は

$$(\Box_4 + m^2)\psi_m = 0 \tag{10.6.2}$$

となる．4 次元で質量のない部分に興味があるので，$\Box_6$ 演算子の 0 固有値だけをとりたい．すなわち，

$$\Box_4\psi = \Box_6\psi = 0. \tag{10.6.3}$$

これは重要な式で，2 つの解釈がある．第 1 に，これはもちろん 4 次元フェルミオンが質量をもたないことを意味している．第 2 に，これは ψ が 6 次元の調和形式であることも意味している．したがって，4 次元の質量のないモードの数は 6 次元多様体の調和形式の数に関係している．前に(10.3.18)で，p 次の調和形式の数は第 p Betti 数に等しいことを見た．したがって**位相的な議論だけで，世代の数が与えられるのである！** まとめると，

$$m^2 = 0 \to \begin{cases} \psi\ \text{は 6 次元で調和的である．} \\ \psi\ \text{は 4 次元で質量をもたない．} \end{cases}$$

ディラックの指数定理のために，世代の数は位相的な数であると期待される．つまりディラック方程式の解は，一般にゼロモード

$$i\not{D}\psi = 0 \tag{10.6.4}$$

をもち得ることがわかっている．実はこの演算子の指数は，ゼロモードの正と負のカイラリティーの数の差に等しい：

$$\mathrm{Index}(\not{D}) = n_+ - n_-. \tag{10.6.5}$$

ディラックの指数はスピン多様体上に定義された位相的数であるので，前に見つけた特性類に関係していると期待される．実際 SU(3) ホロノミーを議論するとき，

$$\mathrm{Index}(\not{D}) = \frac{1}{2}|\chi(M)| \tag{10.6.6}$$

を得る．ところがディラック指数は世代数にも等しい．なぜなら，1 つの特定のカイラリティーのフェルミオンだけを考えるからである．こうして世代数とディラック指数，またはオイラー数の間の正確な関係は，

$$\text{世代数} = \frac{1}{2}|\chi(M)| \tag{10.6.7}$$

となる．

これを見るには，SU(3) ホロノミーの多様体を考える．そこでは Betti (Hodge) 数は 2 つの添字 p, q をもつ．オイラー数は，

$$\chi(M) = \sum_{p,q}^{3}(-1)^{p+q}h_{p,q} \tag{10.6.8}$$

と書ける．超重力と Yang-Mills の多重項の多重度は許される調和形式の数を計算することにより決まり，それはさらに Betti 数に関係している．超対称対のヘリシティーをその多重度と対比すれば，

$$\begin{array}{ll} \left(2, \frac{3}{2}\right) & h_{0,0} \\ \left(\frac{3}{2}, 1\right) & h_{0,1} \\ \left(1, \frac{1}{2}\right) & (2h_{1,0} + h_{0,1}) \\ \left(\frac{1}{2}, 0\right) & (h_{0,0} + h_{1,1} + h_{2,1}) \end{array} \tag{10.6.9}$$

を得る．$(\frac{1}{2}, 0)$ で与えられるスピン $\frac{1}{2}$ の部分を分析すれば，その多重度が

$$\text{フェルミオン多重度} = h_{0,0} + h_{1,1} + h_{2,1} \tag{10.6.10}$$

に等しいことがわかる．しかしこの多重度はあまりにも大きい．今の場合，**27** と $\overline{\mathbf{27}}$ のスピン $\frac{1}{2}$ フェルミオンに対応する部分だけが必要になる．

前に(10.5.5)で，$E_8 \otimes E_8$ の **248** が $(\mathbf{27}, \mathbf{3})$ と $(\overline{\mathbf{27}}, \bar{\mathbf{3}})$ に分解できることを見た．これら 2 つの表現の各々の多重度は

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{27}, \mathbf{3}) & h_{2,1} \\ (\overline{\mathbf{27}}, \bar{\mathbf{3}}) & h_{1,1} \end{array} \tag{10.6.11}$$

に等しいことが示せる．したがって，世代数は

$$\#(\mathbf{27}) - \#(\overline{\mathbf{27}}) = h_{2,1} - h_{1,1} \tag{10.6.12}$$

に等しい．ここで # は **27** 表現の多重度を表している．ところが(10.4.36)で見たように，この数はオイラー数の絶対値のちょうど半分である．

世代数とオイラー数の間の関係は，それらの間に何らかの関係がある必然的理由はないので少々驚きである．世代数は Yang-Mills ゲージ群 $E_8 \otimes E_8$ の関数であるが，オイラー数は多様体 K_6 の関数である．単純には，この 2 つに相関があるとは考えられない．しかしスピン埋め込みをしてゲージ群をこわし，多様体 K_6 とゲージ群に密接な関係をつけたのでこの 2 つに関係がついたのである．このように，この重要な結果の本質はコンパクト化とスピンの埋め込みの直接の結果である．

次に，一連の Calabi-Yau 計量に対しオイラー数，したがって世代数を計算したい．

前に CP_N 上の Kähler 計量の部分多様体は，同じエルミート計量 $g_{i\bar{j}}$ をもつのでやはり Kähler であることを示した．そこで CP_N の部分多様体の集合で，第 1 Chern 類が 0, $c_1 = 0$ のものを考えたい．これは，ある多項式を 0 において z に制限をつけることによりできる．

CP_4 の部分多様体で，

$$\sum_{i=1}^{5} z_i^5 = 0 \tag{10.6.13}$$

の制限のついたものを考えよう．すると，この多様体の第 1 Chern 類が 0 で，$\chi(M)$ が -200 に等しいことが示せる．

$$Y_{(N;d_1,d_2,\ldots,d_k)} \tag{10.6.14}$$

が，CP_N の中で k 個の d_i 次斉次多項式を 0 とおいて得られる部分多様体を表すとしよう．幸いなことに，単に第 1 Chern 類だけでなく，これらの部分多様体の全 Chern 類の公式が知られている．SU(3) ホロノミーに対し，全 Chern 類は，

$$c = \frac{(1+J)^{k+4}}{\prod_{i=1}^{k}(1+d_i J)} \tag{10.6.15}$$

に等しい．ここで J は，CP_{k+3} の Kähler 形式を規格化することによって得られるある 2 形式である．この公式を展開し，第 1 Chern 類 c_1 を 0 に等しくおくことにより，

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = k + 4 \tag{10.6.16}$$

を得る．こうして，第 1 Chern 類が 0 のものは 5 つだけあることがわかる：

$$\begin{aligned} \chi(Y_{(4;5)}) &= -200 \\ \chi(Y_{(5;2,4)}) &= -176 \\ \chi(Y_{(5;3,3)}) &= -144 \\ \chi(Y_{(6;3,2,2)}) &= -144 \\ \chi(Y_{(7;2,2,2,2)}) &= -128. \end{aligned} \tag{10.6.17}$$

このように，世代数はちょっと大きすぎる！ 原子核合成，宇宙論，および QCD の漸近自由性の議論から，世代数は 3 や 4 など非常に小さいものが望ましいので，これは現象論的に望ましくない．

幸いなことに世代数をさらに下げ，これをずっと小さくすることが，**単連結でない多様体**を考えることによりできる．もとの多様体 M_0 を多様体に自由に作用する（すなわち，固定点がない）不連続対称性群 G で割り，多様体 M を作ろう．G の不連続な生成子の数が $n(G)$ であれば，もとの多様体を不連続群 G で割ったもののオイラー数は，

$$\chi(M) = \frac{\chi(M_0)}{n(G)} \tag{10.6.18}$$

である．ここで，

$$M = \frac{M_0}{G} \tag{10.6.19}$$

である．

さて，前の CP_4 の部分多様体で，

$$\sum_{i=1}^{5} z_i^5 = 0 \tag{10.6.20}$$

のものを考えよう．この多項式は，次の対称性演算の下で不変であることに注意しよう：

$$\begin{aligned}(z_1, z_2, \ldots, z_5) &\to (z_5, z_1, z_2, \ldots, z_4)\\ (z_1, z_2, \ldots, z_5) &\to (z_1, \alpha z_2, \alpha^2 z_3, \ldots, \alpha^4 z_5).\end{aligned} \tag{10.6.21}$$

ここで α は 1 の 5 乗根である．この不連続対称性群は，

$$Z_5 \times Z_5 \tag{10.6.22}$$

で，25 個生成子がある．したがって，この新しい多様体のオイラー数は，

$$\chi(M) = \frac{-200}{25} = -8 \tag{10.6.23}$$

で，4 世代が予言される．

他の型の多くの模型で，かなり「低い」世代数のものが可能である：

$$\begin{aligned}\chi\left(\frac{Y_{(5;3,3)}}{Z_3 \times Z_3}\right) &= -16\\ \chi\left(\frac{Y_{(7;2,2,2,2)}}{Z_2 \times Z_2 \times Z_2}\right) &= -16\\ \chi\left(\frac{Y_{(7;2,2,2,2)}}{X_8}\right) &= -16\\ \chi\left(\frac{Y_{(4;5)}}{Z_5}\right) &= -40.\end{aligned} \tag{10.6.24}$$

ここでの要点は，正しい現象論が得られることではない．不連続群をうまくとれば，十分低い世代数の模型を書くことができそうだということである．超弦理論にカイラルフェルミオンが存在するということ自体が，一種の奇跡であることを強調しておか

ねばならない．たとえば標準的カルーツァ-クライン理論では，4次元でカイラルフェルミオンをもつ理論を作るのに深刻な障害があった．実際カイラルフェルミオンをもつ満足のいく超対称カルーツァ-クライン理論は存在しないのである．したがって，超弦でカイラルフェルミオンが得られるということはすばらしいことである．

最後に，単連結でない多様体をとることは最初は驚きかもしれないが，それは他の現象論的にうまい特徴をもつことがわかっている．

10.7 Wilson ライン

前の議論で，スピン接続を(10.5.3)のようにゲージ場に埋めこんだため，E_8 が $E_6 \otimes$ SU(3) にこわれた．これは，フェルミオンが E_6 の **27** 表現に入っているので，とくに良い現象論を与えた．次のステップはさらに E_6 を破って，最小の群 SU(3)⊗SU(2)⊗U(1) を得ることである．

ここでの問題は，E_6 をさらに破るもっとも単純な方法は必ず $N = 1$ も破るということである．しかし，単連結でない多様体上で使うことのできるトリックがもう1つある．

一般に，ループのまわりのゲージ群の要素の経路順序積(path-ordered product)は，ゲージ不変であることがわかっている．これは Wilson ループとして表せる：

$$U \sim P \exp\left(\int_C A_\mu dx^\mu\right). \tag{10.7.1}$$

ここで P は，閉じた経路に関しての各項の順序づけを表す．小さな経路に対しては，U は曲率2形式の指数に比例していることがわかる．

ふつう曲率 $F^a_{\mu\nu}$ が0のとき，Wilson ループは1になると期待される．(10.4.36)で見たようにこれは，閉じた経路 C をいつでも点に縮められるからである．小さな閉経路の面積テンソルを $\Delta^{\mu\nu}$ とすれば，Wilson ループは

$$U \to e^{F_{\mu\nu}\Delta^{\mu\nu}} \tag{10.7.2}$$

となる．しかし，もし経路が単連結でなければこの議論は成り立たない．こうして曲率テンソルが0になっても，Wilson ループは1でなくてもよいのである [1, 7]．

われわれは単連結でない多様体を考えているので，これは理想的である．**もし U が1でなければ，群 E_6 は U と交換する部分群に破れる．**

E_6 は，最大部分群

$$\mathrm{SU}(3)_C \otimes \mathrm{SU}(3)_L \otimes \mathrm{SU}(3)_R \tag{10.7.3}$$

を含むことに注意しよう．ここで，C は強い相互作用のカラー群，L と R は左と右の弱相互作用を表す．

この部分群へ破れは，E_6 の1つの要素 U_0 で

$$U_0^n = 1 \tag{10.7.4}$$

をみたすものをとって達成される．この要素は置換群 Z_n を生成する．そこで U_0 と交

換する E_6 の部分群を求めよう．一般にこれはランク 6 の群になる．たとえば E_6 の特定の要素を

$$U_0 = (\alpha) \times \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad (10.7.5)$$

ととろう．ここで各行列は，E_6 の中の 3 つの SU(3) の要素を表し，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は 1 の n 乗根である．すると，これらの要素のいろいろなとり方に対し，次の破れが得られる：

$$\begin{aligned} &\alpha^3 = 1; \qquad \gamma\delta\varepsilon = 1 \to \mathrm{SU}(3)_C \otimes \mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1) \otimes \mathrm{U}(1) \otimes \mathrm{U}(1) \\ &\gamma = \delta \to \mathrm{SU}(3)_C \otimes \mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{SU}(2)_R \otimes \mathrm{U}(1) \otimes \mathrm{U}(1). \end{aligned} \qquad (10.7.6)$$

E_6 の異なる要素を選び出すことにより，異なる群を得ることができる．たとえば，

$$\frac{E_6}{Z_5 \times Z_5} = \mathrm{SU}(3)_C \otimes \mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{SU}(2)_R \otimes \mathrm{U}(1) \otimes \mathrm{U}(1) \qquad (10.7.7)$$

U_0 の具体的な形は，

$$U_0 = (1) \times \begin{pmatrix} \alpha^j & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^j & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-2j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^k & 0 & 0 \\ 0 & \beta^k & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-2k} \end{pmatrix} \qquad (10.7.8)$$

である．もっと別の取り方は，不連続群を Z_3 にして，

$$\frac{E_6}{Z_3} = \mathrm{SU}(3)_C \otimes \mathrm{SU}(3) \otimes \mathrm{SU}(3) \qquad (10.7.9)$$

とするものである．

一般に，最小の模型を含むこれらの解は他のゲージ相互作用も含む．実際，少なくとも最小の模型を含む E_6 の部分群は 27 もあり，そのどれもが破れの後に残る不要な U(1) ゲージ群を含んでいる．これらはもちろん，さらに除かねばならない．それはおそらく，超ポテンシャルの「平坦な」方向を調べるなどの別の機構によることになろう．

10.8 オービフォールド

Calabi-Yau コンパクト化の方法にはまだ問題があるが，原理的には，それは十分豊かで，ゲージ群を最小の理論に破る定性的な機構を備えている．

しかし実際には，Calabi-Yau 多様体は作るのが大変難しく，いくつかしか知られていない．そこで，もっと簡単な平坦な空間を調べたい．残念ながら，もっとも簡単なトロイド状のコンパクト化は，他の理由とともに $N = 4$ 超対称性が破れの後に残るので，現象論的に不満足である．10 次元の $N = 1$ 超対称性から出発し，4 次元へコンパクト化すれば，$N = 4$ 超対称性が出てしまうのである．(10 次元の $N = 1$ 超対称性から出発すれば，コンパクト化の後 16 個の超対称性生成子 Q^α が $Q^{i\beta}$ となる．ここで β は 4 次元時空のスピノールの足で，i は 1 から 4 まで動く．このように，低い

次元への $N=1$ 超対称性のコンパクト化ではいつでも余分の O(n) 対称性が出るのである.)

ところがトロイド的コンパクト化をずっと厳しく制限することにより，$N=4$ 超対称性を $N=1$ 超対称性に落とすことができる．Dixon, Harvey, Vafa, Witten は，多様体を，**不動点**(fixed point, すなわち変換で変わらない点)があるように不連続群で割って得られるオービフォールド(orbifold)にコンパクト化することを提唱した [8, 9]．これらの不動点にある特異性のために，オービフォールドは多様体ではないが，明らかに弦はオービフォールド上を容易に伝播できる．オービフォールドの長所は，それが平坦で，$N=4$ 超対称性を破り，カイラルフェルミオンを出し，それが容易に作れることである.

もっとも簡単なオービフォールドは円錐である．それには単に複素平面をとり，次の同一視をする．ある整数 n に対し，

$$z = e^{2\pi i/n} z \tag{10.8.1}$$

とする．これは複素平面を n 個の同等な 3 角部分にわける．この同一視は平面を不連続対称群 Z_n をもつものにわけることに注意しよう.

この変換の下で原点は不動点であることに注意しよう．すなわちその回転の下で，原点は原点に写像される．さて，複素平面をこれらの 3 角部分に切りわけて，上の同一視によりこの部分を丸めると円錐ができる．このように円錐，すなわちオービフォールドは，不連続群で割った 2 次元空間にほかならない：

$$\text{円錐} = \text{オービフォールド} = \frac{R^2}{Z_n}. \tag{10.8.2}$$

不動点である原点は，特異性をもち得る点となる．円錐は多様体ではない．原点のまわりの経路をまわるとき横切る全角度は 360 度ではなく，360 度を n で割ったものになる.

別の簡単な例をとろう．次の同一視

$$\begin{aligned} z &= z + 1 \\ z &= z + i \end{aligned} \tag{10.8.3}$$

をして定義される 2 次元トーラスから出発しよう．この同一視は，複素平面を幅 1 の無限個の正方形で，その端が互いに同一視されたものに分割する．そこで，この 2 次元トーラスを，反転

$$P(z) = -z \tag{10.8.4}$$

で生成される Z_2 で割って，オービフォールドを作ろう．面

$$T_2/P \tag{10.8.5}$$

を作れば，オービフォールドが得られる．この反転は 4 つの点を不変にし，不動点

$$0; \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{i}{2}; \quad \frac{1}{2}(1+i) \tag{10.8.6}$$

をもつことに注意しよう．これらの不動点のうち3つは単位正方形の辺上にあり，1つは正方形の中にある．

このオービフォールドはどのように見えるだろうか？ 回転の作用の下で，正方形の中の点はさらに互いに同一視され，正方形が幅 $\frac{1}{2}$ の小さな正方形にわけられている．さらに，各々幅 $\frac{1}{2}$ の2つの小さな正方形を想像しよう，そしてこれらを互いの上にのせよう．これらの2つの正方形の4つの辺をぬい合わせ，閉じた面を作る．位相的には，それは4角な豆袋と同じである．

この面は，正方形の4つの頂点に対応する4つの特異点をもつことに注意しよう．これらの各不動点のまわりの経路をまわれば，角度の欠損は180度になる．

ところがこのオービフォールドをふつうの多様体にもどし，そのオイラー数を計算することができる．T_2 の4つの不動点を切り取り，Z_2 で割り，これらの不動点に小片をぬいつけよう．これは特異点の「吹きとばし(blowing up)」と呼ばれる．この場合，これらの穴を切り出し，正方形をぬい合わせてオービフォールドを作り，4つの片をもう1度ぬいつけることにより，位相的に球面と同等な多様体が得られる．

円板 d のオイラー数は1で，2次元トーラスのオイラー数は0である．したがって，トーラスから4不動点を除いたもののオイラー数は

$$\chi(T_2 - 4d) = \chi(T_2) - 4\chi(d) = -4 \tag{10.8.7}$$

に等しい．Z_2 の作用で割れば，得られる面のオイラー数は

$$\chi\left(\frac{T_2 - 4d}{Z_2}\right) = -2 \tag{10.8.8}$$

である．最後に面に4つの円板をもどせば，オイラー数に4をもどすことになる：

$$\chi\left(\frac{T_2 - 4d}{Z_2} + 4d\right) = \frac{0-4}{2} + 4 = 2. \tag{10.8.9}$$

これは直観と一致する．なぜなら，この多様体は2次元球面 S_2 と同等で，後者はオイラー数2をもっているからである．

さて前の例を一般化して，6次元のもっと複雑なコンパクト化の面を考えよう．まず複素平面を次の同一視によりコンパクト化しよう：

$$\begin{cases} z = z + 1 \\ z = z + e^{\pi i/3}. \end{cases} \tag{10.8.10}$$

第1の変換により，複素平面が無限個の狭い垂直の帯にわかれる．両方の変換の作用により，複素平面は無限個の正3角形にわかれる．この空間の「基本領域」T は，背中合わせの2つの正3角形からなる．

この空間は無限個の正3角形からなるので，120度回転の下で不変である：

$$z \to e^{2\pi i/3} z. \tag{10.8.11}$$

したがってこの空間は Z_3 対称性をもつ．120度のこの回転の下で3つの不動点，すなわち不変に保たれる点がある：

$$z = 0; \quad \frac{e^{i\pi/6}}{\sqrt{3}}; \quad \frac{2e^{\pi i/6}}{\sqrt{3}}. \tag{10.8.12}$$

基本領域 T は 2 つの正 3 角形からなり，3 つの固定点を，1 つは原点に，他の 2 つは 2 つの正 3 角形の中に含むことに注意しよう．

さて，この空間 T に折りたたみの作用を実行して，オービフォールド

$$Z = \frac{T}{Z_3} \tag{10.8.13}$$

を得よう．再び 3 つの不動点(このうち 2 つは領域 T 自身の中にある)が特異点になり得るので，Z は多様体ではない．

6 次元の場合へ一般化するには，単にこれらの複素空間の 3 つの積をとることが考えられる：

$$\bar{Z} = Z \times Z \times Z. \tag{10.8.14}$$

これは $3 \times 3 \times 3 = 27$ 個の不動点をもっている．

この空間は，10 次元の $N = 1$ 超対称性が 4 次元の $N = 1$ 超対称性に破れ得るという長所をもっている．もしこの空間

$$M^4 \times \bar{Z} \tag{10.8.15}$$

にコンパクト化すれば，O(10) 群が次のようにこわれることがわかる：

$$\mathrm{SO}(10) \supset \mathrm{SO}(4) \otimes \mathrm{SO}(6). \tag{10.8.16}$$

$\mathrm{SO}(6) = \mathrm{SU}(4)$ なので，もとの $N = 1, D = 10$ 超対称性の Q^α が，SU(4) の下で **4** の成分として変換する 4 つのスピノールにこわれることが示せる．つまり単純に T_6 にコンパクト化すれば，SU(4) は破れず **4** として変換する 4 次元の超対称性生成子の各々が残る．しかし Z_3 で割ったオービフォールドでは，Z_3 を SU(4) の SU(3) 部分群に属するようにできる．こうして Z_3 で割れば，必ず SU(4) 対称性が破れる．なぜならば，SU(4) の 3 次元表現はないからである．それで **4** の中の 4 成分の 1 つだけが Z_3 で割っても残り，したがって $N = 1$ 超対称性が残りうまくいくのである．

まとめると，不連続群と交換する対称性だけが残るので，オービフォールドを理論の全体の対称性を破るのに使うことができる．この方法はゲージ群を破るのにも使える．

g を 10 次元のゲージ群の特定の要素で，ある m に対し

$$g^m = 1 \tag{10.8.17}$$

としよう．そして理論の状態は，

$$g \times Z_m \tag{10.8.18}$$

の組み合わせの作用と交換するものであると要求する．こうすれば，ゲージと超対称性の両方を同時に破る機構が得られる．

例として，SU(3) の要素で $g^3 = 1$ のものをとろう．理論の状態が組み合わせた作用で不変であることを要求すると E_8 が破れる：

$$E_8 \otimes E_8 \to E_8 \otimes \mathrm{SU}(3) \otimes E_6. \tag{10.8.19}$$

さて，この面のオイラー数，したがって世代数を計算してみよう．再びTから27個の不動点を切り出し，Z_3で割り，27の小片をぬいつけなければならない．

面Tのオイラー数は0なので，多様体から固定点にある27個の円板dを除いたものはオイラー数

$$\chi(T-27d)=-27 \tag{10.8.20}$$

をもつ．Z_3で割ればオイラー数は-9となる．次に27個の円板$\bar{d}$をもどす．しかし各円板がSU(3)ホロノミーとオイラー数3をもつので，全体のオイラー数は

$$\chi\Big(\frac{T-27d}{Z_3}\Big)+27\chi(\bar{d})=72 \tag{10.8.21}$$

である．したがって36世代のフェルミオンがある．

前の例は6次元のおもちゃの模型にすぎない．もっとずっと少ない世代数，2や4などのオービフォールド模型を作ることもできる．

10.9　4次元の超弦

4次元を作り出すオービフォールドコンパクト化を用いて模型を作るには，モジュラー不変性や$L_0=\tilde{L}_0$条件などの強い条件をみたさねばならない．モジュラー不変性は境界条件を混ぜるので，これらの条件は自明なものではない．

たとえばモジュラー不変性を調べるときに，6次元トーラスT_6を不連続点群$P=Z_r$で割って，オービフォールドT_6/Pの(トゥイストした)境界条件が次のようになっているものにコンパクト化することができる：

$$\begin{aligned}X(\sigma_1+2\pi,\sigma_2)&=hX(\sigma_1,\sigma_2)\\X(\sigma_1,\sigma_2+2\pi)&=gX(\sigma_1,\sigma_2).\end{aligned} \tag{10.9.1}$$

ここでhとgは，位数nのPの要素，すなわち$g^n=h^n=1$とする．ふつうのボソン的またはフェルミオン的境界条件ではgとhは±1に等しい．しかしオービフォールドにコンパクト化するときは，この条件を一般化しなければならない．

gとhがあるために，理論の全体の対称性を時空と内部の群の両方に対し破ることができる．コンパクト化で残る群は，この過程で影響をうけない部分群，すなわちgとhと交換する部分群になる．

1ループのトレースがどのようにコンパクト化で影響されるかを見るために，gとhを対角化して，その固有値により$g,h\to\{e^{2\pi iv_i}\}$と表そう．ここで，位数がnとなるよう$v_i=r_i/n$である．簡単のために次の周期条件をとる：

$$X(\sigma+2\pi)=e^{2\pi iv}X(\sigma). \tag{10.9.2}$$

今は弦のモードのフーリエ分解がずれていることに注意しよう．ここでは一般に，弦を新しいモードの集合で展開しなければならない：

$$X(\sigma)=\sum_m e^{i(m+v)\sigma}X_m. \tag{10.9.3}$$

フーリエモードの中に v があるために，1 ループ振幅のトレースの計算が微妙だが大きく変化することになる．そのため v_i に自明でない制限がつくのである．

トレースの計算の中に，v は 0 点エネルギーとして入ってくる．たとえばふつうのボソン的弦では，正則化していないハミルトニアンは $\frac{1}{2}\sum_n n(a_{-n}a_n + a_n a_{-n})$ の因子を含む．これはもちろん無限大の行列要素をもつので，正規順序にしなければならない．技術的にいえば，生成演算子と消滅演算子を正規順序にすると $\frac{1}{2}\sum_n n$ で与えられる無限大の 0 点エネルギーが出る．この無限大の 0 点エネルギーは，いく通りかの方法で処理できる（たとえば，光錐の理論がローレンツ不変であることを要求する）が，これはゼータ関数正則化と同じ結果を出すことが示せる．ゼータ関数は，

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{10.9.4}$$

で定義されるものである．この関数は s について解析的なので，$s = -1$ まで解析接続して $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ であることが示せる．$\zeta(-1)$ は $\sum_{n=1}^{\infty} n$ の解析接続になっているので，これが求める結果である．

さてゼータ関数正則化を用いて，ずれたモードからの寄与を計算しよう．それには，

$$\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+ + a} n = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(n+a)^{-s}|_{s=-1} = -\frac{1}{24} + \frac{1}{4}a(1-a) \tag{10.9.5}$$

であることを用いる．$a(1-a)$ の項は，オービフォールドのずれたモードから出るトレースの計算の中の 0 点エネルギーへの新しい寄与である．

次にヘテロティック弦を考えると，1 ループのトレースは左向きと右向きのエネルギーを含む因子

$$e^{2\pi i(\tau E_L - \bar{\tau} E_R)} \tag{10.9.6}$$

を与える．$\tau \to \tau + n$ の変換の下で，この式は

$$n(E_L - E_R) = 0 \mod 1 \tag{10.9.7}$$

とおけば不変である．右向き部分の固有値を $e^{2\pi i v_i}(i = 1, \ldots, 4)$ と表し，$E_8 \otimes E_8$ の $O(16) \otimes O(16)$ 部分群に対し 2 組の左向き固有値を $e^{2\pi i v_{1i}}$ と $e^{2\pi i v_{2i}}(i = 1, \ldots, 8)$ とすれば，(10.9.5) から基底状態のエネルギーに対し次の寄与を得る[1]：

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{1}{2}\sum_i v_i(v_i - 1) + \frac{1}{12} \\ E_L &= \frac{1}{2}\sum_i v_{1i}(v_{1i} - 1) + \frac{1}{12} + (1 \to 2). \end{aligned} \tag{10.9.8}$$

$v = r/n$ であるから，以上を一緒にして，次の制限

$$\sum_{i=1}^{4} r_i^2 = \sum_{j=1}^{8} r_{1j}^2 + \sum_{j=1}^{8} r_{2j}^2 \tag{10.9.9}$$

[1] フェルミオンの寄与は逆符号になる．

を得る．これは，奇数の n に対し $\bmod n$ で，偶数の n に対し $\bmod 2n$ で成り立つ．

さてこれらの制限の影響を，前に議論した Z-オービフォールド，すなわち T_6/Z_3 のコンパクト化に対して考えよう．点群 P は位数 3 である．これは $3v_{1i}$ と $3v_{2i}$ を E_8 の格子ベクトルとしてよいことを意味している．

モジュラー不変性からの条件により，$v_{1,2i}^2$ は $\frac{2}{3}$ かけるある整数でなければならない．ところが $3v_{1,2i}$ は E_8 の格子ベクトルであるから，いつでも v^2 を $\frac{2}{9}$ かけるある整数と決めることができる．最後に E_8 格子を含む 8 次元空間のどの点も，どれかの格子点から距離が 1 以内にあることがわかっている．これはいつでも $v_{1,2i}^2 \geq 1$ にとれることを意味している．

モジュラー不変性は大変強力なので，いろいろな v への制限(10.9.9)と矛盾しない解は 5 つしかない．この 5 組の v の各々は，対称性群 $E_8 \otimes E_8$ を，g と h のトゥイスト因子と交換する部分群にこわす．v の具体的形が与えられれば，この部分群が何かを計算するのは難しくない．$3v$ は格子ベクトルに等しいので，対称性の破れの後に残る部分群はこれらの格子ベクトルと交換する群なのである．ここでは単に 5 つの解を引用するだけにする [8, 9]．

1.
$$\sum_{i=1}^{s} v_{1i}^2 = \sum_{i=1}^{8} v_{2i}^2 = 0. \tag{10.9.10}$$

この解はカイラルフェルミオンをもたず，したがって非物理的である．

2.
$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{8} v_{1i}^2 = \frac{2}{3}; \quad \sum_{i=1}^{8} v_{2i}^2 = 0 \\ v_{1i} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \cdots\right); \quad v_{2i} = (0, \ldots, 0).\end{gathered} \tag{10.9.11}$$

これは群 $E_6 \otimes \mathrm{SU}(3) \otimes E_8$ を残す．

3.
$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{8} v_{1i}^2 = \frac{2}{9}; \quad \sum_{i=1}^{8} v_{2i}^2 = \frac{4}{9} \\ v_{1i} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \cdots\right); \quad v_{2i} = \left(\frac{2}{3}, 0, \ldots\right).\end{gathered} \tag{10.9.12}$$

これは群 $E_7 \otimes \mathrm{U}(1) \otimes \mathrm{SO}(14) \otimes \mathrm{U}(1)$ を残す．

4.
$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{8} v_{1i}^2 = \sum_{i=1}^{8} v_{2i}^2 = \frac{2}{3} \\ v_{1i} = v_{2i} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \cdots\right).\end{gathered} \tag{10.9.13}$$

これは群 $E_6 \otimes \mathrm{SU}(3) \otimes E_6 \otimes \mathrm{SU}(3)$ を出す．

5.
$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{8} v_{1i}^2 = \frac{8}{9}; \quad \sum_{i=1}^{8} v_{2i}^2 = \frac{4}{9} \\ v_{1i} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \cdots\right); \quad v_{2i} = \left(\frac{2}{3}, 0, \ldots\right).\end{gathered} \tag{10.9.14}$$

これは対称性群 $\mathrm{SU}(9) \otimes \mathrm{SO}(14) \otimes \mathrm{U}(1)$ を残す．(... の記号は，一連の 0 を表す．)

今までオービフォールドに対し構成した 5 つの群は，標準模型に全然似ていない．ゲージ群はまだ大きすぎ，世代も多すぎる．この種の模型は，オービフォールドの 27 個の不動点のまわりにトゥイストした弦の場を作ることがいつでもでき，27 の余分さが出てしまうので，27 世代をもつことが多い．しかしトーラス上の縮められないループに対応する背景のゲージ場（Wilson ライン）があると仮定することにより，さらにゲージ群を小さくし，世代の数を調節することができる．これで原理的には，3 世代だけで，ゲージ群 $\mathrm{SU}(3)\otimes\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{U}(1)^n$ をもつ模型ができる．前の議論のように，残るゲージ群は $E_8\otimes E_8$ の部分群で Wilson ラインと交換するものである．つまり，Wilson ラインのあるオービフォールドの場合，残るゲージ群は $E_8\otimes E_8$ の部分群で，$P=Z_3$ と Wilson ラインと交換するものになる．

たとえば a_i^I で決まる Wilson ライン

$$\int_i A_\mu^I dx^\mu = 2\pi A_\mu^I e_i^\mu = 2\pi a_i^I \tag{10.9.15}$$

を考えよう．ここで $i=1,\ldots,6, I=1,\ldots,16$ で，e_i^I は 6 次元トーラスの格子を定義している．こうすれば制限の中に新しいベクトル a_i^I を入れ，新しい解ができるようになる．$3a_i^I$ と $3v^I$ は格子ベクトルに等しいことが示せる．

モジュラー変換 $\tau\to -1/\tau$ の下では，$E_8\otimes E_8$ 格子ベクトルは

$$p^I \to p^I + v^I + n_i a_i^I \tag{10.9.16}$$

と変換する．ここで $n_i=0,\pm 1$ である．n_i の値が違えばトゥイスト部分が異なる．前に用いた議論をすべてくり返して，モジュラー変換 $\tau\to\tau+3$ により，ある整数 m に対し制限

$$3(v^I + n_i a_i^I) = 2m \tag{10.9.17}$$

が出ることも示せる [10, 11]．これがモジュラー不変性から得られる制限で，(10.9.9) よりずっと弱い．

a_i^I 項があるために，たくさんの解が可能である [10, 11]．ここで 3 世代などの望ましい特徴をもつ 1 つの可能性を選んでみよう．v_i^I と a_i^I に次の値を仮定する：

$$v^I = \begin{cases} \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \\ \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,0,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \end{cases} \tag{10.9.18}$$

および

$$a_i^I = \begin{cases} \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3},0,0,0\right) \\ \left(0,0,0,0,0,\frac{2}{3},0,0\right) \end{cases} \tag{10.9.19}$$

$$a_3^I = \begin{cases} \left(0,0,0,0,0,0,0,\frac{2}{3}\right) \\ \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},0,0,0,\frac{1}{3}\right). \end{cases} \tag{10.9.20}$$

トゥイストしていない部分では，Wilson ラインの作用と交換する E_8 の部分群は

$$\mathrm{SU}(3)\otimes\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{U}(1)^5 \tag{10.9.21}$$

で与えられ，もう1つの E_8 は $\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{U}(1)^6$ にこわれることが確かめられる．

さらに，世代の数が3に下がったことにも注意するべきである．(これは，3複素次元の1つにWilsonラインがあれば，27個の不動点が9個の不動点の入った3つの部分にさらにわけられるからである．2つのWilsonラインを加えると，3個の不動点の入った9つの部分ができる．v^I と a_i^I をうまくとると，1つの部分以外は消せて3世代が残る.)　さらに余得としてこの模型には，速い陽子崩壊を媒介する余分のカラー3重項がないという望ましい性質ももっている．

しかしこの模型の限界は，U(1)因子が多すぎて現象論的にまずいということである．実はWilsonラインの手法では，群のランクが下がらないのである(不連続群で割るため)．それでまだランク8のゲージ群があり，大きすぎる．さらにこれらの余分のU(1)因子が，アノーマリーをもたないかどうか確かめねばならない．

今のところ，オービフォールド(またはCalabi-Yau多様体)で得られた解 [12–25] はどれもちょうど望ましい低エネルギー構造をもっていない．まだ正しい世代数，低エネルギーで正しいゲージ群，陽子崩壊の許される寿命，等々を得る問題が残っている．しかし要点は，これらのコンパクト化の方法により，モジュラー不変性と矛盾しない何千もの解を作ることが可能になったことである．

必要なことはもちろん，弦の方程式の物理的に役立つ4次元の解をすべて計算する系統的な方法である．今までのところ大部分の研究では，特定のコンパクト化の形を仮定し，それとモジュラー不変性の無矛盾性を確かめることがなされてきた．最近ちょうど反対の方向，すなわちまずモジュラー不変性を要求し，それと矛盾しないコンパクト化の形をすべて探す研究がかなりなされている．

この新しい方法は，どんな物理的に有用な模型にも次の基準を最初に要求する．すなわち，模型に(a) タキオンがない．(b) アノーマリーがない．(c) モジュラー不変である．(d) 超対称である．(e) 4次元である．今のところ，この野心的な方法には準備段階の結果しかないが，それは有望なものである．

ここで必要なことは，1ループ振幅(5.9.6)の中の，各スピン構造に対する係数 C をすべて計算する方法である．たとえば5.9節と5.11節では，1ループと多重ループのスピン構造を分析し，それらがモジュラー変換の下でどう変換するかを調べた．そこで，多重ループのスピン構造に対するモジュラー不変性の影響を系統的に調べたい [26–31]．まず，すべての可能なスピン構造による弦振幅の展開をしよう：

$$A=\sum_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} C\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix} A\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}. \tag{10.9.22}$$

ここで $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は，a サイクルと b サイクルのいろいろなスピン構造を与え，$\boldsymbol{a}$ の中の各要素は0か1である．C は決めなければならない定数，A は各スピン構造の振幅を表す．各フェルミオンに対し，種数 g のリーマン面には 2^{2g} の異なるスピン構造がある．

5.9節と5.11節の式をもっと系統的に書き直そう．たとえば Θ 関数は，$\mathrm{Sp}\,(2g,\mathbb{Z})$ 変換をしたとき，(5.11.15)をみたさねばならない．1ループレベルでモジュラー不変性を要求すると，C は(5.9.7)と(5.11.17)で与えられる境界条件の変化をみたさねば

ならない．この新しい記法では，これらの制限は

$$C\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\end{bmatrix}=-e^{(i\pi/8)\sum a_f}C\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+1\end{bmatrix}\tag{10.9.23}$$

および，

$$C\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\end{bmatrix}=e^{(i\pi/4)\sum(a_f b_f)}C\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{a}\end{bmatrix}\tag{10.9.24}$$

と書き直せる．ここで和 $\sum$ は f 個のフェルミオンについてとり（左向きひく右向きをとる），各 a_f は 0 または 1 の値をとり，ベクトルの和は mod 2 でとる．

多重ループレベルでモジュラー不変性を要求すると，C はさらに制限を課さねばならない．たとえばユニタリー性のために，種数 g の面の振幅は種数 1 のトーラスの積に因子化できなければならない．すなわち(5.1.7)により，中間状態の完全系を入れることにより，種数 g の面を異なる種数 1 の面に切断できなければならない．今の新しい記法では，これは

$$C\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}^1 & \cdots & \boldsymbol{a}^g\\\boldsymbol{b}^1 & & \boldsymbol{b}^g\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}^1\\\boldsymbol{b}^1\end{bmatrix}\cdots C\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}^g\\\boldsymbol{b}^g\end{bmatrix}\tag{10.9.25}$$

を意味している．第 5 章で見たように，Dehn トゥイストにより種数 g の面上の (a,b) サイクルは混ざり合うので，（少なくとも 2 ループレベルでは）

$$\delta\delta' e^{(i\pi/4)\sum a_f a'_f}C\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\end{bmatrix}C\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}'\\\boldsymbol{b}'\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}'\end{bmatrix}C\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}'\\\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{a}\end{bmatrix}\tag{10.9.26}$$

も要求しなければならない．ここで，状態が時空のフェルミオン（ボソン）ならば δ は $+1$ (-1) に等しい．

すばらしいことは，これらの条件にかなり簡単な解があることである．

まず定義をいくつかしよう．

1. $C[{}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{b}}]$ を同等な表現 $C(\alpha|\beta)$ で置き換えよう．ここで $\alpha(\beta)$ は $a(b)$ サイクルのまわりに周期的なフェルミオンの集合である．

2. 簡単な「積」の規則を導入しよう：

$$\alpha\beta=\alpha\cup\beta-\alpha\cap\beta.\tag{10.9.27}$$

   これは $\alpha^2=\alpha-\alpha=\emptyset$，すなわち α^2 が空集合であることを意味する．F をすべてのフェルミオンの集合とする．すると積 F_α は，集合 α の補集合に等しい．すなわち $F_\alpha=F-\alpha$．

3. δ_α を導入し，フェルミオンに対し $+1$，ボソンに対し -1 としよう．

4. $n(\alpha)$ は，左向きフェルミオンの数 $n_L(\alpha)$ ひく右向きフェルミオンの数 $n_R(\alpha)$ とする．

5. $\varepsilon_\alpha = e^{i\pi n(\alpha)/8}$ とパリティ演算子 $(-1)^\alpha$ を，スピン構造 α に対して

$$\begin{aligned} &(-1)^\alpha \psi = -\psi(-1)^\alpha, \quad \psi \text{ が } \alpha \text{ に属する場合} \\ &(-1)^\alpha \psi = \psi(-1)^\alpha, \quad \psi \text{ が } \alpha \text{ に属さぬ場合} \end{aligned} \tag{10.9.28}$$

に従うものとして定義しよう．スピン構造 $(\alpha|\beta)$ は，

$$(-1)^\alpha T_F (-1)^\alpha = \delta_\alpha T_F \tag{10.9.29}$$

ならば超対称性と矛盾しない．ここで T_F は超共形群の超対称性変換の生成子である．

6. Y を，上の超対称な性質をもつ集合の集まりと定義する(これは，積の定義(10.9.27)の下で閉じる群をなす)．Ξ を，Y の部分群で，

$$C(\alpha_i|\emptyset) = \delta_{\alpha_i} \tag{10.9.30}$$

をみたすものとする．ここで $C(\emptyset|\emptyset) = 1$ である．

これで定義ができたので，モジュラー不変性から出る制限を述べよう．$n(\alpha)$ は 8 の倍数なので，Ξ の基底要素 b_i に制限がつく：

$$\begin{aligned} n(b_i) &= 0 \mod 8 \\ n(b_i \cap b_j) &= 0 \mod 4 \\ n(b_i \cap b_j \cap b_k \cap b_l) &= 0 \mod 2. \end{aligned} \tag{10.9.31}$$

また，モジュラー不変性から出る制限は，集合 Ξ の中のすべての α, β, γ に対し

$$\begin{aligned} C(\alpha \mid \beta) &= \begin{cases} \pm 1 & \alpha, \beta \in \Xi \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \\ C(\alpha \mid \beta) &= e^2_{\alpha\cap\beta} C(\beta \mid \alpha) \\ C(\alpha \mid \alpha) &= \varepsilon_F \varepsilon_\alpha C(\alpha \mid F) \\ C(\alpha \mid \beta) C(\alpha \mid \gamma) &= \delta_\alpha C(\alpha \mid \beta\gamma) \end{aligned} \tag{10.9.32}$$

である．

最後に，共形アノーマリーの相殺からの制限があり，これは常に厳密に守られねばならない．格子コンパクト化のフェルミオン的(ボソン的でない)表示を用いよう．これは(9.4.4)でヘテロティック弦に用いたものである．そこで，超 Virasoro 代数の共形アノーマリーへのフェルミオンの寄与を含めねばならない．非常にすばらしいことに，エネルギー運動量テンソル T_B のフェルミオンの相棒 T_F の表現が随伴表現のフェルミオンで厳密に与えられる：

$$T_F \sim f^{abc} \psi^a \psi^b \psi^c. \tag{10.9.33}$$

この項から出るアノーマリーを計算すると，フェルミオンのアノーマリーへの寄与は

$\frac{1}{2}N$ であることがわかる．ただし N は群のパラメーターの数である．

左向きの部分では，コンパクト化した次元の数は $26-D$ である．ただし D は時空の次元の数である．コンパクト化した部分を随伴表現のフェルミオンで表す．この部分では，アノーマリーへは3つの寄与

$$\text{左向き}:\left\{\begin{matrix} X_\mu \\ b, c\,\text{ゴースト} \\ \psi^a \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} D \\ -26 \\ \frac{1}{2}N \end{matrix}\right\} \tag{10.9.34}$$

がある．アノーマリーへの3つの寄与の和は0でなければならないので，集合 ψ^a に $N=2(26-D)$ 個のフェルミオンがあることになる．

さて，右向きを分析しよう．アノーマリーの和はやはり0にならなければならない：

$$\text{右向き}:\left\{\begin{matrix} X_\mu, \psi_\mu \\ b,\, c,\, \beta,\, \gamma \\ \psi^a \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} \frac{3}{2}D \\ -26+11 \\ \frac{1}{2}N \end{matrix}\right\}. \tag{10.9.35}$$

したがって，アノーマリーが0になる条件は $N=3(10-D)$ である．ψ_μ に含まれる(光錐ゲージでの)$(D-2)$ 個の NS-R フェルミオンを含めて，右向き部分には(光錐ゲージで) $D-2+3(10-D)$ のフェルミオンがある．結局，Virasuro 代数のアノーマリーを消すには，次の数のフェルミオンがなければならない：

$$\begin{cases} \text{左向き} \rightarrow 2(26-D) \\ \text{右向き} \rightarrow D-2+3(10-D). \end{cases} \tag{10.9.36}$$

左向きと右向きの部分にこれだけのフェルミオンがあれば，自動的にアノーマリーは打ち消すことになる．

これですべての制限を具体的に表したので，われわれの手順は次のようになる．

1. まず(10.9.36)をみたす時空のフェルミオン ψ と内的フェルミオン ψ^a の全体の数を計算する．これで理論から共形アノーマリーが除ける．この集合から出るスピン構造の全部の数を計算し，これを F と呼ぶ．

2. 次に，F を含む完全集合 Ξ の中から，適当にスピン構造の集まりを始集合としてとる．

3. 次に，積(10.9.27)の下で閉じることを確かめる．この積がこの始集合の選び方と矛盾しない全体の群 Ξ を生成する．(Ξ として違う始集合をとれば，異なるコンパクト化を再現できる.)

4. そして，われわれの条件をみたす集合 Ξ で定義された正方行列 $C(\alpha|\beta)$ を計算する．こうしていくつかの任意の位相が入り，各集合 Ξ に対して1つ以上の解ができるようになる．

次にこれらの式の解の性質をいくつか議論する．すばらしいことに，すべての矛盾

のない解は必ずグラビトン，ディラトン，反対称テンソルを含むことがわかる．また質量 0 のスピン $\frac{3}{2}$ の場があることが，タキオンがなく，1 ループで宇宙定数が 0 になることを証明するのに十分であることもわかる．これらは有望な結果で，これらの式にはすばらしい無矛盾性があって，現象論的に望ましい結果を与えることを示している．

さて，これらの式の特定の解をいくつか議論しよう．まず，光錐ゲージで(コンパクト化なしの) 10 次元 II 型理論を議論することにしよう．フェルミオンは，8 成分の右向き時空フェルミオン $\alpha_R = \psi^{1,\dots,8}$ と，左向きフェルミオン $\alpha_L = \tilde{\psi}^{1,\dots,8}$ からなり，内部フェルミオンは 0 におく．$\psi^a = 0$.

1. もっとも単純な取り方は，

$$\Xi = \{\emptyset, F\} \tag{10.9.37}$$

である．残念ながらこの理論のスペクトラムを注意深く分析してみると，タキオンがあることがわかり不満足である．

2. 取り方

$$\Xi = \{\emptyset, \alpha_L, \alpha_R, F\} \tag{10.9.38}$$

は，$C(\alpha|\beta)$ 行列の中にある位相の取り方により 1 つ以上の解がある．その 2 つの取り方で，IIA 型と IIB 型の理論が再現される．

3. 4 次元にコンパクト化した理論では，異なる集合 Ξ をとらねばならない．4 次元では，時空のフェルミオンは右向き横成分の $\psi^{1,2}$ と左向き $\tilde{\psi}^{1,2}$ で表される．(10.9.36) によれば，内部自由度も $18 = 3(10 - D)$ のフェルミオンで表され，その場合右向き部分に $\lambda^{1,\dots,18}$ と左向き部分に $\tilde{\lambda}^{1,\dots,18}$ がある．これらの 18 個の内部フェルミオンを集合的に (x^I, y^I, z^I) とまとめる．ここで $I = 1, \dots, 6$ は，6 つの SU(2) 因子を表す．そして，部分集合 $\alpha = (\psi^{1,2}, z^{1,\dots,6})$ を選ぶ．そして

$$\Xi = \{\emptyset, \alpha, F\alpha, F\} \tag{10.9.39}$$

と取ると，ゲージ対称性 $\mathrm{SU}(2)^6, \mathrm{SU}(4) \otimes \mathrm{SU}(2)$，または $\mathrm{SU}(3) \otimes \mathrm{SO}(5)$ をもつ $N = 4$ 超対称 4 次元理論が得られる．

さて，10 次元ヘテロティック弦を光錐ゲージで分析しよう．ここには，横成分の右向き時空スピノール $\alpha_R = \psi^{1,\dots,8}$ と $32 = 2(26 - D)$ の内部左向きスピノール $\alpha_L = F\alpha_R = \lambda^{1,\dots,32}$ がある．

1. 取り方

$$\Xi = \{\emptyset, F\} \tag{10.9.40}$$

は，タキオンがあり，質量のないフェルミオンがない SO(32) 理論を与え非物理的である．

2. 取り方

$$\Xi = \{\emptyset, \alpha_R, \alpha_L, F\} \tag{10.9.41}$$

は，ふつうの $\mathrm{Spin}(32)/Z_2$ ヘテロティック弦を与える．

3. $\alpha_1 = \left\{\lambda^{1,\ldots,16}\right\}, \alpha = \left\{\lambda^{17,\ldots,32}\right\}$ と定義すると，集合

$$\Xi = \{\emptyset, \alpha_R, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1\alpha_R, \alpha_2\alpha_R, \alpha_1\alpha_2, F\} \tag{10.9.42}$$

は，位相の取り方により2つの可能性がある．1つの位相の取り方は標準的超対称 $E_8 \otimes E_8$ 理論を与え，別の取り方は(超対称でない) $\mathrm{SO}(16) \otimes \mathrm{SO}(16)$ 理論を与える．

4. 4次元のコンパクト化の後，再び右向き内部フェルミオンを (x^I, y^I, z^I) $(I = 1, \ldots, 6)$ と表し，$\alpha = (\psi^{1,2}, z^{1,\ldots,6})$ と取ることができる．そして，簡単な取り方

$$\Xi = \{\emptyset, \alpha, F\alpha, F\} \tag{10.9.43}$$

で，SO(44) ゲージ対称性をもつ $N = 4$ 超対称理論が得られる．これは，偶の自己双対ローレンツ的格子を用いて Narain が見つけた解の1つである．

明らかに，積の規則(10.9.27)で閉じ，モジュラー不変性の制限をみたす異なる Ξ 集合はおそらく何千もあるであろう．この形式によれば，モジュラー不変性と矛盾しない可能なコンパクト化の解を完全に分類する問題の手がかりが得られる．

この章を終える前に，非対称オービフォールドなどのコンパクト化のとる新しい方向を指摘しておくのも価値があろう．

これは今まで議論したオービフォールドの集合より大きい．非対称オービフォールド [31] も，弦の方程式のモジュラー不変な何千もの解を分類する手がかりを与えるかもしれない．非対称オービフォールドは，左向きと右向きの自由度が異なるオービフォールドである．10次元時空にコンパクト化する際，左向きと右向き部分を対称にコンパクト化するのが自然であるが，6空間次元を非対称に扱う矛盾のないモジュラー不変な非対称コンパクト化もある．

非対称オービフォールドをどうやってトゥイストするかを視覚化することは難しいが，かなり簡単にモジュラー不変な解が存在することが示せる．たとえば g の因子で割ろう．ここで g は不連続群に属すとする．1ループ図の分配関数は，この g 因子を入れた τ 方向のトレースである：

$$\mathrm{Tr}\, g q^{H_L} q^{\bar{H}_R}. \tag{10.9.44}$$

トレースの計算は前とまったく同じにできる．ただし今は空間が異なる．前のようにモジュラー不変性の条件は，レベルの一致

$$n(E_L - E_R) = 0 \mod 1 \tag{10.9.45}$$

であることがわかる．g の固有値を $e^{2\pi i r_i/n}$ で表せば，この条件は $\sum_i r_i^2$ の和に制限を与える．それで得られる r_i への制限はほとんど対称なオービフォールドの場合(10.9.9)と同じであるが，今は左向きと右向き部分が空間の構造により異なって扱われていることが違う．非対称オービフォールドは対称オービフォールドより扱いにくいが，多くの非対称オービフォールドがモジュラー不変性と矛盾なく実際に構成できるのである．(実際は非対称オービフォールドは，計算の簡単なより大きな対称オービフォール

ドに埋め込み，最後に切断して非対称オービフォールドを回復することもある.)

結局，非対称オービフォールドの長所は，4 次元の膨大なモジュラー不変コンパクト化を分類できることである．これは，物理的に有用な超弦のコンパクト化の完全な集合を理解するのに大いに役立つであろう．

10.10 まとめ

われわれは，コンパクト化に関して物理的にもっともな少数の仮定により，豊かな現象論的予言ができることを見てきた．低エネルギー粒子のスペクトラムの知られている性質をすべてうまく予言できる模型はまだ提唱されていないが，得られた定性的性質は有望に思われる．ここで，どの仮定がどの結論へ導くかの論理的つながりをとり出してみよう．

自然な取り方は，10 次元空間を 6 次元トーラスにコンパクト化することである．しかしこのコンパクト化では，10 次元の $N=1$ 超対称性が 4 次元の $N=4$ 超対称性になる．そこで現象論的にもっとよい新しい仮定を探さねばならない．

まず次の仮定をした．

1. 10 次元の宇宙が，

$$M_{10} \to M_4 \times K_6 \tag{10.10.1}$$

とコンパクト化する．ここで M_4 は最大に対称な空間で

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{R}{12}(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) \tag{10.10.2}$$

とし，K_6 はコンパクトである．

2. コンパクト化の後に $N=1$ 局所的超対称性が残る．

3. ボソン的場のいくつかは 0 にできる：

$$H = d\phi = 0. \tag{10.10.3}$$

$N=1$ 超対称性がコンパクト化の後でも残るという仮定は強力である．それはスピノールの変換が 0 でなければならないことを意味する：

$$\begin{aligned} \delta\psi_A &= \frac{1}{\kappa}D_A\varepsilon = 0 \\ \delta\chi^a &= \Gamma^{ij}F^a_{ij}\varepsilon = 0. \end{aligned} \tag{10.10.4}$$

共変的に一定のスピノール ε が存在することのために，多様体に多数の制限がつく．とくにこの式をもう 1 度微分すれば，

$$\begin{aligned} D_i\varepsilon = 0 &\to [D_j, D_i]\varepsilon = 0 \\ &\to R_{ijkl}\Gamma^{kl}\varepsilon = 0 \end{aligned} \tag{10.10.5}$$

を得る．こうしてこの空間が，Ricci 平坦であることが示せる．次にこの空間が SU(3)

ホロノミーをもつことが示せる．ホロノミー群は，ある点のまわりの閉じた経路についてスピノールを動かしたときに生成される群である．ふつう 6 次元では，ホロノミー群は SO(6) すなわち SU(4) である．ところが，もし ε が共変的に一定ならば，

$$\varepsilon \to U\varepsilon \tag{10.10.6}$$

ということになる．SU(4) 変換により，どんなスピノールも

$$\varepsilon \to \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_0 \end{bmatrix} \tag{10.10.7}$$

の形にもっていくことができる．これは，U 行列が列ベクトルの 3 つの 0 の成分だけを回転することを意味している．したがって U は SU(3) の要素でなければならず，空間は SU(3) ホロノミーをもつことになる．

一般に，SU(3) ホロノミーをもつ空間は取り扱いにくいことで有名である．しかし空間が Kähler であることも示せるので，Calabi-Yau の強力な定理を使うことができる．そして常にテンソル

$$J_j^i = -ig^{ik}\bar{\varepsilon}\Gamma_{kj}\varepsilon \tag{10.10.8}$$

を定義することができる．ふつうの複素数の定義に対し $i^2 = -1$ が成り立つように，$J^2 = -1$ が成り立つので，このテンソルを用いて複素多様体を定義することができる．ところが，このテンソルは共変的に一定でなければならないことがわかっている（なぜなら，ε が共変的に一定であるから）ので，空間は Kähler である．

幸いなことに，Ricci 平坦である（したがって，第 1 Chern 類が 0 である）Kähler 多様体は SU(3) ホロノミーをもつ空間と同等であることが示せ，容易に構成できる．こうして次の論理的筋道が得られる：

$$D_i\varepsilon = 0 \to K \text{ は Ricci 平坦，Kähler で，第 1 Chern 類が 0 である．} \tag{10.10.9}$$

ところがこのときの問題は，$N = 1$ 超対称性を保つ多様体が何千もありそうだということになる．

これまでは，$E_8 \otimes E_8$ ゲージ対称性は破らなかった．次のステップは，内容のない恒等式であったビアンキ恒等式が今の仮定で自明でないものになっていることに注意することである：

$$\mathrm{Tr}\, R \wedge R = \frac{1}{30}\,\mathrm{Tr}\, F \wedge F. \tag{10.10.10}$$

この式をみたすのは驚くほど難しい．左辺にはリーマンの曲率テンソルがあり，右辺には Yang-Mills 曲率形式がある．この少々奇妙に見える式を解くために，スピン接続をゲージ場に埋め込み，それにより 2 つの多様体を混ぜ，もとのゲージ対称性を破ることにする．リーマンの部分には SU(3) ホロノミーがあるので，2 つの部分を混ぜたときは，ゲージ部分に次の破れが生じる：

$$\text{ビアンキ恒等式} \to \text{スピン埋め込み} \to \mathrm{SU}(3) \otimes E_6 \otimes E_8. \tag{10.10.11}$$

幸いなことにこれで望ましい結果が出る．E_8 はそれ自身ではカイラル表現をもたず，したがって模型作りのよい候補にはならないが，E_6 はカイラル表現をもっているのである．実際この破れの下での E_8 の随伴表現の 248 成分の分解は，

$$\mathbf{248} = (\mathbf{3}, \mathbf{27}) \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \overline{\mathbf{27}}) \oplus (\mathbf{8}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{78}) \qquad (10.10.12)$$

となる．E_6 の GUT 理論で，**27** はクォークとレプトンにもっとも適した表現なので，これはちょうど良い．こうして，

$$\mathrm{Tr}\, R \wedge R = \frac{1}{30} \mathrm{Tr}\, F \wedge F \to \text{スピン埋め込み} \to \mathbf{27}\ \text{フェルミオン} \qquad (10.10.13)$$

が得られる．

次の問題は，**27** の世代がいくつあるか？ である．ふつうは世代の数はゲージ群と何の関係もない．GUT 理論ではそれらはまったく異なるものである．GUT 理論では，フェルミオン世代の同じものが任意の数だけあってもよいのである．ところが弦理論では，スピンの埋め込みの過程のために世代数に制限がつく．スピンの埋め込みのために，ゲージフェルミオンが K_6 多様体と関係がついてしまうのである．そして世代の数は位相的な数と見なせる．なぜならば，ディラック方程式の正と負のカイラル 0 固有値解の数の差は位相的な数だからである．詳しくいえば，

$$\text{世代数} = \frac{1}{2} |\chi(M)| \qquad (10.10.14)$$

となる．残念ながら，Ricci 平坦な Kähler 多様体のオイラー数はふつうかなり大きい．しかし部分多様体をとることにより，この数を猛烈に減らすことが常にできる．たとえば座標のある多項式を保つような不連続群で割ることができる．その良い例は CP_4 を $Z_5 \times Z_5$ で割ったもので，これは単連結になっていない．この多様体は世代を 4 つもっている．

次に，模型をさらにこわして，$N = 1$ 超対称性はこわさずに標準模型 $\mathrm{SU}(3) \otimes \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{U}(1)$ を出したい．ふつうこれは極めて難しい．群を標準模型にまでこわすような破れは $N = 1$ 超対称性もこわすからである．この問題の 1 つの解決法は Wilson ラインの方法を使うことである．前に，今考えている多様体 K_0 が低い世代数を出すためには，単連結でないことを見た．単連結でない多様体に対しては，Wilson ループ

$$U = P \exp \left(\int_C A_\mu dx^\mu \right) \qquad (10.10.15)$$

は，曲率テンソルが 0 でも 1 とは限らない．これは，閉じたループを点に縮めることがいつでもできるわけではないためである．こうして U の要素を，G が U のすべての要素と交換するようにとることによって，E_6 対称性をその部分群 G に破ることが可能になる．たとえば，U の要素を $Z_5 \times Z_5$ にとれば，

$$\frac{E_6}{Z_5 \times Z_5} = \mathrm{SU}(3)_{\mathrm{C}} \otimes \mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{SU}(2)_R \otimes \mathrm{U}(1) \otimes \mathrm{U}(1) \qquad (10.10.16)$$

を得る．ところが残念ながら，標準模型が出る以外に不要な U(1) 群も出てしまうことがわかる．つまり，

$$\text{Wilson ライン} \to \mathrm{SU}(3) \otimes \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{U}(1)^n$$

となる．

オービフォールドは，超弦をコンパクト化する別の方法であるが，これはおそらく Calabi-Yau 空間の極限の場合であろう．オービフォールドは，トーラス T_6 をとり不連続群 Z_n で割ることにより得られ不動点をもち得る：

$$\text{オービフォールド：}\ \frac{T_6}{Z_n}. \tag{10.10.17}$$

(これらの不動点は明らかに弦模型の性質を損わない.)　境界条件を混ぜてしまうモジュラー不変性のために，オービフォールドに自明でない制限がつく．また，境界条件

$$\begin{aligned} X(\sigma_1 + 2\pi, \sigma_2) &= hX(\sigma_1, \sigma_2) \\ X(\sigma_1, \sigma_2 + 2\pi) &= gX(\sigma_1, \sigma_2) \end{aligned} \tag{10.10.18}$$

(ここで h と g は Z_n の要素である)は，弦模型の対称性を破り得る．この過程で残る時空の群と内部の群は，g および h と交換する部分群である．g と h を対角化して要素 $e^{2\pi i v_i}$ と等しくすれば(ここである整数に対し，$v_i = r_i/n$ である)，ハミルトニアンのゼロ点エネルギーは $v_i(v_i - 1)$ に比例する量だけずれる．1 ループのトレースはゼロ点エネルギーによるので，これはモジュラー不変性のために固有値に次の制限がつくことを意味する：

$$\sum_{i=1}^{8} r_i^2 = \sum_{j=1}^{8} r_{1j}^2 + \sum_{j=1}^{8} r_{2j}^2. \tag{10.10.19}$$

ここで r_i は右向き部分の固有値で，2 組の固有値 $r_{1,2;i}$ は左向き $E_8 \otimes E_8$ 部分のものである．もし Wilson ラインを含めれば，コンパクト化の後に残る群は g, h および Wilson ラインと交換する部分群である．

現象論的にはこのコンパクト化には多くの解がある．いくつかは 3 世代と群 $\mathrm{SU}(3) \otimes \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{U}(1)^n$ をもつが，U(1) 因子が多すぎる．残念ながら Wilson ラインの方法は群のランクを変えないので，一般に U(1) 因子が多く出すぎてしまうのである．

Calabi-Yau 空間に比べオービフォールドの大きな長所は，それらが簡単で，平坦で，何千もの例が具体的に作れることである．ところが残念ながら，その両方ともこれらの何千もの解を分類する系統的な方法がないという問題をかかえている．

この方向の 1 つのステップは，モジュラー不変性と，タキオンとアノーマリーがないこととを要求して，系統的に可能なすべての解を導くことである．それはスピン構造の和として書かれている振幅から出発する：

$$A = \sum_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} C \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}. \tag{10.10.20}$$

そこで，C が正しく因子化し，モジュラー不変であり，タキオンもアノーマリーもない模型を与えることを要求する．すばらしいことに，C に対する制限を解き，解を求めることができる．簡単な解は知られている解のいくつかを再現するが，何千もの他の解がまだ調べられているところである．これによりすべての可能性をつくし，現実

的な模型が得られることが期待される．

4次元の解の大きな組を作る別の方法は非対称オービフォールドを使うことである．ヘテロティック弦は非対称コンパクト化の1例になっている．すなわち，左向きと右向きの部分を違うように扱っている．非対称オービフォールドは，今まで発見された最大のオービフォールドであり，異なる型のコンパクト化を用いた他の仕事とかなり重なっているかもしれない．(非対称オービフォールド以外に，非可換オービフォールド，すなわち結晶群などの非可換有限群で割ることに基づくオービフォールドも触れるべきであろう．こういう構成の利点は，不要な U(1) 因子をいくつか消すことができ，また3や4の世代が出ることである．[40] を見よ.)

参考文献

[1] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger, and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B258**, 46 (1985).

[2] G. Horowitz, in *Unified String Theories* (edited by M. Green and D. Gross), World Scientific, Singapore, 1986.

[3] G. F. Chapline and N. S. Manton, *Phys. Lett*, **120B**, 105 (1983).

[4] E. Calabi, *Algebraic Geometry and Topology: A Symposium in Honor of S. Lefschetz*, Princeton University Press, N. J., 1957.

[5] S.-T. Yau, *Proc, Natl. Acad. Sci. U. S. A.* **74**, 1798 (1977).

[6] S.-T. Yau, in *Symposium on Anomalies, Geometry, and Topology* (edited by W. A. Bardeen and A. R. White), World Scientific, Singapore, 1985.

[7] Y. Hosotani, *Phys, Lett.* **126B**, 303 (1983).

[8] L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa, and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B261**, 678 (1985); **B274**, 286 (1986).

[9] C. Vafa, *Nucl. Phys.* **B273**, 592 (1986).

[10] L. E. Ibanez, H. P. Nilles, and F. Quevedo, *Phys. Lett.* **187B**, 25 (1987).

[11] L. E. Ibanez, J. E. Kim, H. P. Nilles, and F. Quevedo, *Phys. Lett.* **191B**, 282 (1987).

[12] D. X. Li, *Phys. Rev.* **D34** (1986).

[13] D. X. Li, in *Super Field Theories* (edited by H. C. Lee), Plenum, New York, 1987.

[14] V. P. Nair, A. Sharpere, A. Strominger, and F. Wilczek, *Nucl. Phys.* **B287**, 402 (1986).

[15] B. R. Greene, K. H. Kirklin, P. J. Miron, and G. G. Ross, *Phys. Lett.* **180B**, 69 (1986); *Nucl. Phys.* **B278**, 667 (1986).

[16] A. Strominger, *Phys. Rev, Lett.* **55**, 2547 (1985).

[17] P. Ginsparg, Harvard preprint HUTP-86/A053, 1986.

[18] S. Karlara and R. N. Mohapatra, LA-UR-86-3954, 1986.

[19] M. Dine, V. Kaplunovsky, M. Mangano, C. Nappi, and N. Sieberg, *Nucl. Phys.* **B259**, 46 (1985).

[20] S. Cecotti, J. P. Deredinger, S. Ferrara, L. Girardello, and M. Roncadelli, *Phys. Lett.* **156B**, 318 (1985).

[21] J. P. Deredinger, L. Ibanez, and H. P. Nilles, *Nucl. Phys.* **B267**, 365 (1986).

[22] J. Breit, B. Ovrut, and C. Segre, *Phys. Lett.* **158B**, 33 (1985).

[23] A. Strominger and E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **101**, 341 (1985).

[24] G. Segre, Schladming Lecture notes (1986).

[25] H. Kawai, D. C. Lewellen, and S. H. H. Tye, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1832 (1986); *Phys. Rev.* **D34**, 3794 (1986); *Nucl. Phys.* **B288**, 1 (1987); *Phys. Lett.* **191B**, 63 (1987).
[26] W. Lerche, D. Lust, and A. N. Schellekens, *Nucl. Phys.* **B287**, 477 (1987).
[27] I. Antoniadis, C. Bachas, and C. Kounnas, *Nucl. Phys.* **B289**, 87 (1987).
[28] I. Antoniadis and C. Bachas, CERN-TH-4767/87, 1987.
[29] C. Kounnas, Berkeley preprint UCB-PTh 87/21, 1987.
[30] I. Antoniadis, C. Bachas, C. Kounnas, and P. Windey, *Phys. Lett.* **171B**, 51 (1980).
[31] K. S. Narain, M. H. Sarmadi, and C. Vafa, *Nucl. Phys.* **B288**, 551 (1987).
[32] R. Bluhm, L. Dolan, and P. Goddard, *Nucl. Phys.* **B289**, 364 (1987).
[33] L. Castellani, R. D'Auria, F. Gliozzi, and S. Sciuto, *Phys. Lett.* **168B**, 77 (1986).
[34] L. Dixon, V. Kaplunovsky, and C. Vafa, SLAC-PUB-4282.
[35] V. G. Kac and I. T. Todorov, *Commun. Math. Phys.* **102**, 337 (1985).
[36] P. G. O. Freund, *Phys. Lett.* **151B**, 387 (1985).
[37] A. Casher, F. Englert, H. Nicolai, and A. Taormina, *Phys. Lett.* **162B**, 121 (1985).
[38] F. Englert, H. Nicolai, and A. Schellekens, *Nucl. Phys.* **B274**, 315 (1986).
[39] D. Lust, *Nucl. Phys.* **B292**, 381 (1987).
[40] N. P. Chang and D. X. Li, "Models of Non-Abelian Orbifolds," CCNY-HEP-87-15.

第IV部

M理論

第11章

M理論とデュアリティー

11.1 はじめに

今までこの本で議論した方法は，いずれも非摂動的な弦理論やその本当の真空に対して何らの深い知見を与えてくれなかった．超対称なモジュライに関連した問題のために，われわれの弦理論の摂動論の理解にもまだ不十分な点がある．さらに弦理論の摂動論では弦理論の本当の真空を得ることはできない．共形場の理論は，無数にある弦理論のいろいろな真空を分類する強力な手法を与えてくれるが，やはり摂動論的に定義されているものであり，非摂動的な領域を調べることはできない．弦の場の理論は，摂動論とは独立に定義されるものであるが，今のところあまりに難しくて非摂動的な領域を調べることはできない．

非摂動論的な弦理論を調べるもっとも面白い新しい方法として，M理論とデュアリティー[1]が考案され［1–6］，超対称性理論において弦理論の果たす中心的役割が見直されてきた．この手法は，弦理論の非摂動論的な振る舞いに関して，驚くべき結果を与えるだけではなく，超重力理論やいろいろな次元のメンブレイン（p ブレインと呼ばれる）などの，以前捨て去られてしまった理論を再考する必要性があることを示している．とくにデュアリティーによって，5つの異なる矛盾のない超弦理論は「M理論」と呼ばれる1つの理論の異なる解であることが示されたのである．この新しい描像では，いろいろな弦理論は1つの理論の異なる真空に他ならない．摂動論では，各々の真空の近くだけしか調べられないが，デュアリティーによって異なる真空の間をあざやかに関係づけることができるのである．

M理論とデュアリティーは，$N=1$ 超対称性をもつ4次元の真空について決定的な情報を与えるにはいたっていないが，10次元，8次元，さらに6次元における弦理論の非摂動的な性質をかなり明らかにしており，異なる弦理論のコンパクト化の間の複雑なデュアリティーによる関係を明らかにしている．

さらにM理論は，理論の本当の世界は11次元であって，そこではメンブレインや5ブレインなどの不思議な物体があることを示している．

M理論から得られる驚くべき事実，知見のいくつかを挙げると，以下のようなものである．

[1] duality は通常双対性と訳されるが，本節以下の duality は古くから呼び慣わされている双対性と違うのでデュアリティーとした．しかし以下ではあまり厳密に区別しない．

- 一見まったく違う性質やスペクトルを含んでいる5つの弦理論がすべて，同じ理論の異なる真空として理解される．

- IIA型と$E_8 \otimes E_8$ヘテロティック弦理論の強結合の極限が，11次元の理論であり，その低エネルギー理論の作用は11次元超重力理論で与えられることがわかった．M理論を円周(線分)にコンパクト化すると，IIA型(ヘテロティック)弦理論になるのである．

- M理論の完全な作用はわかっていないが，メンブレイン(2ブレイン)と5ブレインを含むと考えられている．低次元での閉弦は，これらのメンブレインのコンパクト化したものと見なすことができる．

- (S, T, Uデュアリティーと呼ばれる)摂動的および非摂動的デュアリティーが，いろいろな次元の異なる弦理論の間に確立され，弦理論の非摂動的な振る舞いに関する知見が初めて得られた．

- 摂動論によらない，弦理論のスペクトルや性質に関する厳密な結果が，非くりこみ定理をみたす「BPS飽和状態」の性質を解析することにより得られた．これらのBPS状態の数は，超対称性代数のセントラルチャージを解析することにより，群論だけで求められる．

- 弦理論の非摂動的領域で,「Dブレイン」と呼ばれるまったく新しい型のブレインが見つかり，理論の中で本質的な役割を果たしていることがわかった．ディリクレ境界条件をみたす開弦は，これらのDブレインにくっつくことができる．驚いたことに，これらのDブレインにより，ふつうの共形場の理論の手法を使って，高度に非線形な相互作用を求めることができる．

- Dブレインの状態を数えることにより，統計力学的議論を用いてブラックホールのBekenstein-Hawkingエントロピーの公式を導くことができる．

- 無限大にブーストしたローレンツ座標系における11次元のM理論は，$N \to \infty$の極限のN個の点粒子D0ブレインの10次元理論と同等であると考えられている．これを行列理論という．この行列理論は，最低次では単純な$U(N)$対称な量子力学であり，有限の自由度をもつ系である．

11.2　物理学におけるデュアリティー

デュアリティーというのは，実は古くから知られている現象である．たとえばマクスウェル方程式は，gをモノポールの磁荷として

$$e \leftrightarrow g \tag{11.2.1}$$

と変えれば，次のデュアリティー変換で不変である：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &\to \boldsymbol{B}, \\ \boldsymbol{B} &\to -\boldsymbol{E}. \end{aligned} \tag{11.2.2}$$

ディラックのモノポールに関する理論によれば，n を整数として

$$eg = 2\pi n \tag{11.2.3}$$

でなければならない．このことから，強結合領域(e が大きいところ)で定義されたマクスウェルの理論は，弱結合領域(g が小さいところ)でのモノポールの理論と同等であり，逆も正しいという奇妙な結論が導かれる．通常は解析するのがとても難しい電気力学の強結合領域の振る舞いが，弱結合でのモノポールのふつうの理論となる．この結果は長い間奇妙だと考えられていたが，非摂動的領域が原理的には解析でき，思いがけず簡単であることが示された場の理論における数少ない例の1つになっている．

しかし，これをYang-Mills理論や超対称性の場合に拡張しようとした試みは，混乱している．ダイオン(電荷も磁荷ももっているゲージ理論の古典解)の理論で与えられる古典的方程式から

$$M^2 = \langle\phi\rangle^2(e^2 + g^2) \tag{11.2.4}$$

であることがわかる．ここで M は質量，$\langle\phi\rangle$ は定数，e と g は電荷と磁荷である．このゲージ理論の解は，$e \leftrightarrow g$ という関係をみたしており，したがってこれは実は理論の厳密な対称性であるかもしれない [7–8]．しかし，量子論のレベルでこの種の関係を証明する試みは，長年の間うまくいかなかった．

一方で，長年の間にデュアリティーの重要性を示すいくつかの手がかりが見つかってきた．上の制限を一般化した，いわゆるBPSの関係が超対称性のために量子効果でも変更をうけず，完全な理論でも厳密に成り立つということが長い間予想されてきた．このことから，$N = 4$ 超対称Yang-Mills理論などの超対称なYang-Mills理論ではおそらくデュアリティーが非摂動的に成り立っているのではないかと考えられてきた．

同様に，トーラスにコンパクト化した $D = 11$ 超重力理論の運動方程式が，奇妙な「かくされた」対称性とデュアリティーの関係をもっていることが何年も前にわかった．しかしこれらのデュアリティーの関係の起源はまったくわからなかったので，重要なことではなく奇妙なことであると考えられていたのである．

最近になってようやく，デュアリティーと非摂動的な場の理論に関するこれらすべての考察がまとめられて全体的な描像が得られ，弦理論の非摂動的な構造に関するまったく新しい知見が得られたのである．

11.3 なぜ5つの弦理論があるのか？

デュアリティーは，なぜ5つの弦理論があるのかといった弦理論の大きな謎の1つを理解するための鍵である．重力と他の量子的な力を統一する完全に有限で自己矛盾のない5つの理論があるということは大変不思議議である．

たとえばGreen-Schwarz形式では，南部-後藤の作用を超対称に一般化するのに5つの方法がある．超対称な理論に対して，32成分のマヨラナスピノールを導入するこ

とができるが，これは 16 成分のマヨラナ-ワイルスピノール $\theta^{1,2}$ に分解することができる．(スピノールをもっと導入すると，質量 0 のスピン 3 の場を導入することになるが，それはおそらく量子力学的に矛盾を含んでおり，また重力の多重項になっていて等価原理を破ると考えられる.)　$\theta_\pm$ が 16 成分の，正または負のカイラリティーのグラスマンの場とすれば，$\partial_i X^\mu$ の超対称な拡張を与えることができる．それは

$$\Pi_j^\mu = \partial_j X^\mu - i\bar{\theta}\Gamma^\mu \partial_j \theta \tag{11.3.1}$$

であり，大域的な超対称性変換

$$\begin{aligned} \delta\theta &= \varepsilon \\ \delta X_\mu &= i\bar{\varepsilon}\Gamma^\mu \theta \end{aligned} \tag{11.3.2}$$

のもとで不変である．

世界面の上でカイラルフェルミオン θ_+ が 1 つだけしかないときは，$N = 1$ 超対称性がある(それはヘテロティック弦理論を記述する)．反対のカイラリティーの θ_+^1 と θ_-^2 があれば，これらを組み合わせて 32 成分の 1 つのマヨラナスピノール θ として，$N = 2$ の超対称性にすることができる．これは IIA 型弦理論を与える．

もし同じカイラリティーの θ_+^1 と θ_+^2 があれば，これは $N = 2$ 超対称性をもつカイラルな IIB 型弦理論を与える．こうして大域的に不変な Π_i^μ を構成する 3 つの方法が得られた：

$$\Pi_i^\mu = \begin{cases} \partial_i X^\mu - i\bar{\theta}_+\Gamma^\mu \partial_i \theta_+ & \text{ヘテロティック} \\ \partial_i X^\mu - i\bar{\theta}\Gamma^\mu \partial_i \theta & \text{IIA} \\ \partial_i X^\mu - i\delta_{jk}\bar{\theta}_+^j \Gamma^\mu \partial_i \theta_+^k & \text{IIB.} \end{cases} \tag{11.3.3}$$

こうして超弦理論の作用の最初の項 S_1 は，南部-後藤の作用の一般化として書ける：

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \Pi_i^\mu \Pi_{j\mu} \\ S_1 &= -T \int d^2\sigma \sqrt{-\det\, g_{ij}}. \end{aligned} \tag{11.3.4}$$

ヘテロティック弦理論は 2 種類あり，I 型弦理論は IIB 型理論の世界面でのパリティについて対称な部分をとる(そしてアノーマリーをうち消すために，開弦と Chan-Paton 因子を付け加える)ことにより得られるので，全部で 5 つの超弦理論が得られる．

この南部-後藤の項は大域的な超対称性変換のもとで明らかに不変であるが，局所的には不変でなく，したがって正しい自由度をもっていない．これを修正するためには，Wess-Zumino 項を付け加えなくてはならない．不変形式 $h_{\rm WZ}$ を定義する：

$$h_{\rm WZ} = \begin{cases} \Pi^\mu d\bar{\theta}_+ \Gamma_\mu d\theta_+ & \text{ヘテロティック} \\ \Pi^\mu d\bar{\theta}\Gamma_\mu \Gamma_{11} d\theta & \text{IIA} \\ S_{ij}\Pi^\mu d\bar{\theta}_+^i \Gamma_\mu d\theta_+^j & \text{IIB.} \end{cases} \tag{11.3.5}$$

ただし Γ_{11} はすべての Γ 行列の積であり，S_{ij} は 2 行 2 列の行列で，パウリ行列 σ_z に等しい．h_{WZ} は $h_{WZ} = db$ と表すことができる．h_{WZ} から b を注意深く抜き出すと，作用の Wess-Zumino 的な部分は

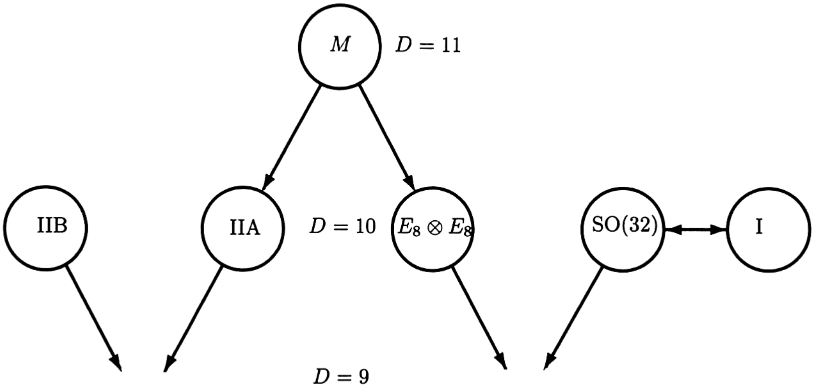


図 11.1：M 理論のデュアリティー．M 理論を 10 次元にコンパクト化することにより，IIA 型理論とヘテロティック弦理論を導くことができる．9 次元へコンパクト化することにより，5 つ全部の弦理論が統一される．

$$S_2 = \frac{T}{2}\int d^2\sigma\ \varepsilon^{ij} b_{ij} \tag{11.3.6}$$

で与えられる．

まとめると，弦の作用は $S_1 + S_2$ に等しい．

（$E_8 \otimes E_8$ と SO(32) の対称性をもつ）2 種類のヘテロティック弦理論と，I 型弦の開弦と閉弦部分を含めれば，5 つ全部の超弦理論の作用が得られる．（ふつう超弦理論というときは，実は $E_8 \otimes E_8$ ヘテロティック弦理論のことが多い．）

これらの理論の差と類似性は，そのゼロモード部分を調べてみるとわかる．そこは 10 次元の超重力理論で記述できる．5 つの超弦理論とその超重力は，次で与えられる．

- IIA 型超弦理論は，（非カイラル）$N =$ IIA 超重力理論になる．
- IIB 型超弦理論は，（カイラル）$N =$ IIB 超重力理論になる．
- $E_8 \otimes E_8$ ヘテロティック弦理論は，$E_8 \otimes E_8$ の Yang-Mills ゲージ場と結合した $N = 1$ 超重力理論になる．
- SO(32) ヘテロティック弦理論は，SO(32) の Yang-Mills ゲージ場と結合した $N = 1$ 超重力理論になる．
- I 型弦理論は，開弦も閉弦も含み，SO(32) の Yang-Mills ゲージ場と結合した $N = 1$ 超重力理論になる．

これら 5 つの超弦理論はそれぞれ他のものとは，大きく異なっていることに注意しよう．たとえば，I 型理論は閉弦と開弦を含むが，他のものは閉弦だけを含む．同様に 5 つの弦理論のゲージ構造は，最後の 2 つを除いて非常に異なる．なぜ重力と他の量子的力を統一する弦理論が 5 つもあるのかという謎は，後でいろいろなデュアリティーを解析するときに解決するであろう（図 11.1 を見よ）．

11.4 T デュアリティー

T デュアリティーがいかに特別なものかを理解するためには，ふつうの点粒子の場の理論では，1 次元コンパクト化すると周期的運動量になることを思い出せばよい：

$$p = \frac{n}{R}. \tag{11.4.1}$$

ここで R は円周の半径，n は整数である．$R \to \infty$ の極限をとれば，運動量は連続になり，コンパクト化していない理論になる．しかしここで $R \to 0$ の極限をとろう．このとき運動量は 0 または無限大になり，したがってコンパクト化されている次元は実質上理論から分離してしまう．したがってこの 2 つの極限は点粒子の理論では，まったく違うことになる．

さて閉弦理論で，9 番目の次元をコンパクト化することを考えよう．このとき点粒子にはなかった複雑なことが生じる．それは弦がコンパクト化した次元に巻き付けるということである．このコンパクト化した理論では運動量演算子が次のような値をとる：

$$(p_L, p_R) = \left(\frac{n}{2R} + mR,\ \frac{n}{2R} - mR\right). \tag{11.4.2}$$

ここでいつものように n は円周上のカルーツァ-クライン的励起から生じ，m は弦が円周に巻き付く回数を表す．

質量スペクトル M^2 は，$n \leftrightarrow m$ の入れ替えをすれば

$$R \leftrightarrow \frac{1}{2R} \tag{11.4.3}$$

のもとで不変であることに注意しよう [9]．これは弦理論の大きなスケールでの振る舞いを小さなスケールでの振る舞いに関係づけるという非常に不思議な対称性である．点粒子の場の理論と違って，弦理論はこれらの 2 つの領域を区別することはできないのである．このデュアリティー対称性は，巻き付きモードとカルーツァ-クラインモードを入れ替えるが，完全に弦理論の幾何学の結果なのであり，点粒子の理論にはないものである．

このデュアリティー変換を共形場の理論でなじみの言い方に直すと，

$$\begin{aligned} \partial X &\to \partial X \\ \bar{\partial} X &\to -\bar{\partial} X \end{aligned} \tag{11.4.4}$$

という置き換えをすることに等しい．

片方だけの符号を変えていることに注意しよう．これと同じデュアリティーを，Neveu-Schwarz-Ramond 形式の超弦理論に適用すれば

$$\begin{aligned} \psi_L^9 &\to -\psi_L^9 \\ \psi_R^9 &\to \psi_R^9 \end{aligned} \tag{11.4.5}$$

を得る．しかし 9 番目の左向き振動子をこのように変換すると，フェルミオンのゼロモードでできている 10 次元の左向きカイラリティー演算子も符号を変える：

$$\Gamma_{11} = \psi_L^0 \psi_L^1 \psi_L^2 \cdots \psi_L^9 \to -\Gamma_{11}. \tag{11.4.6}$$

したがって，左向きの部分はカイラリティーの符号を変える．正と負のカイラリティーをもつ IIA 型理論のスピノールは，T デュアリティーにより同じカイラリティーの理論，すなわち IIB 型理論に変換される．9 次元では次のようなデュアリティーがある [10]：

$$T\colon\ \mathrm{IIA} \leftrightarrow \mathrm{IIB}. \tag{11.4.7}$$

（デュアリティーの関係を象徴的に表すために，記号 $\leftrightarrow$ を使う.）

したがって IIA 型と IIB 型理論を R で決まるつながった真空の 2 つの極限の点と考えることができる．$R \to \infty$ または $R \to 0$ により 10 次元のふつうの II 型弦理論を得ることができるのである．

こうして 5 つの超弦理論は 4 つになった．

$E_8 \otimes E_8$ と SO(32) ヘテロティック弦理論を解析することにより，さらに別の T デュアリティーが見つかる．まず Narain 格子を考える．ヘテロティック弦理論を d 次元にコンパクト化することを考える．このことは $26-d$ 個の左向きの次元と $10-d$ 個の右向きの次元をコンパクト化することを意味する．これらの次元を $\mathbf{\Gamma}_L$ と $\mathbf{\Gamma}_R$ の格子にコンパクト化しよう．1 ループヘテロティック弦理論振幅を構成して，それがモジュラー不変であることを要求すれば，さらに制限

$$\mathbf{\Gamma}_L \cdot \mathbf{\Gamma}_L - \mathbf{\Gamma}_R \cdot \mathbf{\Gamma}_R = \mathbb{Z} \tag{11.4.8}$$

がつく．ここで $\mathbb{Z}$ は整数を表す．

計量に負の符号があることは，これがローレンツ型の格子であることを意味している．またモジュラー不変性から，これらの格子は偶で，超対称性自己双対で，ローレンツ型であることが要求されるが，これでもまだ格子をどう選ぶかにはかなりの自由度が残されている．実際格子を $\mathrm{SO}(26-d, 10-d)$ で回転しても，この制限をみたしながら，モジュラー不変性をみたすことができ，しかもそれぞれが異なる真空に対応しているのである [11].

しかしながら，群 $\mathrm{SO}(26-d, 10-d)$ は弦理論で可能な真空のモジュライ空間を表すにはまだ大きすぎる．まだまだ不要な部分がある．質量演算子が左向きと右向きのモードに対して，別々の $\mathrm{SO}(26-d) \otimes \mathrm{SO}(10-d)$ 回転のもとで不変なのである．

最後にモジュライ空間の同等でない真空を求めるには，T デュアリティーの作用で割る必要がある．不連続群

$$T = \mathrm{SO}(26-d, 10-d, \mathbb{Z}) \tag{11.4.9}$$

は単に格子点を混ぜるだけなので，物理をまったく変えない．これは $R \to 1/2R$ の一般化であり，単に 1 つの真空を別の同等な真空に射影するにすぎない．

まとめると，ヘテロティック弦理論の異なる，同等でない真空の空間を記述するモジュライ空間は

$$\text{モジュライ空間} = \mathcal{M}_{26-d,10-d} = \frac{\mathrm{SO}(26-d, 10-d)}{\mathrm{SO}(26-d) \otimes \mathrm{SO}(10-d) \otimes T} \tag{11.4.10}$$

である．ここで $\mathcal{M}_{m,n}$ の独立なパラメーターの数は mn である．

(文献では $\mathcal{M}_{26-d,10-d}$ はよく

$$\mathrm{SO}(26-d, 10-d, \mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SO}(26-d, 10-d) / \mathrm{SO}(26-d) \otimes \mathrm{SO}(10-d) \quad (11.4.11)$$

と書かれているが，ここでははっきりさせるために素直なモジュライ空間をすべての余分な因子で割った書き方を使う.)

スカラー場の真空期待値が可能な真空を決めるので，この対称性は有効超重力理論のスカラー場の空間とも対応していなければならない．たとえば，ヘテロティック弦理論で c 次元をコンパクト化した場合，i がコンパクト化した座標を表すとして，スカラー粒子は，内部計量 g_{ij}，内部反対称 2 形式 B_{ij}，および内部カルタンゲージ場 A_i^a で与えられる次の数だけの成分をもつ：

$$\begin{array}{ll} g_{ij}: & \frac{1}{2}c(c+1) \\ B_{ij}: & \frac{1}{2}c(c-1) \\ A_i^a: & \quad cn \quad . \end{array} \quad (11.4.12)$$

全体では，$c^2 + cn$ 個のスカラー粒子となる．ヘテロティック弦理論に対しては $n = 16$ である．これはまさにコセットモジュライ空間 $\mathrm{SO}(c+n, c)/\mathrm{SO}(c+n) \otimes \mathrm{SO}(c)$ の次元である．したがって確かにスカラー場が可能な真空のモジュライ空間を決めていることがわかる．

重要な教訓は，T デュアリティー群 $\mathrm{SO}(26-d, 10-d, \mathbb{Z})$ で結びつく真空が $E_8 \otimes E_8$ ヘテロティック弦理論や $\mathrm{SO}(32)$ ヘテロティック弦理論の両方を同じ空間のある極限の点として含んでいることである．象徴的に書けば

$$T: \quad E_8 \otimes E_8 \leftrightarrow \mathrm{SO}(32) \quad (11.4.13)$$

となる．

こうして今や 4 つの超弦理論が 3 つになった．

II 型超弦理論で左向きと右向きの部分を両方とも同時にコンパクト化して，その格子コンパクト化について同様な解析をすることができる．驚くまでもないが，T デュアリティー群はやはり $T = \mathrm{SO}(10-d, 10-d, \mathbb{Z})$ で与えられることがわかる．しかし IIA 型と IIB 型理論の同等でない真空のモジュライ空間の全体は，次章で見るように，余分のスカラー場があるために直交群の単なる組み合わせよりはずっと複雑である．

11.5 *S* デュアリティー

今までわれわれは T デュアリティーについてだけ調べてきたが，これは弦理論の結合定数について摂動的対称性であり，したがってこれらの理論の非摂動的性質については何の知見ももたらさない．もっと面白いのは，1 つの理論の弱結合領域を別の理論の強結合領域に関係づける S デュアリティーである．S デュアリティーは本質的に非摂動的なので，まったく新しいことがでてきて驚くことになる [13–16].

ディラトン場の期待値が弦の結合定数に関係しているので，この非摂動的な効果の議論ではそれが中心的な役割を果たすことを見るであろう．第 1 量子化した弦のラグランジアンは世界面の面積を与える通常の項だけでなく，世界面のリーマン曲率との

結合項をも含んでいる：

$$\sqrt{-g}\left(g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu + \phi R^{(2)}\right). \tag{11.5.1}$$

ここで種数 g の 2 次元リーマン面のオイラー数が

$$\chi = \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma \sqrt{-g}\, R^{(2)} \tag{11.5.2}$$

で与えられることを使う．

したがって $\phi \to \phi + \langle\phi\rangle$ を代入すれば，ユークリッド経路積分 e^{-S} は新しい項

$$e^{-S} \to e^{-S} e^{\langle\phi\rangle(2g-2)} \tag{11.5.3}$$

を得る．一般に，各 n 点弦振幅には n を境界または外線の弦の数として，結合定数の因子 g_s^{2g-2+n} がかかっている．リーマン面の各頂点関数のところに $e^{\langle\phi\rangle}$ をおけば，

$$g_s = e^{\langle\phi\rangle} \tag{11.5.4}$$

とすることにより，この因子を弦の結合定数 g_s の中に再吸収することができる．このように結合定数はディラトン場の真空期待値に関係している．

重要な点は，S デュアリティーは $\langle\phi\rangle$ を $-\langle\phi\rangle$ に変え，したがって強結合を弱結合領域に変えるということである．これがどのようにしてできるのかをいくつかの例で見ることにしよう．

IIA 型理論

S デュアリティーは，IIA 型弦理論に適用したとき，11 次元の構造が現れてくるという深遠で直観に反した結果を与える．

まずもとの 11 次元超重力理論を考えよう [17]．これは繰り込み不可能であり，カイラルな理論でないので，歴史的には捨て去られていた．ここでこの両方の問題が解決されるような新しいデュアリティーの観点からこの理論をもう一度解析し直してみよう．

この理論のボソン部分は，11 次元の計量 g_{MN} と 3 階反対称テンソル A_{MNP} を含んでいる：

$$S = \frac{1}{\kappa_{11}^2}\int d^{11}x \left\{\sqrt{-g}\left[R + \frac{1}{12}|F|^2\right] + \frac{2}{(72)^2}\varepsilon^{M_1 M_2 \ldots M_{11}} F_{M_1\ldots M_4} F_{M_5\ldots M_8} A_{M_9 M_{10} M_{11}}\right\}. \tag{11.5.5}$$

ここで $F_{M_1\ldots M_4}$ は $A_{M_1 M_2 M_3}$ の反対称化した微分から作られた場の強さである．

さてこれを重い場を積分して得られる質量 0 の場のみを含む IIA 型有効理論の作用と比べてみよう．弦の変数を理論の質量 0 の場に結合させ，それらを背景場として扱う．重力子 $g_{\mu\nu}$ とディラトン ϕ の他に，2 つの Neveu-Schwarz 場の積からくる 2 階の反対称テンソル $B_{\mu\nu}$ がある．(Neveu-Schwarz-Ramond 形式の閉弦理論のボソン場は，左向きと右向きの 2 つの NS 演算子または 2 つの R 演算子の積から得られるこ

とを思い出す．すなわち，ボソンのスペクトラムは $\mathrm{NS}_L \otimes \mathrm{NS}_R$ または $\mathrm{R}_L \otimes \mathrm{R}_R$ という状態から作られる．R-R 状態は IIA 型，IIB 型および I 型弦理論の場合には存在するが，ヘテロティック弦理論には存在しない.)

実は IIA 型と IIB 型理論の両方に，同じ NS-NS の質量 0 の状態がある：

$$\text{NS-NS:}\ \{\phi, g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}\}\,. \tag{11.5.6}$$

しかし IIA 型理論の R-R 部分は余分の状態を含む：

$$\text{R-R:}\ \{C_\mu, A_{\mu\nu\rho}\}\,. \tag{11.5.7}$$

さて IIA 型理論の有効作用を質量 0 の場で(最低次で)書き下す．それはちょうど 10 次元のカイラルでない $N=2$ 超対称超重力である．$K=dC$，$H=dB$，$G=dA$ とすれば，質量 0 の場の(最低次の)作用は

$$\begin{aligned} S = \int d^{10}x \biggl\{ \sqrt{-g}e^{-2\phi}\left[R + 4|d\phi|^2 - \frac{1}{3}|H|^2\right] \\ - \sqrt{-g}\left[|K|^2 + \frac{1}{12}|G|^2\right]\biggr\} + \frac{1}{144}\int G\wedge G\wedge B \end{aligned} \tag{11.5.8}$$

となる．

何年も前に，11 次元超重力理論を円周にコンパクト化して，円周の半径を 0 にすれば，10 次元 IIA 型超重力理論が得られることはわかっていた．しかしこの対応の本当の意味はその当時はわかっていなかったのである．ここでこの対応をもっと詳しく解析してみよう．

(最低次の) 11 次元超重力と IIA 型弦理論の作用は，11 次元計量テンソル g_{MN} と 3 階反対称形式 A_{MNP} を 10 次元の場に

$$\begin{aligned} g_{MN} &\to (g_{\mu\nu}, C_\mu, \phi) \\ A_{MNP} &\to (A_{\mu\nu\rho}, B_{\mu\nu}) \end{aligned} \tag{11.5.9}$$

と分解すれば，完全に同じである．ただし，11 番目の次元の半径は $e^{2\phi/3}$ で与えられるとした．

より正確には，11 次元の計量テンソルと反対称テンソルは

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{MN}dx^M dx^N = e^{-2\phi/3}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + e^{4\phi/3}\left(dy - dx^\mu C_\mu\right)^2 \\ A &= \frac{1}{6}dx^\mu\wedge dx^\nu\wedge dx^\rho A_{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2}dx^\mu\wedge dx^\nu\wedge dy B_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{11.5.10}$$

というふうに分解される．

最初は，円周にコンパクト化した 11 次元の超重力理論は 10 次元の IIA 型弦理論にはないカルーツァ-クライン状態をもつので，この結果は正しくないと思うかもしれない．しかし後で見るように，これらのカルーツァ-クライン状態は実は 10 次元ではソリトン的解として別の形で存在する．11 次元からくるカルーツァ-クライン状態を 10 次元で存在するソリトン的状態と比較すると，それらが完全に同じであることがわかる．言い換えると，(ソリトン的状態をいれた) 10 次元 IIA 型理論は，実は形を変え

た 11 次元の理論なのである.

同様に，質量 0 の場で表された IIA 型理論は曲率テンソルの非常に高次の多項式であるが，11 次元の超重力はそうではない．したがって，11 次元理論として書き直した IIA 型弦理論は，低エネルギーの極限でのみ 11 次元超重力を含んでいることが期待される.

こうして，M 理論と呼ばれるまったく新しい 11 次元の理論が存在するという仮定に導かれる．以上から得られる結論は次のようになる．**M 理論と呼ばれる新しい 11 次元の理論が存在する．その低エネルギー極限は 11 次元超重力理論であり，円周上にコンパクト化したとき，（カルーツァ-クラインモードを含む）IIA 型弦理論になる．**とくに IIA 理論の強結合極限が M 理論である.

これは本当にすごい結果である [18–19]．10 次元の IIA 超弦理論の強結合極限が新しい 11 次元理論の弱結合極限と同等であって，その低エネルギー極限は 11 次元超重力ということである．より正確には

$$R_{11} = (g_s)^{2/3} \tag{11.5.11}$$

が成り立つ．これから，なぜ以前の研究がこの対応を発見できなかったかがわかる．10 次元の IIA 超弦理論の弱結合の摂動論では，理論の強結合でしか見えない 11 次元は決して見えない．$\langle\phi\rangle$ が大きくなって初めて，IIA 弦理論の強結合領域に入るので $R_{11} \to \infty$ となり，M 理論の 11 次元の性質が見えてくるのである.

また M 理論が弦理論よりもはるかに豊かな構造をもっていることもわかる．M 理論には，3 形式があって，拡がった物体に結合できる．電磁気学で点粒子がベクトル場 A_μ の源になったことを思い出そう．弦理論では，弦はテンソル場 $B_{\mu\nu}$ の源になる．同様に M 理論では，メンブレインが A_{MNP} の源になる．弦は 11 次元では存在できないが，超重力とか，超メンブレイン，その超対称性デュアルである超 5 ブレインなどの超物体は存在できる.（後の章でこれらの超 p ブレインの作用を構成する.）

しかしこれらの驚くべき結果は，答えよりも多くの問題を生じる．たとえば，M 理論は IIA 型超弦理論の強結合の振る舞いを説明するが，11 次元の理論の完全な作用がどういうものかはわからない．単にその低エネルギー部分が 11 次元超重力であることしか知らないのである．現在のところ，完全な理論を系統的に導く方法は知られていない．また 11 次元のメンブレインや 5 ブレインを量子化する方法もわかっておらず，その相互作用についてはっきりしたことは何も言えない.

皮肉なことに，11 次元の超重力は次のような理由で物理的な理論としては否定された.

(a) おそらくくりこみ不可能である（すなわち 7 次のループでくりこみ項がある).

(b) 多様体にコンパクト化したとき，カイラルフェルミオンがない.

(c) 4 次元にコンパクト化したとき SO(8) しか出せないので，標準模型が再現できない.

今や，M 理論と呼ばれる新しい 11 次元理論はこのどの問題ももっていないので，その低エネルギー極限である 11 次元超重力もまったく新しい意味をもつ．くりこみ可能性の問題は，完全な M 理論が曲率テンソルの高次の項を含み，それが理論を有限に

すると考えられる．カイラリティーの問題は，11次元の超重力は多様体にコンパクト化したときカイラリティーを出すことはできないが，M理論が(線分のような)多様体でない空間にコンパクト化したときはカイラリティーを出すというふうに解決される．SO(8)が小さすぎて標準模型が入らないという問題は，理論を非摂動的に解析したとき線分にコンパクト化すれば $E_8 \otimes E_8$ 対称性が出てくるということで解決される．

また何年もの間なぜ物理学者がこの割に単純な対応に気付かなかったかということもわかる．結合定数がコンパクト化の半径とともに大きくなるので，摂動展開のどんな次数まで見ても，この11次元のことは見えない．この11次元と10次元の対応は本質的に非摂動的なものである．この S デュアリティーの関係を象徴的に次のように表しておく：

$$S: \quad \mathrm{S}_1 \text{ 上の M} \leftrightarrow \text{IIA}. \tag{11.5.12}$$

IIB型理論

IIA型理論とM理論との間の S デュアリティーは驚くべき関係であり，できるだけいろいろな方法で確かめるべきである．S デュアリティーと T デュアリティーはからみあっているので，いろいろな無矛盾性のチェックができる．

IIB型弦理論は9次元で T デュアリティーによってIIA理論と関係しているので，11次元超重力とIIB型弦理論も(最低次で)関係していると考えられる．

IIB型理論には，NS-NSの部分から生じる場以外に，R-R部分から生じる場としてスカラー場 l と4階反対称テンソル $C_{\mu\nu\sigma\rho}$ と2階の反対称テンソル $B'_{\mu\nu}$ がある：

$$\text{R-R}: \; \left\{ l, B'_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\sigma\rho} \right\}. \tag{11.5.13}$$

すべての高次のモードを積分した後のIIB型理論の有効作用は(最低次で)

$$\begin{aligned} S = \int d^{10}x\sqrt{-g}\bigg\{ & e^{-2\phi}[R + 4|d\phi|^2 - \frac{1}{3}|H|^2] - 2|dl|^2 \\ & - \frac{1}{3}|H' - lH|^2 - \frac{1}{60}|M^+|^2 \bigg\} - \frac{1}{48}\int C^+ \wedge H \wedge H' \end{aligned} \tag{11.5.14}$$

となる．ここでフェルミオンの項と曲率について高次の項はすべて落とした．また $H = dB$，$H' = dB'$，$M^+ = dC^+$ であり，M^+ は超対称自己双対である．(この作用では，超対称自己双対な反対称場には簡単な共変的作用がないという微妙な点は無視した．)

S デュアリティーを示すために，$g_{\mu\nu} \to e^{-\phi/2}g_{\mu\nu}$ という置き換えをする．その結果

$$\begin{aligned} S = \int d^{10}x\sqrt{-g}\bigg\{ & R - 2\left[|d\phi|^2 + e^{2\phi}|dl|^2\right] - \frac{1}{60}|M^+|^2 - \frac{1}{3}e^{-\phi}|H|^2 \\ & - \frac{1}{3}e^{\phi}|H' - lH|^2 \bigg\} - \frac{1}{48}\int C^+ \wedge H \wedge H' \end{aligned} \tag{11.5.15}$$

を得る．

IIB理論を半径 R_{10} の円周にコンパクト化することを考えよう．M理論に関する推

測が正しければ，これはM理論をまず半径 R_{11} にコンパクト化し，それから半径 R_{10} の円周にコンパクト化したものと同等なはずである．11次元超重力理論を $S_1 \otimes S_1$ にコンパクト化したものと，IIB理論を S_1 にコンパクト化したものを比べると，次のような同一視をすればそれらが同等であることがわかる：

$$g_{\mathrm{IIB}} = \frac{R_{11}}{R_{10}}. \tag{11.5.16}$$

しかし $S_1 \otimes S_1$ はトーラスを作り，トーラスのモジュラー群は $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ であることに注意しよう．とくに R_{11}/R_{10} で記述されるトーラスは，R_{10}/R_{11} で記述されるトーラスと関係している．しかしこのことは，結合定数 g で記述されるIIB理論が結合定数 $1/g$ で記述されるIIB理論と同等である，すなわち**超対称自己双対**であることを意味している．これはM理論による自明でない予言である．

この予言を確かめるために，まずIIB型の作用が次に与える $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ 変換のもとで確かに不変であることに注意する：

$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d}. \tag{11.5.17}$$

ここで

$$\tau = l + ie^{-\phi} \tag{11.5.18}$$

であり，a, b, c, d は $ad - bc = 1$ をみたす実数，l はアクシオン場であり，また同時に2形式に対し

$$\begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix} \tag{11.5.19}$$

という変換をするものとする．

もっとはっきり言えば，次の行列を導入することによりこの不変性を示すことができる：

$$\mathcal{M} = e^{\phi} \begin{pmatrix} |\tau|^2 & l \\ l & 1 \end{pmatrix} ; \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{11.5.20}$$

これは $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ のもとで，次のように変換する：

$$\mathcal{M} = \Lambda \mathcal{M} \Lambda^T. \tag{11.5.21}$$

また H と H' を列ベクトル $\tilde{H}$ にまとめて

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} H \\ H' \end{pmatrix} ; \qquad \tilde{H} \to (\Lambda^T)^{-1} \tilde{H} \tag{11.5.22}$$

とすることができる．

こうするとIIB型作用は（簡単なスケール変換の後）$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ のもとで明白に不変な形

$$S = \int d^{10}x \ \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{12} \tilde{H}^T_{\mu\nu\rho} \mathcal{M} \tilde{H}^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{4} \ \mathrm{Tr} \ (\partial^\mu \mathcal{M} \partial_\mu \mathcal{M}^{-1}) \right) \tag{11.5.23}$$

にすることができる．ここでフェルミオン，超対称自己双対なテンソルと高次の相互作用の項は落とした．

この最低次の作用を量子化したとき，古典的対称性 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ はその部分群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ になり，S デュアリティーは

$$S = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \tag{11.5.24}$$

で与えられる．驚くべきことは，この S デュアリティーの関係は IIB 型理論の場の間の抽象的な関係として定義されていたが，M 理論では物理的な空間での幾何学的な関係として定義されていることである．これがこの形式の有力な点である．

$l=0$ とおけば，この $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 対称性はその一部として重要な不変性

$$\phi \to -\phi \tag{11.5.25}$$

を含んでいる．言い換えると IIB 型理論の強結合は，ふつう摂動的方法では取り扱えないが，M 理論の予言の通り別の IIB 型弦理論になっていることがわかる．したがって IIB 型弦理論は自己双対である．これは驚くべき結果であり，S デュアリティーにより強結合の 1 つの弦理論を弱結合の別の弦理論に関係づけることができることがわかったのである．すなわち

$$S\colon\ \mathrm{IIB} \leftrightarrow \mathrm{IIB}. \tag{11.5.26}$$

M 理論と IIB 型理論

M 理論と IIB 型理論の間に，やっかいだが直接の関係をつけることもできる．前に M 理論を T_2 にコンパクト化したが，それは S_1 にコンパクト化した IIA 型理論と同等である（これはさらに IIB 型理論と T デュアルである）．T_2 にコンパクト化した M 理論は，すでに見たように $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ モジュラー対称性で特徴づけられ，これにより IIB 型理論の $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 対称性を幾何学的に説明できた．残念ながら，T_2 にコンパクト化した M 理論と S_1 にコンパクト化した IIB 型理論の間のこの関係は，9 次元でだけ成り立つ．10 次元の IIB 型理論を得るには，R_{10} を 0 にする（ということは T デュアリティーにより IIB 理論のコンパクト化の半径を無限大にすることと同じである）必要がある．これは面積 0 で決まった形のトーラスにコンパクト化した M 理論が 10 次元の IIB 型理論に等しいことを意味しており，ちょっとやっかいな関係である．

この極限を記号的に T_0^2 と表せば

$$\begin{cases} \mathrm{S}_1 \text{ 上の M 理論} & \leftrightarrow \quad \mathrm{IIA} \\ \mathrm{T}_0^2 \text{ 上の M 理論} & \leftrightarrow \quad \mathrm{IIB} \end{cases} \tag{11.5.27}$$

ということになる．

最後にいくつかの奇妙なパズルがある．まず 11 次元超重力がコンパクト化したときカイラルな理論を再現できないのに，M 理論はできるというのは変に思える．実は 11 次元超重力にカイラル表現がないことがもともとそれを排除した重要な物理的根拠であった．

たとえば，T_2 にコンパクト化した M 理論は，たくさんのカルーツァ-クラインモー

ドと高次項に結合した $D=9, N=2$ 超重力に帰着する．トーラスの形を固定して面積を 0 にする極限で，カイラルな超重力理論が回復する．つまりカイラルでない理論から出発して，カイラルな理論が得られる．カイラルな状態はどこからきたのであろうか？

その答えは M 理論には，11 次元超重力に対して高次の補正を含んでいるということにある．とくに M 理論は T_2 にメンブレインを巻き付けることから生じる重い状態も含んでいる．トーラスの形を固定して面積を 0 にする極限で，これらの重い状態が質量 0 になって，有効理論として $D=10$ の IIB 型超弦理論を再現するのである．ここでの教訓は，M 理論は 11 次元超重力の他に，高次の p ブレイン状態を含んでおり，それらが超重力理論のたくさんの「病気」を治してくれるということである．これらの高次の p ブレイン状態はとくに，5 つの超弦理論をすべて 1 つの理論に統一するのに重要である．

次の謎は，IIB 弦理論はテンソル場 B と B' で与えられる 2 つの背景場を含んでいるということに関係している．IIB 型弦は，$\varepsilon^{ij}\partial_i X^\mu \partial_j X^\nu B_{\mu\nu}$ という結合で B 場の源となり，したがってこの場に関するチャージをもっていることがよく知られている．一方 IIB 型弦は B' の源にはなれない．しかし $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ は B と B' を入れ替えるので，IIB 型弦以外に B' のチャージをもつ別の物体がなければならない．ではそれはいったい何だろう？ これに対応するものとして，M 理論を IIA 型理論にコンパクト化したときに見つかったカルーツァ-クラインモードのように，B' のチャージをもち，完全な $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 対称性を生じるような新しい BPS 状態があることを後で示す．

IIB 型理論の議論を終える前に，いろいろな弦理論の低エネルギー有効作用に現れる ϕ の因子についてふれておこう．リーマン面のオイラー数は $\chi=2-2g$ で与えられることを思い出す．ハンドルのない球面に対しては，$g=0$ であり，オイラー数は 2 である．e^{-S} についての経路積分が因子 $g_s^{-\chi}$ を与えるので，球面に対して g_s^{-2} の因子がつく．したがって球面上で定義された有効弦理論の作用は，因子 $g_s^{-2}=e^{-2\phi}$ をもつべきである．実際 NS-NS 部分からくる場の弦の作用はすべてこの因子をもっていることがわかる．IIA 型と IIB 型の作用では，これは $R, \phi,$ および H 場である．

しかし，R-R 部分からくる質量 0 の背景場は弦の世界面には直接結合しないので，ϕ 依存性はまったくない．それらは $\partial_i X^\mu$ の積による通常の形で弦の世界面とは結合できない．そのかわり $\bar{S}\Gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}S$ といったスピノールの 2 次形式により結合する．一般に，これは世界面にリーマン面の切断線があることを意味する．このことはまた，R-R 場を含む II 型作用には ϕ 依存性がないことも意味している．

この議論のいたるところで，弦理論の R-R 部分は弦理論の非摂動的構造に関して高度に非自明な情報をもっていることを見ることになるであろう．

$E_8 \otimes E_8$ ヘテロ型弦理論

今まで $N=2$ 超弦理論を考えることにより，5 つの超弦理論を 3 つにすることができた．では $N=1$ のカイラルな超弦はどうであろうか？ とくに $E_8 \otimes E_8$ のヘテロティック弦と I 型弦はどうであろう？ 再び驚くべきことが見つかる [20]．

まだよくわかっていない(低エネルギー理論が 11 次元超重力になっている)11 次元の理論を有限の線分にコンパクト化することから始める．すなわち，まず S_1 にコンパクト化して IIA 型理論を出した後，$\mathbb{Z}_2$ の作用で割るのである．この不連続対称性は S_1 に次のように作用する．$x^{11} \to -x^{11}$.

$\mathbb{Z}_2$ で割ることにより，IIA 型理論の $N = 2$ 対称性は半分に破れ，$N = 1$ になる．また $\mathbb{Z}_2$ のもとで対称なボソン状態も落とさないでおく．それらは，10 次元計量 $g_{\mu\nu}$，スカラー $g_{11,11}$ および反対称テンソル $A_{\mu\nu 11}$ である．$N = 1$ 対称性をもつこれらの場は，ちょうど $E_8 \otimes E_8$ ヘテロティック弦理論(からゲージ多重項を除いた)のスペクトルになっていることに注意しよう．

同一視によって線分を考えたことにより，理論に量子異常が生じるが，M 理論に量子異常はないので，それはうち消さなければならない．この問題を解決するために，2 つの超平面を作る線分の端点に作用に 2 つの量を自然に付け加えることになる．量子異常を消すためには，$N = 1$ の理論の 496 個のベクトルを加えなければならないことを思い出そう．この問題は各超平面に 248 個のベクトルを考えることで解決する．E_8 がちょうど 248 個の状態を与え，また $\mathbb{Z}_2$ 対称性のため線分の両端に同じゲージ群があることがわかっているから，全体の理論は $E_8 \otimes E_8$ または SO(32) ゲージ対称性をもつ．言い換えると，線分の両端にある各超平面に超 E_8 Yang-Mills 理論を考えることにより量子異常を打ち消すことができ，したがってその結果得られる理論は $E_8 \otimes E_8$ 対称性をもつ．(現在のところ，どのようにして超 Yang-Mills 理論が M 理論を線分にコンパクト化すると出てくるのかについて，詳しいことはあまりよくわかっていない.)

まえと同じように，弦の結合定数が大きくなればなるほどこれらの超平面の間の距離が大きい，すなわち $R = g_s^{2/3}$ である．したがって，弦の摂動のどんな次数でもこれら 2 つの超平面の直接の影響を見ることは決してできない．これが弦理論でこれまで，これらの超平面があることや，ヘテロティック弦の非摂動的構造がわからなかった理由である．

これを象徴的に次のようにまとめよう：

$$S: \quad S_1/\mathbb{Z}_2 \text{ 上の M 理論} \leftrightarrow E_8 \otimes E_8. \tag{11.5.28}$$

I 型弦理論

これで 5 つの超弦理論が 2 つになった．まだ I 型超弦が残っているが，これは他のと違って，開弦と閉弦の両方を含む．最後の対応は SO(32) をもつ I 型と SO(32) ヘテロティック弦を比べることにより得られる．これらはまったく違うやり方で SO(32) 対称性を実現している(I 型弦は Chan-Paton 因子により，SO(32) ヘテロティックは Frenkel-Kac 構成による)が，これらはまったく同じ低エネルギー理論をもっている．それでこれらは S デュアルではないかと思われる [21–22].

まえと同じように，この関係について M 理論からの予言をしてみよう．まず M 理論を長さ L の $S_1/\mathbb{Z}_2$ にコンパクト化する．すると $E_8 \otimes E_8$ ヘテロティック弦になる．

そこで再び半径 R の S_1 にコンパクト化すると，対称性が SO(16) $\otimes$ SO(16) に破れる．このとき，M 理論を半径 R で長さ L のシリンダーにコンパクト化したことになる．

さて，こうして得られた理論を半径 R の円周にコンパクト化した I 型理論と SO(32) ヘテロティック理論と比べてみよう．I 型理論のボソン有効作用は

$$S = \int dx^{10}x\sqrt{-g}\left\{e^{-2\phi}\left[R + 4|d\phi|^2\right] - e^{-\phi}\ \mathrm{Tr}\ |\mathcal{F}|^2 - \frac{1}{3}|H'|^2\right\} \tag{11.5.29}$$

である．

I 型低エネルギー有効理論に現れる ϕ の項が正しい性質をもっていることに注意しよう．R と $d\phi$ の項は，球面上で定義されているので期待通り，$e^{-2\phi}$ がかかっている．(しかし $H = dB$ の場はない．) $\mathcal{F}$ の項に $e^{-\phi}$ の因子がかかっているのは，Yang-Mills 項は開弦に付随したもので，球面ではなく(オイラー数 1 の)円板上で定義されているからである．H' 項は R-R 部分からくるので，ϕ 依存性はない．したがって I 型作用のすべての因子が正しい世界面の構造と ϕ 依存性をもつことがわかる．

SO(32) ヘテロティック作用は

$$S = \int d^{10}x\sqrt{-g}e^{-2\phi}\left[R + 4|d\phi|^2 - \frac{1}{3}|H|^2 - \alpha'\ \mathrm{Tr}\ |\mathcal{F}|^2\right] \tag{11.5.30}$$

である．この作用が正しい ϕ 依存性をもつことに注意する．ヘテロティック弦には R-R 部分はないので，期待通り SO(32) の作用全体に $e^{-2\phi}$ の因子がかかっている．

さて M 理論を $[S_1/\mathbb{Z}_2] \otimes S_1$ または $S_1 \otimes [S_1/\mathbb{Z}_2]$ にコンパクト化することを考える．コンパクト化の順序をいつでも逆にすることができる．

第 1 の方法では，まず $S_1/\mathbb{Z}_2$ にコンパクト化して $E_8 \otimes E_8$ 理論を得た．そして S_1 にコンパクト化して SO(16) $\otimes$ SO(16) ヘテロティック理論を得た．一方これは S_1 にコンパクト化した SO(32) 理論に T デュアルであった．

第 2 の方法では，順序を逆にした．まず S_1 にコンパクト化して IIA 型理論を得た．それから再び $S_1/\mathbb{Z}_2$ にコンパクト化すれば，$N = 2$ 超対称性が $N = 1$ に破れる．この $N = 1$ 理論の構造を注意深く調べると，これが SO(16) $\otimes$ SO(16) の群の I 型理論と T デュアルであることがわかる．両方の理論が同じでなければならないから，I 型理論とヘテロティック弦の間の関係が得られる：

$$S\colon\ \mathrm{SO}(32) \leftrightarrow \mathrm{I}. \tag{11.5.31}$$

(M 理論のコンパクト化の順序を変えて得られた) これらの 2 つの理論を比べることにより，

$$g_I = 1/g_{\mathrm{SO}(32)} = \frac{R}{L} \tag{11.5.32}$$

であることがわかる．

トーラスにコンパクト化した前の場合には，トーラスのモジュラー対称性を用いて結合定数 g の IIB 型理論が結合定数 $1/g$ の IIB 型理論と同等であることを見つけた．これが IIB 型理論の自己双対性である．しかし，シリンダーにコンパクト化した M 理論の場合は，トーラスのモジュラー対称性に相当するものはないので，I 型理論が自

己双対であることにはならない．しかし，I 型理論が SO(32) とデュアルな関係にあることがわかった．

より正確に言うと，I 型理論を SO(32) 理論に変える次の変換を得た：

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &\to e^{-\phi} g_{\mu\nu} \\
\phi &\to -\phi \\
B' &\to B \\
\mathcal{A} &\to \alpha' \mathcal{A}.
\end{aligned}
\tag{11.5.33}
$$

少し人工的であるが，M 理論と 10 次元の SO(32) 理論の関係も見つかる．M 理論と IIB 型理論の間の関係のように，ちょっとやっかいな極限をとらなければならない．シリンダー $[S_1/\mathbb{Z}_2]\otimes S_1$ にコンパクト化した M 理論は，S_1 にコンパクト化した SO(32) 理論と同じである．10 次元の SO(32) 理論を得るには，形を変えないで面積を 0 にする極限をとらなければならない．したがって

$$
\begin{aligned}
S_1/\mathbb{Z}_2 \text{ 上の M 理論} &\leftrightarrow E_8 \otimes E_8 \\
T_0^2/\mathbb{Z}_2 \text{ 上の M 理論} &\leftrightarrow \mathrm{SO}(32)
\end{aligned}
\tag{11.5.34}
$$

となる．

さらに M 理論はなぜ I 型理論が開弦と閉弦の両方を含むかの理由についてもいくらか明らかにする．I 型閉弦理論は，IIB 型閉弦の一部を除いたものであった．IIB 型理論は同じカイラリティーの左向き波および右向き波を含むので，左向き波と右向き波を入れ替え，σ を $-\sigma$ にする世界面のパリティ演算 Ω のもとで不変である．したがって，IIB 型理論から Ω のもとでパリティ偶の部分を射影して落としてしまうことができる．このことは，I 型閉弦が IIB 型理論の "orientifold" になっていることを意味している．この部分の除去により，$N=1$ の向き付けのない I 型閉弦が得られる．しかし，II 型理論にある 2 形式 $B_{\mu\nu}$ は弦に $\varepsilon^{ij}\partial_i X^\mu \partial_j X^\nu$ という形で結合するが，これは世界面のパリティ演算 Ω のもとで奇であり，そのため射影で落ちる．したがって，$B_{\mu\nu}$ は I 型閉弦には結合できない．II 型弦はこの項 $\varepsilon^{ij}\partial_i X^\mu \partial_j X^\nu B_{\mu\nu}$ を含むので，これは II 型理論がこの 2 形式の保存チャージをもっていること，すなわちふつうのゲージ理論のように II 型弦が 2 形式の源となることを示している．しかし，I 型理論には $B_{\mu\nu}$ がないことは，I 型閉弦は保存チャージをもたないこと，すなわち開弦へ切れうることを示している．実は I 型理論の閉弦が $B_{\mu\nu}$ の保存チャージをもっていないことが，それらが不安定である理由である．

（点粒子の電荷がマクスウェルテンソルのデュアルな球面についての表面積分に等しいように，弦のチャージは場のテンソルのデュアルな 7 次元球についての表面積分に等しい．もし閉弦が切れるならば，7 次元球はずらして弦からはずすことができ，表面積分は 0 にできるであろう．II 型弦の場合チャージは保存するから，それが突然 0 になることはなく，II 型閉弦は切れることはない．しかし，これは I 型閉弦にはあてはまらず，そのような保存チャージをもっていないので切れうる.）

最後に，U デュアリティーと呼ばれるもう 1 つの対称性がある．これは大きな半径

で強結合の理論を，小さな半径で弱結合の理論に関係づける．これらの 3 つをまとめれば，

$$\begin{aligned} &S\text{ デュアリティー：} \quad \phi \to -\phi \\ &T\text{ デュアリティー：} \quad \psi \to -\psi \\ &U\text{ デュアリティー：} \quad \psi \to \pm\phi \end{aligned} \tag{11.5.35}$$

となる．ここで ψ は，その真空期待値がコンパクト化の半径を決めるスカラー場である．文献では，U デュアリティー［23］はときには S と T デュアリティーを含む最小の群のことを意味していることもある．すなわち

$$U \supset S \otimes T \tag{11.5.36}$$

BPS 飽和状態を解析するときに，もう少し U デュアリティーを議論することにする．

11.6 まとめ

今までの結果をまとめよう．S, T, U デュアリティーが，弦理論の摂動的および非摂動的構造を解析するのに有力な方法を与えることを見た．とくに，それにより 5 つの超弦理論すべてが実は同じ理論であることがわかり，M 理論と呼ばれる理論に最終的には統一されるだろうということを見た．M 理論の作用は最低次(そこでは 11 次元超重力になる)でしかわかっていないが，この理論はすでにいろいろな次元での弦理論の非摂動的な振る舞いについて，比類のない知見を与えてくれた．

われわれはコンパクト化した閉弦の運動量が

$$(p_L, p_R) = \left(\frac{n}{2R} + mR, \frac{n}{2R} - mR\right) \tag{11.6.1}$$

で与えられることに基づいた T デュアリティーから議論を始めた．ここでいつものように，n は円周上のカルーツァ-クライン励起から生じるが，m は円周に弦が巻き付く回数を表す．M^2 で与えられる質量スペクトルは，$n \leftrightarrow m$ と入れ替えたとき

$$R \leftrightarrow \frac{1}{2R} \tag{11.6.2}$$

のもとで不変であることに注意する．

超共形場の理論の言葉で書いたとき，この変換は

$$\begin{aligned} \partial X &\to \partial X \\ \bar{\partial} X &\to -\bar{\partial} X \\ \psi_L &\to -\psi_L \\ \psi_R &\to \psi_R \end{aligned} \tag{11.6.3}$$

と同等である．これはさらに，1 つの状態の集合のカイラリティー演算の符号を変え，したがって IIA 型理論のカイラリティーを IIB 型理論のものに変える．こうして

$$T: \qquad \text{IIA} \leftrightarrow \text{IIB} \tag{11.6.4}$$

という結果を得る．

したがって5つの超弦理論が4つになった．同様に，2つのヘテロティック弦理論が T デュアルであることが示せる．単純には，d 次元にコンパクト化したヘテロティック弦理論のモジュライ空間は $SO(26-d, 10-d)$ で与えられる．この結果は，1ループの振幅を解析し，それらがモジュラー不変であることを要求して得られる．

しかし，それは大きすぎる．質量演算子が $SO(26-d)$ と $SO(10-d)$ で不変なので，これらの群で割る必要がある．最後に，単に格子点を入れ替えるだけの T デュアリティーの群 $SO(26-d, 10-d, \mathbb{Z})$ で割る．この T デュアリティーの群は $E_8 \otimes E_8$ 理論と $SO(32)$ 理論を混ぜ合わせる．こうして全体のモジュライ空間は

$$\text{モジュライ 空間} = \frac{SO(26-d, 10-d)}{SO(26-d) \otimes SO(10-d) \otimes T} \tag{11.6.5}$$

となる．ここで

$$T = SO(26-d, 10-d, \mathbb{Z}) \tag{11.6.6}$$

である．

こうして5つの超弦理論は，3つになる．これらの T デュアリティーが発見されたときには面白いだけだったが，S デュアリティーが発見されたときには，実に重要になった．S デュアリティーは厳密には証明されていないが，たくさんの独立なチェックによって正しいものと考えられている．

11次元の超重力の作用をもう一度解析してみる：

$$S = \frac{1}{\kappa_{11}^2}\int d^{11}x \left\{ \sqrt{-g}\left[R + \frac{1}{12}|F|^2\right] \right. \\ \left. + \frac{2}{(72)^2}\varepsilon^{M_1 M_2 \dots M_{11}} F_{M_1 \dots M_4} F_{M_5 \dots M_8} A_{M_9 M_{10} M_{11}} \right\}. \tag{11.6.7}$$

ここで $F_{M_1 \dots M_4}$ は A_{M_1, M_2, M_3} の微分を反対称化した場のテンソルである．

何年も前に，半径0の円周にコンパクト化したとき，この作用がIIA 超重力の作用になることがわかっていた．11次元の理論をコンパクト化した後，10次元のIIA 超重力の計量との対応

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{MN}dx^M dx^N = e^{-2\phi/3} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{4\phi/3}\left(dy - dx^\mu C_\mu\right)^2 \\ A &= \frac{1}{6} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho A_{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2} dx^\mu \wedge dx^\nu dy B_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{11.6.8}$$

がわかる．

$K = dC$，$H = dB$，$G = dA$ とする．IIA 型の作用は

$$S = \int d^{10}x \left\{ \sqrt{-g} e^{-2\phi}\left[R + 4|d\phi|^2 - \frac{1}{3}|H|^2\right] \right. \\ \left. - \sqrt{-g}\left[|K|^2 + \frac{1}{12}|G|^2\right] \right\} + \frac{1}{144}\int G \wedge G \wedge B \tag{11.6.9}$$

となる．

この結果は長年知られていたが，多くの理由で奇妙なだけと考えられていた．第1

に，11 次元超重力は具合の悪い所のある理論である．第 2 に，この結果は超弦理論自体ではなく IIA 型超重力でしか成り立たない．第 3 に，コンパクト化で生じるカルーツァ-クライン状態があるが，IIA 型超重力や超弦理論にはそれらに対応するものがない．

これらの問題はすべて，M 理論を考えれば解決する．第 1 に，11 次元超重力の具合の悪いところは，高次の理論の低エネルギー部分だと考えれば問題ない．第 2 に，IIA 理論の完全な作用は 11 次元理論の高次項をコンパクト化すれば出る．(実は逆に，11 次元超重力は IIA 超弦理論から出ると考えることもできる.) そして最後に，コンパクト化した 11 次元理論のカルーツァ-クライン状態は，超弦の BPS 飽和状態と考えることもできる．

同様に M 理論を線分にコンパクト化することにより，$E_8 \otimes E_8$ ヘテロティック弦理論を出すことができる．その場合，E_8 対称性は線分の各端点から生じ，$E_8 \otimes E_8$ 対称性を与える．(皮肉なことに，多様体にコンパクト化したときカイラルな理論を出せないので，11 次元の超重力は捨てられていた．今は実は，11 次元超重力は多様体ではない空間にコンパクト化することによりカイラルな理論を出せることがわかった.)

2 つの作用を比べると，対応

$$R_{11} = (g)^{2/3} \tag{11.6.10}$$

があることがわかる．したがって，10 次元 IIA 型超弦理論の強結合極限が 11 次元 M 理論を与えることがわかる．

他のデュアリティーも見つけることができる．まず，IIB 型理論が不連続群 SL$(2,\mathbb{R})$ のもとで自己双対であることがわかる．Neveu-Schwarz 部分から生じるテンソル場 $B_{\mu\nu}$ 以外に，R-R 部分から生じる $B'_{\mu\nu}$ テンソル場がある．これらの 2 つのテンソル場は 1 つの列ベクトルに組み合わせられる．

これを見るために，

$$\mathcal{M} = e^{\phi}\begin{pmatrix} |\tau|^2 & l \\ l & 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{11.6.11}$$

を導入する．これは SL$(2,\mathbb{R})$ のもとで

$$\mathcal{M} = \Lambda \mathcal{M} \Lambda^T \tag{11.6.12}$$

と変換する．また $H = dB$ と $H' = dB'$ を列行列 $\tilde{H}$ にまとめて

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} H \\ H' \end{pmatrix} \quad ; \qquad \tilde{H} \to (\Lambda^T)^{-1}\tilde{H} \tag{11.6.13}$$

とすることができる．

こうすると，SL$(2,\mathbb{R})$ のもとで明白に不変な IIB 型作用が(単純な定数倍のあと)

$$S = \int d^{10}x \ \sqrt{-g}\left(R - \frac{1}{12}\tilde{H}^T_{\mu\nu\rho}\mathcal{M}\tilde{H}^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{4}\ \mathrm{Tr}\ (\partial^{\mu}\mathcal{M}\partial_{\mu}\mathcal{M}^{-1})\right) \tag{11.6.14}$$

で与えられる．ここでフェルミオン，自己双対テンソル，および高次の相互作用を落

とした.

またSO(32) ヘテロティック弦理論とI型弦理論が，同じ摂動論的ゲージ群をもつことに注意する．I型の低エネルギー有効ボソン作用は

$$S = \int dx^{10}x\sqrt{-g}\left\{e^{-2\phi}\left[R + 4|d\phi|^2\right] - e^{\phi}\,\mathrm{Tr}\,|F|^2 - \frac{1}{3}|H'|^2\right\} \tag{11.6.15}$$

で与えられる.

SO(32) ヘテロティック作用は

$$S = \int d^{10}x\sqrt{-g}e^{-2\phi}\left[R + 4|d\phi|^2 - \frac{1}{3}|H|^2 - \alpha'\,\mathrm{Tr}\,|F|^2\right] \tag{11.6.16}$$

で与えられる．S_1 にコンパクト化したこれら2つの理論と，$S_1/\mathbb{Z}_2$ と，さらに S_1 にコンパクト化したM理論を比べて

$$g_I = 1/g_{\mathrm{SO(32)}} = \frac{R}{L} \tag{11.6.17}$$

がわかる.

まとめると，S_1 にコンパクト化したとき，9次元における次の T デュアリティーが得られた：

$$T : \begin{cases} \text{IIA 型} & \leftrightarrow \quad \text{IIB 型} \\ E_8 \otimes E_8 & \leftrightarrow \quad \mathrm{SO(32)} \end{cases}. \tag{11.6.18}$$

さらにこれは，いろいろな超弦理論を，$N=2$ 超対称性をもつもの(II型理論)と，$N=1$ 超対称性をもつもの(ヘテロティック理論)の2つのものに分類する.

また10次元における次の S デュアリティー関係も見つけた：

$$S : \begin{cases} \text{IIB 型} & \leftrightarrow \quad \text{IIB 型} \\ \text{I 型} & \leftrightarrow \quad \mathrm{SO(32)} \end{cases}. \tag{11.6.19}$$

最後の関係は $N=1$ 超弦理論を $N=2$ 理論に関係づけるのでとくに重要である.

11から10次元へいって，S デュアリティー

$$S : \begin{cases} S_1 \text{ 上の M 理論} & \leftrightarrow \quad \text{IIA 型} \\ T_0^2 \text{ 上の M 理論} & \leftrightarrow \quad \text{IIB 型} \\ S_1/\mathbb{Z}_2 \text{ 上の M 理論} & \leftrightarrow \quad E_8 \otimes E_8 \\ T_0^2/\mathbb{Z}_2 \text{ 上の M 理論} & \leftrightarrow \quad \mathrm{SO(32)} \end{cases} \tag{11.6.20}$$

を得た.

最後に，これらのデュアリティー関係は非常に印象的ではあるが厳密ではないので，多くの結果はまだ確かめられなければならない．S デュアリティー変換は有効理論の最低次でしか確立されていない．これはまだ解決されていない問題であるが，多くの無矛盾性の検証がされているので，これらの結果には信頼がおける．もっとも強い検証はBPS飽和状態と p ブレインの解析である．そこでこれらの話題に移ることにしよう.

参考文献

M 理論，デュアリティー，メンブレインのレビューは，文献 [1-6] を見よ．

[1] J. H. Schwarz, *Lectures on Superstring and M Theory Dualities*, T. A. S. I. Summer School, World Scientific, Singapore, 1996.
[2] J. Polchinski, TASI Lectures on D-branes, T. A. S. I. Summer School, World Scientific, Singapore, 1996.
[3] P. K. Townsend, *Proceedings of the 1996 ICTP Summer School in High Energy Physics and Cosmology*, June 10-26, 1996.
[4] M. J. Duff, *Supermembranes*, T. A. S. I. Summer School, World Scientific, Singapore, 1996.
[5] C. Vafa, *Lectures on Strings and Dualities*, Feb. 1997, hep-th/9702201.
[6] P. S. Aspinwall, hep-th 9611137.
[7] C. Montonen and D. Olive, *Phys. Lett.* **B72**, 117 (1977).
[8] E. Witten and D. Olive, *Phys. Lett.* **B78B**, 97 (1978).
[9] K. Kikkawa and M. Yamasaki, *Phys. Lett.* **B149**, 357 (1984).
[10] M. Dine, P. Huet, and N. Seiberg, *Nucl. Phys.* **B322**, 301 (1989).
[11] K. Narain, *Phys. Lett.* **B169**, 41 (1986); K. Narain, H. Sarmadi, and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B279**, 369 (1987).
[12] 文献については次を見よ．A. Giveon, M. Porrati, and E. Rabinovici, *Phys. Rep.* **244**, 77 (1994).
[13] A. Font, L. Ibanez, D. Lust, and F. Quevedo, *Phys. Lett.* **B249**, 35 (1990).
[14] S. J. Rey, *Phys. Rev.* **D43**, 526 (1991).
[15] J. H. Schwarz and A. Sen, *Nucl. Phys.* **B411**, 35 (1994); *Phys. Lett.* **B312**, 105 (1993).
[16] A. Sen, *Int. J. Mod. Phys.* **A9**, 3707 (1994); *Phys. Lett.* **B329**, 217 (1994).
[17] E. Cremmer and B. Julia, *Phys. Lett.* **80B** 48 (1978); *Nucl. Phys.* **B159**, 141 (1979).
[18] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B433**, 85 (1995).
[19] P. K. Townsend, *Phys. Lett.* **B350**, 184 (1995).
[20] P. Horava and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B460**, 506 (1996); *Nucl. Phys.* **B475**, 94 (1996).
[21] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B433**, 85 (1995).
[22] J. Polchinski and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B460**, 525 (1996).
[23] C. M. Hull and P. K. Townsend, *Nucl. Phys.* **B438**, 109 (1995).

第12章

コンパクト化とBPS状態

12.1 BPS 状態

デュアリティーがどんなにすばらしいとしても，それが低エネルギー展開による偶然であるのか，理論のなにか深い性質を表すのか問うことができる．これらの非摂動的結果について別の無矛盾性のチェックをしなければならない．おそらくもっとも説得力のある証拠は,「BPS 飽和状態」から得られる．この場合非くりこみ定理により非摂動的な現象を調べることができる．この章では，これらの BPS 飽和状態により，$D=4$ までの次元で蜘蛛の巣状のデュアリティーを確立することができる．

手始めに，$1+1$ 次元の超対称場の理論の簡単な例を解析しよう．ラグランジアンは

$$L=-\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2+\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi-\frac{1}{2}V^2(\phi)-\frac{1}{2}V'(\phi)\bar{\psi}\psi \tag{12.1.1}$$

で与えられる．ここで $V(\phi)=\lambda(\phi^2-a^2)$ であり，ψ はマヨラナフェルミオンである．この理論は超対称で，次の 2 つのカイラルな超対称性チャージをもつ：

$$Q_\pm=\int dx\left[(\dot{\phi}\pm\phi')\psi_\pm\mp V(\phi)\psi_\mp\right]. \tag{12.1.2}$$

ここで $\psi_\pm$ は ψ のカイラルな左と右の成分である．超対称性代数は容易に書けて，

$$\begin{aligned}Q_+^2&=P_+\\Q_-^2&=P_-\\\{Q_+,Q_-\}&=T\end{aligned} \tag{12.1.3}$$

となる．ただし，$P_\pm=P_0\pm P_1$，T はセントラルチャージである．この代数から次の関係を得る：

$$2P_0=P_++P_-=(Q_++Q_-)^2-T=(Q_+-Q_-)^2+T. \tag{12.1.4}$$

ここで重要な点にくる．超対称性チャージの平方はいつでも正なので，粒子が静止している系の P_0 の固有状態でこの関係式をはさめば，

$$M\geq\frac{1}{2}T \tag{12.1.5}$$

を得る．これは Bogomol'nyi の制限で，これらの状態の質量とチャージの間の関係を

与える．この章では，この制限の上限をみたして，不等式が等式になっているような状態を考える．この等式がみたされるのは，$(Q_+ \pm Q_-)|s\rangle = 0$ という関係をみたす 2 つの状態 $|s\rangle$ でこの関係をはさんだときであることがわかる．これらの状態は，超対称性チャージのちょうど半分で消滅されるような状態である．これらが BPS 飽和状態である．

1+1 次元のこの簡単な例は，弦理論にもある主な特徴を説明してくれる．弦理論の BPS 飽和状態が超対称性を半分保つことを見るが，もっとも重要なことは BPS 関係式が超対称性の非くりこみ定理のために摂動論の全次数で保たれることである．

ここでこれらの結果を一般化して，4 次元の超並進代数を考えよう：

$$\left\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\right\} = \delta^{ij}(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu + U^{ij}(C)_{\alpha\beta} + V^{ij}(C\gamma_5)_{\alpha\beta}. \tag{12.1.6}$$

ここで $i = 1, 2, \ldots, N$ である．U と V の反対称行列の中に $N(N-1)$ 個のセントラルチャージが入っている．とくに $N = 4$ と $N = 8$ の超代数の場合は，それぞれ 12 個と 56 個のセントラルチャージがある．歴史的には，これらは重い状態や大きな N の理論を記述するので，ほぼ無視されてきた．しかしここでの議論では，BPS 飽和状態を見つけるのにこれらは重要である．

前にやったように，状態が静止しているとして P_0 の固有状態でこの代数をはさむことができる．すると P_0 の期待値は質量 M を与える．この代数は

$$M \geq k|Z| \tag{12.1.7}$$

を与える．ここで k はある定数，$|Z|$ は U と V から得られるチャージを表す．言い換えると，質量とチャージがこの条件で関係している．この関係は，超対称性理論の質量とそれらの状態のチャージとの強力な関係式を与える．この関係を飽和する状態に対して，超対称性により量子効果によるくりこみが影響せず，この関係が非摂動的に成り立つと信じられている．それが，これらの状態がデュアリティーを確立する際に重要な役割を果たす理由である．ここで大事なことは，BPS の関係は非くりこみ定理のためにたぶん非摂動的にみたされており，デュアルな理論の性質に強力な制限を与えることである．

12.2　超対称性と p ブレイン

さてこの関係を任意の場合に拡張しよう．後で見るように，p ブレインが存在する場合は，この関係は変更をうけて

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = (\Gamma^\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu + \sum_p (\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p} C)_{\alpha\beta} Z_{\mu_1\ldots\mu_p} \tag{12.2.1}$$

となる．

超対称性の表現を分類した Haag，Lopuszanski，Sohnius の論文では，暗に点粒子を仮定していたので，これらの高次のセントラルチャージは落とされている．しかし高次の p ブレインも許すと，必然的に超並進代数にこれらの高次項を付け加えなければならない．

以前には高次の p ブレインには重大な問題があった．たとえば，11 次元の超メンブレイン(2 ブレイン)の理論は 3 つの理由で否定された．

(a) それは不安定である．

(b) その 3 次元の作用は，紫外発散をもっている．

(c) 自由作用でさえ解けない．それは 4 次であり，高度に非線形である．

しかし M 理論により，これをまったく新しい観点から再検討する必要が生じた．前に M 理論は最低次で 11 次元超重力として表されることを見た．しかし高次の作用は基本的にわかっていない．11 次元で唯一知られている 11 次元超重力を一般化したものは，超メンブレインだけで，それが M 理論の構造に対する手がかりを与えてくれるかもしれない．とくに，(時空の 1 次元と世界体積の 1 次元をなくす) 2 重コンパクト化のもとで，11 次元超メンブレインはふつうの Green-Schwarz 弦に帰着する．

メンブレインの議論を始めるために，点粒子(すなわち 0 ブレイン)の源に結合したふつうのゲージ理論を考える．

結合は

$$\int d^D x\ A_\mu j^\mu \tag{12.2.2}$$

で与えられる．ここで源 j^μ は

$$j^\mu(x) = \int d\tau\ \delta^D\left(x_\mu - X_\mu(\tau)\right)\ \partial_\tau X^\mu(\tau) \tag{12.2.3}$$

で与えられる．ただし，$X^\mu(\tau)$ は点粒子の場所を表す．これは，よく知られた点粒子のマクスウェル理論の形式を再現する．

同様に弦(1 ブレイン)に対して，弦の変数 X_μ は 2 階反対称テンソル $B_{\mu\nu}$ に次のように結合する：

$$\int d^D x\ B_{\mu\nu} j^{\mu\nu}. \tag{12.2.4}$$

ここで

$$j^{\mu\nu}(x) = \int d\tau d\sigma\ \delta^D\left(x_\mu - X_\mu(\tau,\sigma)\right)\ \varepsilon^{ij}\partial_i X^\mu \partial_j X^\nu \tag{12.2.5}$$

である．カレントを上の結合に代入すれば，弦が質量 0 の背景場に結合する通常の項が得られる：

$$\int d\tau d\sigma\ \varepsilon^{ij}\partial_i X^\mu \partial_j X^\nu B_{\mu\nu}. \tag{12.2.6}$$

これは p ブレインに結合する質量 0 の $p+1$ 階反対称ゲージポテンシャルのゲージ理論に一般化できる．p ブレインが動いて作る世界体積の座標を σ_i として，p ブレインの変数 $X_\mu(\sigma_i)$ を考える．

結合は

$$\int d^D\sigma\ A_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p+1}} j^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p+1}} \tag{12.2.7}$$

で与えられる．ただし

$$j^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p+1}} = \int d^{p+1}\sigma\ \delta^D\left(x_\mu - X_\mu(\sigma_i)\right)\varepsilon^{j_1\cdots j_{p+1}}\ \partial_{j_1}X^{\mu_1}...\partial_{j_{p+1}}X^{\mu_{p+1}} \tag{12.2.8}$$

である.

さて p ブレインのポテンシャルから場のテンソルを作る：

$$F_{\mu_1\cdots\mu_{p+2}} = \partial_{\mu_1}A_{\mu_2\cdots\mu_{p+2}} + \text{巡回}. \tag{12.2.9}$$

デュアルな理論を作るために，F に双対な別の場のテンソル F' を考える：

$$^*F_{\mu_1\cdots\mu_{p+2}} = F'_{\mu_1\cdots\mu_{q+2}}. \tag{12.2.10}$$

左辺は $D-(p+2)$ 階のテンソルである．右辺は $q+2$ 階のテンソルである．これらの 2 つの数が等しくないといけないので，次の関係を得る：

$$p + q = D - 4. \tag{12.2.11}$$

これから p ブレインの双対の次元 q が得られる．たとえば，4 次元では，電子(0 ブレイン)の双対は別の 0 ブレイン，モノポールである．10 次元では，弦の双対は 5 ブレインである．同様に 11 次元では，メンブレインの双対は 5 ブレインである．

最後にこれらの p ブレインに対応する電荷と磁荷を作ることができる：

$$\begin{aligned} Q_E &\approx \int_{S_{D-p-2}} {}^*F \\ Q_M &\approx \int_{S_{p+2}} F. \end{aligned} \tag{12.2.12}$$

ここで p ブレインを超平面で囲んだ．(これからわかるように，電荷と磁荷の定義は双対をとって入れ替えることができるので，ちょっと不定性がある.)

どんな p ブレインが存在できるかを決める簡単な指導原理は，超対称性代数に現れるセントラルチャージを解析することである．驚いたことに具体的な計算をしないでも，超対称性代数によりどのような p ブレインがどの次元に現れるか予言することができる．

たとえば，Green-Schwarz の超弦理論では，作用は全微分を除いて初めて不変である．ふつうこの全微分は落とす．しかし，超対称性に対応するカレントを計算すると，カレントの代数がふつうのように閉じないことがわかる．とくに，この全微分の項がまさに超並進代数で見つかったセントラルチャージを与える．具体的な計算により，p ブレインのセントラルチャージへの寄与がちょうど，代数に現れる p 階反対称テンソル場 $Z_{\mu_1\cdots\mu_p}$ によって与えられることがわかる．大事な点はこれである．代数のセントラルチャージ $Z_{\mu_1\cdots\mu_p}$ を調べれば，理論の p ブレインのスペクトルを読みとることができる．これはすごいことである．実際に作らなくても，理論の非摂動的 p ブレインの数がわかるのである！

さて超代数に現れうるフェルミオン的生成子の最大の成分数は 32 であることを考えよう．11 次元では 32 成分のマヨラナスピノールを作ることができる．代数の左辺と右辺には $528 = (33 \times 32/2)$ 個の可能な項がある．セントラル項を含む代数は

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \left(\Gamma^M C\right)_{\alpha\beta} P_M + \left(\Gamma^{MN} C\right)_{\alpha\beta} Z_{MN} + \left(\Gamma^{MNPQR} C\right)_{\alpha\beta} Z_{MNPQR} \qquad (12.2.13)$$

で与えられる．

右辺の各セントラルチャージの項は p ブレインに対応する．状態を勘定すると，それらの寄与は期待通り

$$11 + 55 + 462 = 528 \text{ 個の状態} \qquad (12.2.14)$$

であることがわかる．こうして 11 次元ではメンブレインとその双対である 5 ブレインがあることが期待される．

この形式のチェックとして，このメンブレインが 3 階のテンソルに結合することに注意する．11 次元超重力のカレントを調べると，期待通り 2 ブレインに結合する 3 階のテンソル場 A_{MNP} がある．

さて代数を 10 次元に落とすと，32 成分のスピノールは 16 成分の 2 つのマヨラナ-ワイルスピノールになる．それで各カイラリティーの 2 つのスピノール Q^i_α を得る．それらが 10 次元で逆のカイラリティーをもてば，1 つのスピノールにまとめることができ，IIA 型超弦の代数を得る：

$$\begin{aligned}\{Q_\alpha, Q_\beta\} = {} & \left(\Gamma^M C\right)_{\alpha\beta} P_M + (\Gamma_{11} C)_{\alpha\beta} Z \\ & + \left(\Gamma^M \Gamma_{11} C\right)_{\alpha\beta} Z_M + \left(\Gamma^{MN} C\right)_{\alpha\beta} Z_{MN} \\ & + \left(\Gamma^{MNPQ} \Gamma_{11} C\right)_{\alpha\beta} Z_{MNPQ} + \left(\Gamma^{MNPQR} C\right)_{\alpha\beta} Z_{MNPQR}. \end{aligned} \qquad (12.2.15)$$

状態を数えてみれば，これは期待通り

$$10 + 1 + 10 + 45 + 210 + 252 = 528 \text{ 個の状態} \qquad (12.2.16)$$

に帰着する．さらにこれらは IIA 理論の $p = 0, 1, 2, 4, 5$ ブレインに対応する．11 次元理論の 5 ブレインは，10 次元理論の 4 ブレインと 5 ブレインになることと，11 次元理論の 2 ブレインは，10 次元理論の 1 ブレインと 2 ブレインになることに注意する．(11 次元理論の P_M は，10 次元のスカラー P_{11} とベクトルに分解することに注意する．11 次元という観点から見れば，それらはカルーツァ-クラインモードに対応している．しかし 10 次元から見れば，R-R 部分からくるソリトン的状態に対応する 0 ブレインである．これが前に述べたパズルの答えで，円周上にコンパクト化した 11 次元超重力からくるカルーツァ-クラインモードが IIA 型 10 次元弦のソリトン的励起に対応している.)

まとめると，(p_1, p_2) が(電荷，磁荷)をもつ双対な p ブレインを表すとすれば，IIA 型電荷と磁荷は

$$\left\{ \begin{array}{rl} \text{R-R}: & (0,6) \\ \text{R-R}: & (2,4) \\ \text{NS-NS}: & (1,5) \end{array} \right. \qquad (12.2.17)$$

となるようにできる．

同様に IIB 型弦の場合は，2 つのカイラルスピノール Q^i_α があって，代数

$$\begin{aligned}\{Q^i_\alpha, Q^j_\beta\} = \delta^{ij}\left(\mathcal{P}\Gamma^M C\right)_{\alpha\beta} P_M + \left(\mathcal{P}\Gamma^M C\right)_{\alpha\beta} \tilde{Z}^{ij}_M \\ + \varepsilon^{ij}\left(\mathcal{P}\Gamma^{MNP} C\right)_{\alpha\beta} Z_{MNP} + \delta^{ij}\left(\mathcal{P}\Gamma^{MNPQR} C\right)_{\alpha\beta} Z^+_{MNPQR} \\ + \left(\mathcal{P}\Gamma^{MNPQR} C\right)_{\alpha\beta} \tilde{Z}^{+ij}_{MNPQR}\end{aligned} \tag{12.2.18}$$

が成り立つ．ここで $\mathcal{P}$ はカイラル射影演算子で，波記号はトレースが 0 の対称 SO(2) テンソルを表す．状態を数えると，これは期待通り

$$10 + (2 \times 10) + 120 + 126 + (2 \times 126) = 528 \text{ 個の状態} \tag{12.2.19}$$

を与える．これはさらに，$p = 1, 3, 5$（とインスタントンに対応する $p = -1$）に対応する．

これを IIB 型超重力の反対称場と比べると，NS-NS からと R-R からの 2 つの 2 階反対称テンソルがあることがわかる．

まとめると，IIA 型理論は p が偶数の Dp ブレインを含み，IIB 型理論は奇数の Dp ブレインを含んでいる．いろいろなチャージ $Z_{\mu_1 \ldots \mu_p}$ の次元を落とすことにより，低い次元に現れるいろいろな p ブレインも得ることができる．いろいろな次元のこの分類が，実際に p ブレインを構成することなく群論のレベルでできることはすばらしいことである．

12.3　コンパクト化

いまや BPS 飽和状態の手法が手に入ったので，これらの結果を用いて $D \leq 8$ のコンパクト化を議論しよう．9 と 10 次元ですでに見たように，超弦の非摂動的なデュアルは別の超弦であることが多い．より低次元のコンパクト化でも，同様であることを見ることになる．

いろいろな次元のいろいろな弦と p ブレインを体系的に比べるためには，コンパクト化で残る超対称性の数を計算することが必要である．このためにホロノミーという概念を導入する．

コンパクト化の後で，どれだけの数のスピノールが次の制限をみたすのかを知りたい：

$$D_i \varepsilon = 0. \tag{12.3.1}$$

この関係をみたす共変的定数の各スピノールに対して，コンパクト化した後に残る超対称性の生成子が 1 つ存在する．

D_i を順番に作用させて交換子を作ったものが生成する群をホロノミー群ということを思い出す．コンパクト化の後のホロノミー群がわかれば，コンパクト化の後にどれだけの超対称性が残るかもわかる．この勘定はトーラスへのコンパクト化の場合はとくに簡単で，ホロノミーは 1 なのでコンパクト化で超対称性の生成子はすべて残る．

このトーラスへのコンパクト化がどのようにして起こるかを見るために，10 次元の Q_α に含まれる 32 個のフェルミオンを，低次元の Q^i_β に組み替えたい．ここで i は超対称性の種類を表す．

8次元ではマヨラナスピノールは許されないが，ワイルスピノールは許されて，8個の複素成分，すなわち16個の実成分をもつ．これらの16成分は Q_α^i に組み替えることができるので，ヘテロティック弦は $N=1$，II型弦は $N=2$ をもつ．

6次元では，マヨラナスピノールはやはり許されないが，ワイルスピノールは許され，4個の複素成分，すなわち8個の実成分をもつ．したがって，$8 \times 2 = 16$ であるから，$N=2$ がヘテロティック弦の最大の超対称性となり，$8 \times 4 = 32$ より，$N=4$ がII型弦の最大の超対称性である．

4次元では，マヨラナまたはワイルスピノールは4個の成分をもち，したがってヘテロティック弦は $N=4$，II型弦は $N=8$ をもつ．

これを次の図表にまとめることができる．D は時空のコンパクト化していない次元，S は D 次元のスピノールの最小の次元，N はトーラスにコンパクト化した後の超対称性の生成子の数を表す：

D	S	ヘテロティック	II型
10	16	$N=1$	$N=2$
9	16	$N=1$	$N=2$
8	16	$N=1$	$N=2$
7	16	$N=1$	$N=2$
6	8	$N=2$	$N=4$
5	8	$N=2$	$N=4$
4	4	$N=4$	$N=8$
3	2	$N=8$	$N=16$
2	1	$N=16$	$N=32$

(12.3.2)

トーラスにコンパクト化するかわりに，複素多様体 K_3 を考える．これは Ricci 平坦な Kähler 多様体で，SU(2) ホロノミーをもつ．したがってこれは Calabi-Yau 多様体に似ているが，複素2次元しかない．そのため超対称性生成子の半分を破る．（たとえば，IIA 型理論をトーラス T_4 にコンパクト化すると，6次元の $N=4$ を得るが，K_3 コンパクト化だと6次元の $N=2$ しか得られない．）

K_3 にコンパクト化したヘテロティック弦は，超対称性を半分しか保てないので，6次元の $N=1$ になる．

これは次の図表にまとめられる．D をコンパクト化していない次元，N を SU(2) ホロノミーをもつ，（K_3 のような）2複素次元と（$K_3 \otimes T_2$ のような）3複素次元の

Calabi-Yau 多様体へのコンパクト化の後に残る超対称性生成子の数とする：

D	ヘテロティック	II 型
10	$N=1$	$N=2$
6	$N=1$	$N=2$
4	$N=2$	$N=4$

(12.3.3)

SU(3) ホロノミーをもつ Calabi-Yau 多様体へコンパクト化すると，ヘテロティック弦の場合物理的理由から望ましい 4 次元の $N=1$ が出る．これは超対称性の $\frac{1}{4}$ だけを保っている．

さらに 7 次元の Joyce 多様体のホロノミー群は G_2 である．これによって 11 次元の M 理論を物理的に重要な $N=1, D=4$ にすることができる．

いろいろな次元の新しいデュアリティーを構成する第 1 歩として，一見異なる 2 つの理論の超対称性生成子の数が一致していることが必要である．たとえば，K_3 にコンパクト化した II 型弦理論が T_4 にコンパクト化したヘテロティック弦理論とデュアルであると予想できる．後にこの推測が正しいことを見る．

12.4　例：$D=6$

低次元でのデュアリティーを構成するにはいくつかの方法がある．たとえば

- 2 つの弦理論の低エネルギー超重力理論の間に対応を見つける．
- 2 つの弦理論の可能な真空のモジュライ空間に対応を見つける．
- 2 つの弦理論の BPS 状態に対応を見つける．
- カイラル理論に対しては，すべての量子異常が消えることを要求する．

しかしもっとも簡単な方法は，11 次元の M 理論のデュアリティーを用いることである．すぐに見るように M 理論はメンブレインだけでなく 5 ブレインも含んでいる．以下で低次元のデュアリティーの多くが，この 11 次元のメンブレインと 5 ブレインのデュアリティーに起源をもつことを見る．メンブレインと 5 ブレインの両方を同じ多様体に次々コンパクト化することにより，実は互いにデュアルであるが一見異なる 2 つの理論を得る．こうして，たくさんのデュアリティーを得ることができる．

さて $D=6$ で存在するいろいろなデュアリティーを解析しよう．たとえば，メンブレインを，S_1 または線分 $S_1/\mathbb{Z}_2$ のいずれかの 1 次元の空間 M_1 に巻き付けると，弦理論（IIA 型または $E_8 \otimes E_8$ ヘテロティック弦のいずれか）を得る．これをさらに 4 次元の多様体 M_4 にコンパクト化すれば，6 次元の弦理論を得る．

同様に，この順番を逆にすることができる．まず 5 ブレインを M_4 に巻き付けて弦理論を作る（p ブレインを q 次元の多様体に巻き付けると $p-q$ ブレインができる）．そ

れからこの弦理論を M_1 にコンパクト化すると，6 次元の別の弦理論ができる．デュアリティーにより，これらの 2 つの弦理論は互いにデュアルであり，1 つは基本的なもの，もう 1 つはソリトン的なものであるはずである．

$M_1 = S_1$ または $S_1/\mathbb{Z}_2$，$M_4 = T_4$ または K_3 としよう．こうすると，メンブレインを $M_1 \otimes M_4$ にコンパクト化して 4 つの弦理論を得るが，これらは 5 ブレインを $M_4 \otimes M_1$ にコンパクト化して得る 4 つの理論とデュアルのはずである．

メンブレインを S_1 と $S_1/\mathbb{Z}$ に巻き付けると，それぞれ IIA 型と $E_8 \otimes E_8$ ヘテロティック弦になる．同様に，5 ブレインを $M_4 = T_4$ と K_3 に巻き付けると，それぞれ IIA 型とヘテロティック弦になる．

こうして $D=6$ のいろいろなデュアリティーを図表にすることができる [1–2]：

$(\mathbb{N}_+, \mathbb{N}_-)$	M_1	M_4	基本的弦	デュアルな弦
$(1,0)$	$S_1/\mathbb{Z}_2$	K_3	ヘテロティック	ヘテロティック
$(1,1)$	S_1	K_3	Type IIA	ヘテロティック
$(1,1)$	$S_1/\mathbb{Z}_2$	T_4	ヘテロティック	Type IIA
$(2,2)$	S_1	T_4	Type IIA	Type IIA

ここで $\mathbb{N}_\pm$ は 4 次元で残るカイラルな超対称性の数である．

$D = 6$, $N = (2,2)$ 理論

ここでコンパクト化した弦理論のデュアリティーをもっと詳しく調べてみよう．コンパクト化した理論にはとてつもなくたくさんのデュアリティーの群があるので，指針として超重力の形式を使うのがよい．11 次元超重力の作用をコンパクト化すると，低エネルギー有効作用が一般に

$$L = \sqrt{-g}\left(R - \frac{1}{2}g_{ij}(\phi)\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j - \frac{1}{4}m_{IJ}F^{I\mu\nu}F_{J\mu\nu} + \cdots\right) \tag{12.4.1}$$

となることがわかる．ここで ϕ^i は，計量 $g_{ij}(\phi)$ をもつ標的空間 $\mathcal{M}$ に値をもついろいろなスカラー場，$F_{I\mu\nu}$ は可換群の場の強さである．興味のあるのは，H を G の最大のコンパクトな部分群として，$\mathcal{M}$ が等質空間 G/H となっている場合に，対称性 G のもとで不変なスカラー場 ϕ^i の運動方程式である．

何年もの間，超重力理論に現れる群 G の物理的意味は謎であった．それにもかかわらず，G はいろいろな次元と超対称性の場合に注意深く分類されてきた．たとえば，ヘテロティック弦理論の低エネルギー部分をなす，超 Yang-Mills 場に結合したいろいろな次元の超重力理論の次のような図表が得られている：

D	超重力の群 G	T デュアリティー	U デュアリティー
10	$\mathrm{O}(16)\times\mathrm{SO}(1,1)$	$\mathrm{O}(16,\mathbb{Z})$	$\mathrm{O}(16,\mathbb{Z})\times\mathbb{Z}_2$
9	$\mathrm{O}(1,17)\times\mathrm{SO}(1,1)$	$\mathrm{O}(1,17,\mathbb{Z})$	$\mathrm{O}(1,17,\mathbb{Z})\times\mathbb{Z}_2$
8	$\mathrm{O}(2,18)\times\mathrm{SO}(1,1)$	$\mathrm{O}(2,18,\mathbb{Z})$	$\mathrm{O}(2,18,\mathbb{Z})\times\mathbb{Z}_2$
7	$\mathrm{O}(3,19)\times\mathrm{SO}(1,1)$	$\mathrm{O}(3,19,\mathbb{Z})$	$\mathrm{O}(3,19,\mathbb{Z})\times\mathbb{Z}_2$
6	$\mathrm{O}(4,20)\times\mathrm{SO}(1,1)$	$\mathrm{O}(4,20,\mathbb{Z})$	$\mathrm{O}(4,20,\mathbb{Z})\times\mathbb{Z}_2$
5	$\mathrm{O}(5,21)\times\mathrm{SO}(1,1)$	$\mathrm{O}(5,21,\mathbb{Z})$	$\mathrm{O}(5,21,\mathbb{Z})\times\mathbb{Z}_2$
4	$\mathrm{O}(6,22)\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$	$\mathrm{O}(6,22,\mathbb{Z})$	$\mathrm{O}(6,22,\mathbb{Z})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$
3	$\mathrm{O}(8,24)$	$\mathrm{O}(7,23,\mathbb{Z})$	$\mathrm{O}(8,24,\mathbb{Z})$
2	$\mathrm{O}(8,24)^{(1)}$	$\mathrm{O}(8,24,\mathbb{Z})$	$\mathrm{O}(8,24)^{(1)}(\mathbb{Z})$

(12.4.2)

ここで D はコンパクト化していない次元の数，G はスカラー場の運動方程式の対称性の群である．($D=2$ にコンパクト化したヘテロティック弦にある上付き添え字 (1) はアフィン群を表す.)

コンパクト化した超重力から量子論的なヘテロティック弦理論へいくと，群 G が直接弦理論の T デュアリティーと U デュアリティーの群になることがわかる．こうして，超弦理論のデュアリティーの群が，超重力理論で謎めいた現れ方をしていた群 G の便利な説明を与えてくれるのである．またこのことは，ヘテロティック理論には R-R 場がないという事実により理解が助けられる．理論をコンパクト化したとき勘定が簡単になるのである．いろいろなボソン場をコンパクト化すると，質量 0 のスカラー場 ϕ^i が直接出ることになる．

しかし，いろいろな次元 D に対する超重力理論の群 G を与える次の図表でわかるように，II 型理論の情況は異なっている：

D	超重力の群 G	T デュアリティー	U デュアリティー
$10A$	$\mathrm{SO}(1,1)/\mathbb{Z}_2$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$10B$	$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$	$\mathbf{1}$	$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$
9	$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times O(1,1)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\times\mathbb{Z}_2$
8	$\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$	$\mathrm{O}(2,2,\mathbb{Z})$	$\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$
7	$\mathrm{SL}(5,\mathbb{R})$	$\mathrm{O}(3,3,\mathbb{Z})$	$\mathrm{SL}(5,\mathbb{Z})$
6	$\mathrm{O}(5,5)$	$\mathrm{O}(4,4,\mathbb{Z})$	$\mathrm{O}(5,5,\mathbb{Z})$
5	$E_{6(6)}$	$\mathrm{O}(5,5,\mathbb{Z})$	$E_{6(6)}(\mathbb{Z})$
4	$E_{7(7)}$	$\mathrm{O}(6,6,\mathbb{Z})$	$E_{7(7)}(\mathbb{Z})$
3	$E_{8(8)}$	$\mathrm{O}(7,7,\mathbb{Z})$	$E_{8(8)}(\mathbb{Z})$
2	$E_{9(9)}$	$\mathrm{O}(8,8,\mathbb{Z})$	$E_{9(9)}(\mathbb{Z})$
1	$E_{10(10)}$	$\mathrm{O}(9,9,\mathbb{Z})$	$E_{10(10)}(\mathbb{Z})$

(12.4.3)

ここでたくさんの R-R 場が質量 0 のスペクトルに寄与していることがわかる．これらはすべて低エネルギー超重力理論に現れるので，その理論を解析するのはずっと難しい．にもかかわらず，T デュアリティーと U デュアリティーを調べるのに II 型超重力理論を指針として用いることができる．

たとえば，$D=6$, $N=(2,2)$ 理論を考える．これはメンブレインを T_5 にコンパクト化することにより（あるいは IIA 理論を T_4 にコンパクト化することにより）得られる．理論を異なる見方で見ることにより，理論の整合性を強力にチェックすることができる．IIA 理論を T_4 にコンパクト化することにより；T デュアリティー群 $\mathrm{SO}(4,4,\mathbb{Z})$ を得る．しかし M 理論を T_5 にコンパクト化すると，モジュラー群 $\mathrm{SL}(5,\mathbb{Z})$ が得られる．これらの 2 つの事実を調和させるために，両方の群を部分群として含む最小の群 $\mathrm{SO}(5,5,\mathbb{Z})$ が選ばれる．一方，これは 6 次元にコンパクト化した 11 次元超重力を解析して得られる $\mathrm{SO}(5,5,\mathbb{Z})$ U デュアリティー群と同じである．

この議論を用いて，この結果を他の次元へ拡張することもできる．11 次元超重力を，$c\geq 5$ の $c+1$ 次元トーラスにコンパクト化すれば，トーラスのモジュライ空間は $\mathrm{SL}(c+1,\mathbb{Z})$ で与えられる．しかし，10 次元の IIA 型弦を c 次元のトーラスにコンパクト化すれば，T デュアリティー群は $\mathrm{SO}(c,c,\mathbb{Z})$ である．再びこれら 2 つの事実を調和させるためには，これらは $E_{c+1}(\mathbb{Z})$ のコンパクトでない形の部分群であることがわ

かる．それは摂動的状態と非摂動的状態を結びつける対称性である U デュアリティー群である [3]．こうして

$$U = E_{c+1}(\mathbb{Z})\ ;\quad c \geq 5 \tag{12.4.4}$$

を得る．

こうして，M 理論の低エネルギー部分の 11 次元超重力を用いて，いろいろな次元における弦のデュアリティー群を構成することができる．

$D = 6$, $N = (1,1)$ 理論

さて $D = 6$, $N = (1,1)$ 理論のデュアリティーを解析しよう．たとえば，メンブレインと 5 ブレインのデュアリティーから，K_3 にコンパクト化した IIA 弦理論は T_4 にコンパクト化したヘテロティック弦とデュアルであることがわかる．

2 つの理論を比べると，同じ低エネルギー極限をもっていることがわかる．それは 20 個の可換群超 Yang-Mills 多重項に結合した $D = 6$, $N = 2$ 超重力である．6 次元の超 Yang-Mills 多重項は 4 つのスカラー場を含むので，全部で $4 \times 20 = 80$ 個のスカラー場があり，これらが許される空間を張る．それに加えて，超重力多重項に含まれる 4 つのベクトル場があり，全体で $20 + 4$ 個の U(1) ベクトル場がある．

さて，コンパクト化したヘテロティック弦理論と IIA 型弦理論のスペクトルを解析しよう．T_4 上に 6 次元にコンパクト化したヘテロティック弦は，真空のモジュライ空間として

$$\frac{\mathrm{SO}(4,20)}{\mathrm{SO}(4) \otimes \mathrm{SO}(20) \otimes T} \tag{12.4.5}$$

をもつことを思い出す．これは期待通り，$4 \times 20 = 80$ 次元である．6 次元の理論にも 80 個のスカラー場がある．これを見るには，4 次元へコンパクト化した後では，計量 $g_{\mu\nu}$ と $B_{\mu\nu}$ が $4 \times 4 = 16$ 個のスカラー場を出すことに注意する．同様に，$E_8 \otimes E_8$ の Yang-Mills 場 A^a_μ は $4 \times 16 = 64$ 個のスカラー場を出す．これらの和は，期待通り 80 個のスカラー場を与える．

したがって，次のスカラー状態を得る：

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}:&\quad 10\ \text{スカラー} \\ B_{\mu\nu}:&\quad 6\ \text{スカラー} \\ A^a_\mu:&\quad 64\ \text{スカラー}. \end{aligned} \tag{12.4.6}$$

また，A^a_μ は 16 個のベクトル場を出す．これを $g_{\mu\nu}$ と $B_{\mu\nu}$ に含まれる 8 個のベクトル場と組み合わせれば，期待通り 24 個の U(1) ベクトル場が得られる．

また $N = 1$ ヘテロティック弦は 16 成分の Q_α をもつことに注意する．6 次元では，ワイルスピノールは 8 成分をもつので，これは $N = 2$ あるいは (1,1) の Q^i_β にまとめることができる．

$D = 6$ 理論を解析する際には，スペクトルを 6 次元の小群(little group)，$\mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(2)$ の質量 0 の表現として書くとよい．小群のもとでのいろいろな状態の多重度を書くと，次のようなボソン状態の群の表現を得る：

$$
\begin{array}{rl}
\text{グラビトン：} & (3,3) \\
\text{テンソル：} & (3,1)\ \text{または}\ (1,3) \\
\text{ベクトル：} & (2,2) \\
\text{スカラー：} & (1,1).
\end{array}
\tag{12.4.7}
$$

10 次元のいろいろな場を，この小群による 6 次元の分類によって分解すれば，

$$
\begin{array}{rl}
g_{\mu\nu}: & (3,3)+4(2,2)+10(1,1) \\
B_{\mu\nu}: & (3,1)+(1,3)+4(2,2)+6(1,1) \\
A_\mu^a: & 16(2,2)+64(1,1) \\
\phi: & (1,1)
\end{array}
\tag{12.4.8}
$$

を得る．これは期待通り，$(1,1)$ で記述される 80 個のスカラー場，$(2,2)$ で記述される 24 個のベクトル場，および 1 つのディラトンである．

しかしこれを K_3 にコンパクト化した IIA 型理論と比べると，たくさん似たところがある．たとえば，同数のベクトル場がある．10 次元理論の A_μ は 1 つのベクトル場を出す．$C_{\mu\nu\rho}$ テンソルは 22 個のベクトルを出す．さらに 6 次元の $A_{\mu\nu\rho}$ はベクトルとデュアルなので，もう 1 つ余分のベクトルがある．こうして期待通り，$1+1+22=24$ 個の U(1) ベクトル場がある．

またコンパクト化で，K_3 は超対称性を半分保つので，$(2,2)$ ではなく $N=(1,1)$ を得る．これは T_4 にコンパクト化したヘテロティック弦に対して見つけた $(1,1)$ 超対称性と一致する．

しかし，2 つの理論のモジュライ空間とスカラー場を調べると，いくつかの問題に遭遇する．ヘテロティック弦理論は $E_8\otimes E_8$ Yang-Mills 場を含むが，IIA 弦理論はこれに対応するものがなく，大きく異なる場を含んでいる．IIA 弦理論にはあまりに少ない場しかないように思える．しかしこの問題は，II 理論のモジュライ空間に K_3 多様体と他のスカラー場を含むいくつかの異なるものからの寄与があり，そのために 6 次元での 2 つの理論が実はまさに 80 個のスカラー場を含むようになっていて，解決される．

これを理解するために，まず K_3 のモジュライ空間を調べよう：

$$
R^+\otimes\frac{\mathrm{SO}(3,19)}{\mathrm{SO}(3)\otimes\mathrm{SO}(19)}.
\tag{12.4.9}
$$

これは $3\times 19=57$ 次元に加えて，空間の体積からくる 1 次元がある．このように，10 次元の計量 $g_{\mu\nu}$ は 6 次元の計量と，K_3 のモジュライ空間に対応する 58 個のスカラー場に分解できる．

K_3 にコンパクト化した IIA 弦理論のモジュライ空間を見つけるためには，他の場からの寄与を見つけなければならない．というのは，グラビトン以外に，モジュライ空間に寄与しうるボソン場 $\phi, B_{\mu\nu}, C_\mu, A_{\mu\nu\rho}$ からの余分の寄与があるからである．

K_3 上に存在する場の数を計算するために，K_3 上の質量 0 のボソンの数は K_3 上の調和 p 形式の数に等しいことに注意する．一方これは，多様体の Betti 数，$b_0=1$，$b_1=b_3=0$，$b_2^+=3$，$b_2^-=19$，および $b_4=1$ で与えられる．すなわちこの空間には，3 つの自己双対 2 形式と，19 個の反自己双対 2 形式が定義できる．したがって，3

$+\ 19 = 22$ 個の生成子がある．これらの K_3 上の 22 個の 2 形式は，6 次元の Lorentz 群のもとでスカラーのように変換する．言い換えると，$B_{\mu\nu}$ 場は 6 次元のテンソルと余分の 22 個のスカラー場を出す．

こうして K_3 にコンパクト化した IIA 型弦理論は前と同じに，全部で $58 + 22 = 80$ 個のスカラー場をもつ．

したがって，次の状態の数を得る：

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}: &\quad (3,3) + 58(1,1) \\ B_{\mu\nu}: &\quad (3,1) + (1,3) + 22(1,1) \\ C_{\mu\nu\rho}: &\quad 23\,(2,2) \\ A_{\mu}: &\quad (2,2) \\ \phi: &\quad (1,1). \end{aligned} \tag{12.4.10}$$

実は K_3 にコンパクト化した IIA 型弦理論のモジュライ空間は，T_4 にコンパクト化したヘテロティック弦理論のものとちょうど同じである．2 つの低エネルギー有効超重力理論を比べると，作用が同じであることがわかる．

したがって

$$K_3 \text{ 上の IIA} \leftrightarrow T_4 \text{ 上の } E_8 \otimes E_8 \tag{12.4.11}$$

を得る．

$D = 7$ における M 理論

同様に，7 次元で同じような解析をすることができる．6 次元のデュアルな関係の両辺の S_1 の作用を「除く」か「もち上げ」て，7 次元のさらに別のデュアルな関係を得ることができる．これは，S_1 を除くことにより，K_3 上にコンパクト化したメンブレインと T_3 上にコンパクト化したヘテロティック弦の間のデュアリティーを解析することになる．期待される通り，両方とも同じ T デュアリティー群 $\mathrm{SO}(3,19,\mathbb{Z})$ と同じモジュライ空間 $\mathrm{SO}(3,19)/\,\mathrm{SO}(3)\otimes\mathrm{SO}(19)\otimes T$ をもっていることに注意する：

これは次のようにまとめられる：

$$\left\{ \begin{array}{lcl} K_3 \text{ 上の IIA} & \leftrightarrow & T_4 \text{ 上の } E_8 \otimes E_8 \\ K_3 \text{ 上の M 理論} & \leftrightarrow & T_3 \text{ 上の } E_8 \otimes E_8 \end{array} \right. . \tag{12.4.12}$$

驚くにあたらないが，いろいろな次元へのコンパクト化の大きな拡がりが，メンブレインと 5 ブレインのデュアリティーを用いて見つかった．コンパクト化した弦のデュアルは別の種類の弦であることがわかった．これにより，この手法の整合性の強力なチェックができ，以前には不思議であった弦理論の強結合極限についての重要な知見が得られる．

物理的に重要な $N = 1$, $D = 4$ へ落とすことはまだできていないことに注意しておく．しかし，新しいデュアリティーの結果はすでに $D = 6$, $N = 1$ と $D = 4$, $N = 2$ へのコンパクト化についての知見は与えており，これはもっと難しい $D = 4$, $N = 1$ の場合の指針となるはずである．

まとめると，非常に多くの不連続なデュアリティーをいろいろな次元で構成した．出発点はふつうの超重力理論で長年苦労して計算されていた連続的デュアリティーを解析して，超弦理論で残る不連続な部分集合との組み合わせを見つけることであった．

12.5 例：$D = 4, N = 2$ と $D = 6, N = 1$

もちろん物理的に重要なのは，$D = 4, N = 1$ の場合である．この場合は可能な真空がとてもたくさんあって解析が難しいので，$D = 6, N = (1, 0)$ といったより簡単な場合を解析する．というのは，これはヘテロティックとヘテロティックのデュアリティーを与え [4–6]，また $D = 4, N = 2$ に相当するからである．（われわれは後者に注目する．）ほとんどの場合，$D = 6$ 理論をコンパクト化することにより，$D = 4$ の理論が得られる．このレベルですでに，高度に非自明な結果が得られ，それが物理的に重要な $D = 4, N = 1$ の場合にもあてはまると期待される．

まず $E_8 \otimes E_8$ ヘテロティック弦を $D = 4, N = 2$ にコンパクト化する．このためには SU(2) ホロノミーをもつ 6 次元 Ricci 平坦な多様体が必要である．それは $K_3 \otimes T_2$ しかないことが示せる．この理論が SU(3) ホロノミーをもつ Calabi-Yau 多様体にコンパクト化した IIA 理論にデュアルであることを示す．この解析は前の $D = 6$ のときよりずっと豊かな内容を含み，より複雑な $D = 4, N = 1$ の場合の手がかりを与えてくれる．

まず $K_3 \otimes T_2$ にコンパクト化したヘテロティック弦は，多様体の曲率が面倒であることと，Yang-Mills 場が存在するために複雑であることに注意する．たとえば，ビアンキ恒等式より

$$dH = \mathrm{Tr}\ F \wedge F - \mathrm{Tr}\ R \wedge R \tag{12.5.1}$$

である．左辺の積分が 0 であれば，右辺の積分も計算できる．それらは，各々の空間の第 2 Chern 類に等しいからである．この方程式を積分すると，

$$c_2(K_3 \otimes T_2) = 24 = c_2(E_8 \otimes E_8) \tag{12.5.2}$$

を得る．$K_3 \otimes T_2$ の第 2 Chern 類は 24 なので，ビアンキ恒等式によりゲージ空間 $E_8 \otimes E_8$ の c_2 も 24 である．しかし $F \wedge F$ の積分はインスタントン数に等しい．したがって，24 個のインスタントンがなければならない．ゲージ群は $E_8 \otimes E_8$ なので，これらのインスタントンをどのように分布させるか選ぶことができる．一般に，1 つの E_8 に $12 - n$ 個のインスタントン，他方に $12 + n$ 個のインスタントンを入れることができる．こうすると，われわれが興味をもっている弦の真空は，整数 n でしるしづけられることになる．

一方この理論は，ある Calabi-Yau 多様体にコンパクト化した IIA 理論とデュアルである．しかし，Calabi-Yau 多様体はおそらく無限にあるので，選び方を制限しなくてはならない．とくに，ヘテロティック弦の場合にインスタントンがどのように分布するかを記述する整数に相当するしるし n をもつ Calabi-Yau 多様体を作りたい．

まず 2 つのことに注意する．ある特別な種類の Calabi-Yau 多様体は K_3「ファイバー空間」，すなわち複素射影空間 $\boldsymbol{P}_1$ を底空間として局所的に定義された K_3 ファイ

バーとして書ける．これは $\boldsymbol{P}_1$ の各点に定義された異なる K_3 があることを意味する．これを図式的に $\boldsymbol{P}_1$ 上の K_3 と表す．

同様に，ある特別な種類の K_3 多様体が，楕円型ファイバー空間として書けることにも注意する．楕円型ファイバー空間は，複素射影空間 $\boldsymbol{P}_1$ 上の各点に T_2 ファイバーをおくことにより構成できる [7]．この特別な種類の K_3 に対しては，図式的に $\boldsymbol{P}_1$ 上の $K_3 = T_2$ と書くことができる．

これは，この種の Calabi-Yau 多様体が $\boldsymbol{P}_1$ 上に局所的に定義された T_2 として書けること，また K_3 は別の $\boldsymbol{P}_1$ 上に局所的に定義されていることを意味している．このことは直観的には，Calabi-Yau 多様体が別の $\boldsymbol{P}_1$ 上に局所的に定義された $\boldsymbol{P}_1$ である新しい多様体 F 上に局所的に定義された T_2 と書けることを意味している．

しかし別の $\boldsymbol{P}_1$ 上の $\boldsymbol{P}_1$ ファイバー空間の集合は，n を多様体の交点数として Hirzebruch 空間 $\boldsymbol{F}_n$ として書けることも知っている．たとえば，$n = 0$ に対しては $\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{P}_1 \otimes \boldsymbol{P}_1$ である．

この過程は，図式的に

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_1 \text{ 上の } K_3 &= \boldsymbol{P}_1 \text{ 上の } [\boldsymbol{P}_1 \text{ 上の } T_2] \\ &= [\boldsymbol{P}_1 \text{ 上の } \boldsymbol{P}_1]_n \text{ 上の } T_2 \\ &= \boldsymbol{F}_n \text{ 上の } T_2 \end{aligned} \tag{12.5.3}$$

と表せる．

以上を総合すると，$K_3 \otimes T_2$ にコンパクト化した $E_8 \otimes E_8$ ヘテロティック弦は，$\boldsymbol{F}_n$ の楕円型ファイバー空間で与えられる Calabi-Yau 多様体にコンパクト化した IIA 理論にデュアルであると予想される．したがって

$$\mathrm{S} : K_3 \otimes T_2 \text{ 上の } E_8 \otimes E_8 \ \leftrightarrow [\boldsymbol{F}_n \text{ 上の } T_2] \text{ 上の IIA} \tag{12.5.4}$$

となる．ここで整数 n は(ヘテロティック弦に対して)インスタントンがどのように分布しているか，または(IIA 理論に対して) Hirzebruch 空間の指数を表す．

モジュライ空間をもっと詳しく解析すると，BPS スペクトルと低エネルギー作用がこの推測から得られる．このコンパクト化の得られる別の面白い特徴として，対称性の拡大と張力のない弦があるが，これらについて簡単に述べることにする．

12.6 超対称性の拡大と張力のない弦

K_3 にコンパクト化した IIA 弦理論と T_4 にコンパクト化したヘテロティック弦理論の間のデュアリティーは，ほかにもたくさんの面白い性質をもっている．たとえば，6 次元にコンパクト化したヘテロティック弦理論のゲージ群は $U(1)^{24}$ である．しかし，理論を簡単に修正してゲージ群を大きくすることができる．ルートベクトルをうまくとって，リー群を大きくして A-D-E 型の対称性にすることができる．たとえば，ヘテロティック弦理論の左向き振動部分の場合，ルートベクトルは自己同型群がなじみのある T デュアリティー群 $O(20, 4, \mathbb{Z})$ である格子 $\Lambda^{20,4}$ に属する．ルートベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ が $\boldsymbol{\alpha}^2 = 2$ をみたせば，その対応する質量を計算することができ，それが質量 0 で電

荷をもったベクトル粒子であることがわかる．このように，この関係をみたすように格子のルートを選べば，A-D-E 分類で与えられる拡張されたゲージ群に対応する質量 0 のベクトルゲージ粒子を得る．

T_4 にコンパクト化したヘテロティック弦理論のゲージ群の拡大は簡単であるが，K_3 にコンパクト化したときのデュアルな IIA 弦理論のゲージ群の拡大がどう起きるかはそう明らかではない．一見，コンパクト化した IIA 弦理論から A-D-E 型の拡張した対称性を得るのは不可能に見える．驚くべきことに，注意深く解析すると，II 型弦理論を Calabi-Yau 多様体にコンパクト化すると，ある種の特異性をもったオービフォールド(orbifold)に関係することがわかる．これらの Calabi-Yau 多様体の特異性を分類することにより，まさに同じ A-D-E 分類で分類できることがわかる．したがって，対称性の拡大がコンパクト化したヘテロティック弦と IIA 弦の両方で起こるが，まったく違う理由によるのである．これはさらに別の弦のデュアリティーの証拠である．

6 次元ヘテロティック弦の別の奇妙な性質は，それらがたびたび相転移を起こすことである．カイラルな $D=6, N=(1,0)$ 理論を解析してみよう．相転移のために，コンパクト化した後計算に入ってくるかもしれないカイラル異常を注意深く解析しなければならない．これらのカイラル異常は相殺しなければならないが，そのために模型にもっと制限がつく．注意深い計算により，異常 8 形式 I_8 が 2 つの 4 形式の積に分解すれば，すなわち $I_8 \to X_4 \wedge \hat{X}_4$ となれば，この異常がうち消すことがわかる．ここで

$$X_4 = \mathrm{Tr}\ R^2 - \sum_\alpha v_\alpha\ \mathrm{Tr}\ F_\alpha^2$$
$$\hat{X}_4 = \mathrm{Tr}\ R^2 - \sum_\alpha \tilde{v}_\alpha\ \mathrm{Tr}\ F_\alpha^2 \tag{12.6.1}$$

であり，R は リーマンテンソル，α はゲージ群を表し，F_α は Yang-Mills の 2 形式，v_α と $\tilde{v}_\alpha$ は理論で与えられる定数である．これらのゲージ場の運動エネルギー項は次の組み合わせで現れることが示せる：

$$\sum_\alpha (v_\alpha e^{-\phi} + \tilde{v}_\alpha e^{\phi})\ \mathrm{Tr}\ (F_\alpha \cdot F_\alpha). \tag{12.6.2}$$

ここで v_α は正である．しかし，$\tilde{v}_\alpha$ が負ならば運動エネルギー項は 0 になることに注意する．

$$e^{2\phi_0} = -\frac{v_\alpha}{\tilde{v}_\alpha} \tag{12.6.3}$$

なる $\phi = \phi_0$ の値に対して，この項は 0 になる．

運動エネルギー項が 0 になることは，理論が相転移を起こしていることを意味する．Yang-Mills の運動エネルギー項には $1/g^2$ がかかっているので，これは結合定数が発散することを意味する．これにはまた別の解釈がある．以前に (p,q) で与えられる(電荷，磁荷)をもつダイオン的弦が存在することを見た．これらの弦の張力は

$$T_{p,q} = pe^{-\phi} + qe^{\phi} \tag{12.6.4}$$

で与えられる．(p,q) は $(v_\alpha, \tilde{v}_\alpha)$ に比例することが示せる．これはこれらのダイオン

的弦の張力が特異点で 0 になることを意味している．これらはときどき「張力のない弦」と呼ばれる．

(たとえば，群 SO(n) の場合，$v = 1$ と $\tilde{v} = -2$ が成り立つ．したがって $(1, -2)$ のダイオン的弦に対して張力は 0 になる．群 E_8 の場合は，$v = 1/30$ と $\tilde{v} = -1/5$ が成り立つ．したがって，$(1, -6)$ のダイオン的弦に対して張力のない弦が得られる．)

いろいろなコンパクト化に対して，張力のない弦が実現することがわかる．しかし，この特異性が決して起こらないコンパクト化が 1 つある．K_3 にコンパクト化した $E_8 \times E_8$ 弦の場合，

$$
\begin{aligned}
X_4 &= \mathrm{Tr}\ R^2 - \frac{1}{6}\ \mathrm{Tr}\ F_1^2 - \frac{1}{6}\ \mathrm{Tr}\ F_2^2 \\
\hat{X}_4 &= \mathrm{Tr}\ R^2 + \left(1 - \frac{n_1}{12}\right)\ \mathrm{Tr}\ F_1^2 + \left(1 - \frac{n_2}{12}\right)\ \mathrm{Tr}\ F_2^2
\end{aligned}
\tag{12.6.5}
$$

となる．ここで 1,2 は 2 つの E_8 群を表し，インスタントン数は $n_1 = 12 - n$ と $n_2 = 12 + n$ で表される．言い換えると，$v_1 = v_2 = 1/6$ と $\tilde{v}_i = (n_i/12) - 1$ が成り立つ．これは $n_1 = n_2 = 12$ に対しては，決して張力のない弦が実現しないことを意味する．こうして，インスタントンを 2 つの E_8 に対称に埋め込むと，相転移なしに弱結合と強結合の間をなめらかに移ることができる．

6 次元の弦理論の最後の特徴は，ヘテロティックとヘテロティックのデュアリティーの存在である．$K_3 \otimes T_2$ の中のトーラス T_2 の面積を無限大にすれば，K_3 にコンパクト化した $D = 6, N = 1$ 理論が回復する．これは K_3 にコンパクト化したヘテロティック弦が，$\boldsymbol{F}_n$ 上に局所的に定義された T_2 にコンパクト化した IIA 弦理論のトーラスの面積が無限大になるときの極限とデュアルであることを意味している．この後者の理論はいろいろなやり方で定義できるが，これによりさらに別のヘテロティック弦にデュアルな IIA 弦理論を与えてくれる．これらの 2 つのヘテロティック弦理論を組み合わせることにより，$D = 6$ における新しいヘテロティックとヘテロティックのデュアリティーが得られる．

まとめると，$D = 6, N = 1$ 理論と $D = 4, N = 2$ 理論のデュアリティーを調べることにより，いくつかの予期しなかった現象が見つかった．これはさらに，物理的に重要である $D = 4, N = 1$ 理論ではもっと驚くようなことが起きることを示している．

12.7　F 理論

今まで見た 5 つの超弦理論が統一されることは非常に驚くべきことであるが，まだ多くの未解決の点がある．とくに，11 次元に存在する M 理論が 10 次元の IIB 理論に直接落とせないのは変に思える．それには，M 理論をまず T_2 にコンパクト化して，S_1 にコンパクト化した IIB 理論と比べなければならない．われわれの目的は，その真空がいろいろな弦と p ブレインを出すような 1 つの理論を見つけることであるから，奇妙な極限をとらなくても 10 次元の IIB 型理論をコンパクト化で直接出すような理論があるほうが望ましい．

1 つの面白い事実は，IIB 型理論がトーラスのモジュライ群である SL(2, $\mathbb{Z}$) で与え

られる S デュアリティーをもっていることである．今までのところ，この $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 対称性は時空での意味をもたない単に数学的な対称性として扱われてきた．しかし，この $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 対称性が，コンパクト化により T_2 上の本当の時空の対称性として現れると仮定することもできよう．この場合，計量 $(10,2)$ をもつ新しい 12 次元の理論の存在を仮定することになる．これを F 理論という [9]．

12 次元の対称性をもつ理論は，超対称性によって長い間研究されたきた．以前に Q_α のもてる最大の成分数は 32 であることを見た．ふつうの Lorentz 型の計量をとれば，32 個のマヨラナスピノールをもつ 11 次元が最大の次元数になる．しかし Lorentz 型でない時空の群 $\mathrm{O}(10,2)$ を用いれば，マヨラナ-ワイルスピノールが 64 成分ではなく，32 成分もつことがわかる [10, 11]．したがって，F 理論はそれほど変な考えでもない．

本質的なアイデアは，T_2 にコンパクト化した F 理論が IIB 型理論と同じであり，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ モジュラー群のもとになるという点である．IIB 型理論をある多様体 B にコンパクト化したとすると，これを特別な性質をもつより大きな多様体 A にコンパクト化した F 理論と言い換えることができる．$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 変換が時空の局所的な点で定義されているディラトンとアクシオンに作用することを思い出そう．したがって，B の各点で別々の $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 変換があるので，B の各点で定義されたトーラスがあることになる．とくに，z を多様体 B 上の点とすれば，トーラスの複素構造が B の各点に対し $\tau(z)$ で与えられる．（ファイバー束は積多様体 $T_2 \otimes B$ とはまったく違う位相的構造をもつことに注意しよう.） このことは，A が積多様体ではなく，ファイバー束の構造をしていなければならないことを意味している．ファイバーは T_2，底の多様体は B であり，したがって B 上の各点に対し別々の T_2 がある．

まとめると，A がファイバー束の構造をもち，多様体 B の楕円型ファイバー空間であれば，A にコンパクト化した F 理論は，B にコンパクト化した IIB 型理論と同じであると言う．これを図式的に次のように書く：

$$A = B \text{ 上の } T_2. \tag{12.7.1}$$

また F 理論を用いて，$\mathrm{SO}(32)$ 理論と I 型理論の間の S デュアリティーを説明することができる．F 理論を $T_2/\mathbb{Z}_2$ にコンパクト化すると，$\mathrm{SO}(32)$ 理論が得られる．前と同じに，これはシリンダーにコンパクト化するのと同じであるから，トーラスの $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 対称性がなくなる．これは R/L が，$R \to 0$ とするか，$R \to \infty$ とするかによって，異なる 2 つの理論を与えることを意味している．したがって，$\mathrm{SO}(32)$ は IIB 型理論のように自己双対なのではなく，別の I 型理論とデュアルであることを示している．

ある種の K_3 に対しては，$K_3 = T_2 \otimes T_2/\mathbb{Z}_2$ であることを用いることもできる．前のデュアリティーの関係から T_2 をまた「持ち上げ」れば，ある種の K_3 にコンパクト化した F 理論が T_2 にコンパクト化したヘテロティック弦理論を与える．

これを記号的にまとめる：

$$\begin{cases} T_2 \text{ 上の F 理論} & \leftrightarrow \quad \mathrm{IIB} \\ A \text{ 上の F 理論} & \leftrightarrow \quad B \text{ 上の IIB} \\ T_2/\mathbb{Z}_2 \text{ 上の F 理論} & \leftrightarrow \quad \mathrm{SO}(32) \\ \mathrm{K}_3 \text{ 上の F 理論} & \leftrightarrow \quad T_2 \text{ 上の } E_8 \otimes E_8. \end{cases} \tag{12.7.2}$$

A は B の楕円型ファイバー空間である．

明らかに F 理論は，蜘蛛の巣状のデュアリティーを調べるのに便利な道具である．しかし，それが本当にどのくらい基本的なものなのかについては疑問がある．それは M 理論が本当に 12 番目の次元に起源をもっていることを示しているかもしれないし，あるいは単に便利な数学的手段なのかもしれない．

12.8　例：$D=4$

$D=4$ 理論は構成するのが難しいが，ふつうのトーラスコンパクト化で得られる $D=4$ で $N=8$ のずっと簡単な場合を調べることができる．この理論は現実的ではないが，BPS 状態を数えるために調べてみる．以前の超代数の解析より，4 次元の $N=8$ 理論には 56 個のセントラルチャージがあるはずである．

11 次元超重力を T_7 にコンパクト化して，4 次元に落とす．

4 次元のゲージ場の数，したがって BPS の関係に現れる電荷の数を調べてみよう．計量テンソル $g_{\mu a}$ は 7 個のベクトル場を与え，$A_{\mu ab}$ は $7!/5!2!=21$ 個のベクトル場を与える．したがって，前の $D=4$ の超並進代数の議論から期待されるように，28 個の電荷がある．(残る 28 個の磁荷は，デュアルな理論から来る.)

これを超対称性代数から来るチャージと比べてみよう．今 T_7 上にコンパクト化するので，超対称性代数は $7+7$ 個の電荷と磁荷を与える．(これは P_M に含まれる 7 個のチャージと，5 形式 $Z_{a\mu\nu\alpha\beta}$ に含まれる 7 個のチャージから来る.)　同様に，メンブレインを巻き付けて得られる 21 個の電荷と，5 ブレインを巻き付けて得られる 21 個の磁荷がある．(これは，7 次元で 2 形式 Z_{MN} と 5 形式 Z_{MNOPQ} から作れる時空のスカラーの数が，$7!/2!5!=21$ 個だからである.)　したがって超対称性代数から期待されるように，全部で 56 個の電荷と磁荷がある．

さらに，このように $D=4$ 超重力にコンパクト化した 11 次元超重力は，T_6 にコンパクト化した IIA 型超弦理論と S デュアルであるはずである．これを確かめよう．単純には，この弦理論の真空のモジュライ空間は $\mathrm{O}(6,6)/\mathrm{O}(6)\otimes\mathrm{O}(6)$ であると期待され，実際その T デュアリティー群は $\mathrm{O}(6,6,\mathbb{Z})$ である．しかしこの群は理論のモジュライ空間を記述するには小さすぎる．したがって，R-R 部分からのスカラーの寄与も解析しなければならない．

とくに，U デュアリティー群に興味があるが，それは T デュアリティー群と $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ で与えられる S デュアリティー群の両方を含む群を探すことで見つけられる．超重力理論の真空のモジュライ空間を分類していた，もとの $E_{7(7)}$ の不連続部分群である $E_{7(7)}(\mathbb{Z})$ が S デュアリティー群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ と T デュアリティー群 $\mathrm{O}(6,6,\mathbb{Z})$ の両方を部分群として含むことがわかる：

$$E_{7(7)}(\mathbb{Z})\supset\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\otimes\mathrm{O}(6,6,\mathbb{Z}). \tag{12.8.1}$$

したがって，U デュアリティー群は $E_{7(7)}(\mathbb{Z})$ である．BPS 飽和状態を注意深く解析してみると，この推測が正しいことがわかる．

コンパクト化の後に残るベクトル場と，それらが結合するチャージを解析してみよ

う．10 次元から 4 次元にコンパクト化したとき，NS 部分の計量 $g_{\mu a}$ と反対称テンソル $B_{\mu a}$ は 6+6=12 個のゲージ場を出す．これらは，T デュアリティー群 $O(6,6,\mathbb{Z})$ のもとで **12** のように変換する 12 個の電荷と結合する．しかしここで，摂動論では理論のすべてのチャージが説明できないことがわかる．摂動論では，12 個の電荷しか得られないが，28 個の電荷と 28 個の磁荷がなければならないことがわかっている．

R-R 場を加えても情況は悪くなるだけである．R-R ゲージ場 C_μ と $A_{\mu ab}$ は，原則的には $1 + 15 = 16$ 個のゲージ場を与えるはずであるが，問題はそれらは世界面にポテンシャルではなく場のテンソルでしか結合しないことである．したがって，それらは電荷にも磁荷にも結合しない．つまり 16 個の電荷と 28 個の磁荷が足りないのである．

この問題の最終的な解決は，完全な非摂動論的理論を解析して初めて得られ，それによると D ブレインと呼ばれる新しい p ブレイン状態があって，それがちょうど正しく R-R 場に結合していることがわかった．

こうして非摂動的効果による解決が得られた．必然的に非摂動的対称性である U デュアリティーにより，たりなかった 16 個の R-R チャージは，前に摂動論で見つかっていた 12 個のチャージと同じ **56** 表現に入る．

56 は $SL(2,\mathbb{Z}) \otimes O(6,6,\mathbb{Z})$ のもとで，次のように分解する：

$$\mathbf{56} \to (\mathbf{2}, \mathbf{12}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{32}). \tag{12.8.2}$$

本質的に重要な点は，T デュアリティーが NS-NS の **12** と R-R の **32** を別々に変換することである．これら 2 つの部分は混ざらない．しかし，U デュアリティーはこれらの状態を同じ多重項 **56** にするので，これらの状態はすべて非摂動的に混ざり合うのである．

これらの R-R チャージを加えれば，IIA 弦理論の BPS 関係がみたされることがわかる．Neveu-Schwarz 部分から生じる 12 + 12 個のチャージは，コンパクト化した弦のカルーツァ-クラインモードと巻き付きモードによって構成できる．以前には不思議だった 16 + 16 個のチャージは，D ブレインと呼ばれる R-R 部分の新しい励起から生じる．これで期待通り，28 + 28 個の電荷と磁荷が得られる．

ヘテロティック弦の場合は，解析は少し違う．期待通り，S デュアリティー群は $SL(2,\mathbb{Z})$ で，T デュアリティー群は $O(6,22,\mathbb{Z})$ であるが，全体の U デュアリティー群は $SL(2,\mathbb{Z}) \otimes O(6,22,\mathbb{Z})$ にしかならない．真空のモジュライ空間の次元は，$22 \times 6 = 132$ となる．これはヘテロティック弦の場を分解してスカラー場を出してみてもわかる．a, b が 6 次元トーラスを表すとして，計量 g_{ab} は 21 個のスカラー，2 形式 B_{ab} は 15 個のスカラー，$E_8 \otimes E_8$ または $SO(32)$ のカルタン部分代数の 16 個のゲージ場 A_a^i は $6 \times 16 = 96$ 個のスカラー場を与える．これらを加え合わせれば，デュアリティーから期待されるように 132 個のスカラー場が得られる．

さて $U(1)$ ゲージ場，すなわち電荷および磁荷の数を数えてみよう．計量 $g_{\mu a}$ は 2 形式 $B_{\mu a}$ と同じく，6 個のゲージ場を出す．$E_8 \otimes E_8$ ゲージ場 A_μ^i は 16 個のゲージ場を出し，期待通り全体で 28 個のゲージ場，すなわち 56 個の電荷と磁荷を出す．

12.9　まとめ

今まで得られていた関係式は弦理論の摂動論的振る舞いにとても依存していた．このアプローチにさらに証拠を得るために，理論の非摂動的な解析をしたい．これは超対称性の非くりこみ定理のためにくりこみを受けない BPS 飽和状態によりできる．これらの BPS 状態は，p ブレイン状態の存在と関係している．

超並進代数で見つかった c 数の解析から始める：

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = (\Gamma^\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu + \sum_p (\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p} C)_{\alpha\beta} Z_{\mu_1\cdots\mu_p}. \tag{12.9.1}$$

歴史的には，第 2 項は暗黙のうちに点状粒子だけが存在すると仮定していた超対称性の有名な否定定理を破っているので，落とされていた．今はこの暗黙の仮定をせず BPS 関係を飽和する p ブレインの存在を認めよう．

p ブレインの力学を理解するために，p ブレインに結合する $p+1$ 階の反対称テンソルゲージポテンシャルを考える．その結合は

$$\int d^D x\ A_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p+1}} j^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p+1}} \tag{12.9.2}$$

で与えられる．ここで

$$j^\mu(x) = \int d\tau\ \delta^D\left(x_\mu - X_\mu(\tau)\right)\ \partial_\tau X^\mu(\tau) \tag{12.9.3}$$

であり，$X_\mu(\sigma_i)$ は，弦理論にふつうある弦の変数を一般化したものである．

さて p ブレインポテンシャルの場のテンソルを作る：

$$F_{\mu_1\cdots\mu_{p+2}} = \partial_{\mu_1} A_{\mu_2\cdots\mu_{p+1}} + \text{巡回}. \tag{12.9.4}$$

別の場のテンソル F' を導入して，F のデュアルが F' になるようにすることができる．すなわち，

$$^*F_{\mu_1\cdots\mu_{p+2}} = F'_{\mu_1\cdots\mu_{q+2}} \tag{12.9.5}$$

F' は q ブレインに対応するさらに別のテンソルのポテンシャルに対応する場のテンソルなので，条件

$$p + q = D - 4 \tag{12.9.6}$$

を得る．これで p ブレインのデュアルの次元がわかる．

さて完全な 11 次元のセントラルチャージを含む超代数を考える：

$$\begin{aligned}\{Q_\alpha, Q_\beta\} = &\left(\Gamma^M C\right)_{\alpha\beta} P_M + \left(\Gamma^{MN} C\right)_{\alpha\beta} Z_{MN} \\ &+ \left(\Gamma^{MNPQR} C\right)_{\alpha\beta} Z_{MNPQR}.\end{aligned} \tag{12.9.7}$$

右辺の各セントラルチャージの項は p ブレインに対応している．状態を数えると各項が

$$11 + 55 + 462 = 528\ \text{状態} \tag{12.9.8}$$

の寄与をしていることがわかる．ここで 55 個の状態はメンブレインに対応し，462 個の状態は 5 ブレインに対応している．

この簡単な解析ですごいことは，BPS p ブレインを実際に構成しなくても，その全部の存在がわかるということである．

たとえば，10 次元の IIA 型理論を考える：

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \left(\Gamma^M C\right)_{\alpha\beta} P_M + Z + \left(\Gamma^M C\right)_{\alpha\beta} Z_M + \left(\Gamma^{MN} C\right)_{\alpha\beta} Z_{MN} + \left(\Gamma^{MNPQ} C\right)_{\alpha\beta} Z_{MNPQ} + \left(\Gamma^{MNPQR} C\right)_{\alpha\beta} Z_{MNPQR}. \quad (12.9.9)$$

状態を勘定すると，これは

$$10 + 1 + 10 + 45 + 210 + 252 = 528 \text{ 状態} \quad (12.9.10)$$

を与える．これらの方程式を解析すると，偶数の p ブレインに対し BPS 状態が存在すべきことがわかる．

10 次元の IIB 型代数を解析すると，

$$\{Q^i_\alpha, Q^j_\beta\} = \delta^{ij} \left(\mathcal{P}\Gamma^M C\right)_{\alpha\beta} P_M + \left(\mathcal{P}\Gamma^M C\right)_{\alpha\beta} \tilde{Z}^{ij}_M + \varepsilon^{ij} \left(\mathcal{P}\Gamma^{MNP} C\right)_{\alpha\beta} Z_{MNP} + \delta^{ij} \left(\mathcal{P}\Gamma^{MNPQR} C\right)_{\alpha\beta} Z^+_{MNPQR} + \left(\mathcal{P}\Gamma^{MNPQR} C\right)_{\alpha\beta} \tilde{Z}^{+ij}_{MNPQR} \quad (12.9.11)$$

を得る．

状態を数えると，これは予測通り

$$10 + (2 \times 10) + 120 + 126 + (2 \times 126) = 528 \text{ 個} \quad (12.9.12)$$

を与える．

さらにこれから，IIB 型弦理論では，奇数の p ブレイン状態が存在するべきであることがわかる．

これらの p ブレインは何の役に立つだろうか？ これらが理論の非摂動的構造を決めるのに重要な役割を果たすことがわかる．たとえば，R-R 場の源は何かという長年の疑問があった．IIA 弦理論には，$\{l, B'_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\sigma\rho}\}$ で与えられる質量 0 の R-R 場があり，IIB 型理論には $\{l, B'_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\sigma\rho}\}$ の R-R 場があったことを思い出す．しかし弦の変数 X_μ からはこれらの場の源を構成することはできなかった．弦は NS-NS 場のチャージはもっていたが，R-R 場のチャージはもっていなかった．ここでわれわれは IIA (B) 理論に，実は R-R 場の源になる偶数(奇数)の p ブレインで与えられる非摂動的状態があることを見た．

これはたとえば，IIB 型理論では SL$(2,\mathbb{Z})$ 対称性がテンソル場 B を B' に変換するので，B' に付随したチャージをもった新しい物体がなければならないことがわかるので大事である．

この章では，高次元で見つかったデュアリティーがどのように自然に低次元のデュアリティーを出すかを見た．とくに，コンパクト化した 1 つの弦理論の非摂動的な領域が，さらに別の一見何の関係もない弦理論を生じることがたびたびあることを見た．

たとえば，K_3 にコンパクト化した IIA 弦理論は T_4 にコンパクト化したヘテロティック弦理論にデュアルである．

このデュアリティーがどのように出るかを理解するにはいろいろな方法がある．もっとも簡単な方法は，同じ低エネルギーの構造をもつ一見関係のない 2 つの理論を比べることである．とくに，コンパクト化の過程で残る超対称性の生成子を解析する．10 または 11 次元の超対称性生成子 Q_α をもってきて，それを低次元にコンパクト化すれば，α を低次元のスピノールの足，i が超対称性生成子の数を表すとして，$Q_{\alpha,i}$ に分解することがわかる．こうして，理論をコンパクト化する多様体のホロノミー群がわかれば，コンパクト化で残る超対称性生成子の数 N を計算することができる．

とくに，$D=6$ の場合は詳しく調べられている．11 次元の M 理論が，メンブレインとそのデュアルである 5 ブレイン (これは BPS 超対称性代数を解析して得られる) を含むという事実から始める．1 次元空間 M_1 と 4 次元空間 M_4 の積で与えられる 5 次元空間にメンブレインと 5 ブレインの両方をコンパクト化することができる．その結果できる 6 次元の理論は，もともと 11 次元でデュアルだったのだから，互いにデュアルであるはずである．

$M_1 = S_1$ または $M_1 = S_1/\mathbb{Z}_2$ とすることができる．また，$M_4 = K_3$ または $M_4 = T_4$ とすることもできる．こうしてメンブレインとそのデュアルをコンパクト化する 4 通りの方法が得られる．こうして，4 つの可能なデュアリティーが得られる．

おそらくもっとも面白い場合は $D=6$ と $N=(1,1)$ の場合で，ヘテロティックと II 型のデュアリティーが得られた．このデュアリティーの証拠は，両方の理論の低エネルギーの構造を調べて得られた．

T_4 にコンパクト化したヘテロティック弦のモジュライ空間は，Narain 格子

$$\frac{\mathrm{SO}(4,20)}{\mathrm{SO}(4)\otimes\mathrm{SO}(20)\otimes T} \tag{12.9.13}$$

で与えられる．これは $4\times 20=80$ 次元である．さらにこれは，超重力理論のスカラー場の数と一致しなければならない．これを見るにはコンパクト化の後，計量 $g_{\mu\nu}$ と $B_{\mu\nu}$ が $4\times 4=16$ 個のスカラー場を出すことに注意する．同様に，$E_8\otimes E_8$ Yang-Mills 場 A_μ^a は $4\times 16=64$ 個のスカラー場を出す．この和は，期待通り 80 個のスカラー場を与える：

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}:&\quad 10\\ B_{\mu\nu}:&\quad 6\\ A_\mu^a:&\quad 64. \end{aligned} \tag{12.9.14}$$

またコンパクト化の過程で残るゲージ群を計算できる．A_μ^a は 16 個のベクトル場を出す．これを，$g_{\mu\nu}$ と $B_{\mu\nu}$ に含まれる 8 個のベクトル場と組み合わせれば，期待通り 24 個の U(1) ベクトル場を得る．

6 次元多様体の小群 $\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)$ を解析することにより，これを全部まとめることができる．いろいろな場が次のように分解できることがわかる：

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}: &\quad (3,3)+4(2,2)+10(1,1) \\ B_{\mu\nu}: &\quad (3,1)+(1,3)+4(2,2)+6(1,1) \\ A^a_\mu: &\quad 16(2,2)+64(1,1) \\ \phi: &\quad (1,1). \end{aligned} \tag{12.9.15}$$

期待通り，$(1,1)$ で記述される 80 個のスカラー場，$(2,2)$ で記述される 24 個のベクトル場およびディラトンがある．

これを K_3 にコンパクト化した IIA 型理論と比べよう．スカラー場の勘定は，

$$R^+ \otimes \frac{\mathrm{SO}(3,19)}{\mathrm{SO}(3)\otimes\mathrm{SO}(19)} \tag{12.9.16}$$

で与えられる K_3 のモジュライ空間を注意深く調べなければならないので，ずっとややこしい．これは $3\times 19=57$ 次元と，空間の体積から来る 1 次元をもつ．したがって，10 次元の計量 $g_{\mu\nu}$ は 6 次元計量と余分の 58 個のスカラー場に分解できる．

同様に A_μ は 1 つのベクトル場を出す．$C_{\mu\nu\rho}$ テンソルは 22 個のベクトルを出す．また 6 次元の $A_{\mu\nu\rho}$ はベクトルとデュアルなので，1 つ余分にベクトル場がある．こうして期待通り $1+1+22=24$ 個の $\mathrm{U}(1)$ ベクトル場がある．

したがって，次のような状態が得られた：

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}: &\quad (3,3)+58(1,1) \\ \phi: &\quad (1,1) \\ A_\mu: &\quad (2,2) \\ B_{\mu\nu}: &\quad (3,1)+(1,3)+22(1,1) \\ C_{\mu\nu\rho}: &\quad 23(2,2). \end{aligned} \tag{12.9.17}$$

したがって，$(1,1)$ で記述される 80 個のスカラー場と，$(2,2)$ で記述される 24 個のベクトル場がある．

最後にコンパクト化の後で，K_3 は超対称性を半分保つことに注意すると，$(2,2)$ ではなく $(1,1)$ が残っている．これは T_4 にコンパクト化したヘテロティック弦に対して見つけた $(1,1)$ 超対称性と一致している．こうして 2 つの理論のフェルミオン場が一致する．

まとめると，2 つの理論の低エネルギー作用は，同じ数の場，同じモジュライ空間をもっており，$\phi\to-\phi$ としたとき非摂動的な関係があることがわかる．

この結果は，スカラー場が張るいろいろな次元の超重力のモジュライ空間を解析することにより一般化できる．超重力理論のこれらのモジュライ空間は，デュアリティー群を不連続にすることにより超弦理論のモジュライ空間に一般化することができると期待される．幸運なことに，いろいろな次元にコンパクト化した 11 次元超重力理論のモジュライ空間は，ずっと前に分類されており，2 つの異なる弦理論の間のデュアルな関係を確立するための第 1 歩となる．したがって，モジュライ空間，超対称性，BPS 状態を比べることにより，たくさんのデュアルな関係を確立することができる．

もっとずっと難しい(そしてもっと面白い)のは，$D=6, N=1$ または $D=4, N=2$ へのコンパクト化であるが，それは現在の研究の最先端である．これらの 2 つの場合の結果は，物理的に重要な $D=4, N=1$ の場合を明らかにするのに役立つであろう．

驚くまでもないが，これらの場合は Calabi-Yau 多様体が入るので非常に面白いことがわかる．

$D = 4, N = 2$ の場合を考える．超対称性を調べると，ヘテロティック弦を SU(2) ホロノミーをもつ 6 次元多様体にコンパクト化するとこの対称性が出ることがわかる．これは 1 つしかなくて，$K_3 \otimes T_2$ である．

ビアンキ恒等式を用いれば

$$dH = \mathrm{Tr}\ F \wedge F - \mathrm{Tr}\ R \wedge R \tag{12.9.18}$$

が示せる．左辺が 0 のとき，右辺を積分すれば，ゲージ群 $E_8 \otimes E_8$ の空間上で定義された第 2 Chern 類 c_2 が，多様体 $K_3 \otimes T_2$ 上で定義された第 2 Chern 類 c_2 の値 24 に等しいことがわかる．この関係をみたすためには，ゲージ群の 24 個のインスタントンがなければならない．1 つの E_8 に対し $12 - n$ 個のインスタントン，別の E_8 に対し $12 + n$ 個のインスタントンが必要である．

この理論は，ある数 n で決まる SU(3) ホロノミーをもつ Calabi-Yau 多様体にコンパクト化した II 型理論にデュアルではないかと思われる．幸運なことに，このような Calabi-Yau 多様体を作る簡単な方法がある．まず，ある種の K_3 多様体が楕円型ファイバー空間，あるいは雑に言えば，底多様体の各点に定義されたトーラス T_2 をもつ多様体として書けることに注意する．今の場合，底多様体は $\boldsymbol{P}_1$ で与えられる．

このとき，ファイバー束の間の次の関係が成り立つ：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_1 \text{ 上の } K_3 &= \boldsymbol{P}_1 \text{ 上の } [\boldsymbol{P}_1 \text{ 上の } T_2] \\ &= [\boldsymbol{P}_1 \text{ 上の } \boldsymbol{P}_1]_n \text{ 上の } T_2 \\ &= \boldsymbol{F}_n \text{ 上の } T_2. \end{aligned} \tag{12.9.19}$$

最後のステップは，底多様体 $\boldsymbol{P}_1$ 上に定義される $\boldsymbol{P}_1$ ファイバーで定義されるファイバー束が Hirzebruch 空間 $\boldsymbol{F}_n$ であることを用いた．こうしてヘテロティック弦を $K_3 \otimes T_2$ にコンパクト化して定義されるインスタントン数が，II 型理論を特別な Calabi-Yau 多様体にコンパクト化したときの Hirzebruch 空間 $\boldsymbol{F}_n$ を指定する指数になる．

したがって

$$S:\ K_3 \otimes T_2 \text{ 上の } E_8 \otimes E_8 \leftrightarrow [\boldsymbol{F}_n \text{ 上の } T_2] \text{ 上の IIA} \tag{12.9.20}$$

を得る．ここで 1 つの E_8 には $12 - n$ 個のインスタントン，別のには $12 + n$ 個のインスタントンがある．

さらに，これらの結果の多くは，コンパクト化したとき IIB 型理論となるような 12 次元の理論が存在すると仮定すれば得られる．ファイバー束を定義する多様体の各点で SL(2, ℤ) 対称性を定義できることを思い出す．したがって，F 理論を楕円型ファイバー空間にコンパクト化したとき IIB 型理論を出す理論として定義する．

以上の関係の多くは次のようにまとめられる：

$$\begin{cases} T_2 \text{ 上の F 理論} & \leftrightarrow \quad \text{IIB} \\ A \text{ 上の F 理論} & \leftrightarrow \quad B \text{ 上の IIB} \\ T_2/\mathbb{Z}_2 \text{ 上の F 理論} & \leftrightarrow \quad SO(32) \\ \text{K}_3 \text{ 上の F 理論} & \leftrightarrow \quad T_2 \text{ 上の } E_8 \otimes E_8. \end{cases} \tag{12.9.-6}$$

A は B の楕円型ファイバー空間である．F 理論が本当に基本的な理論なのかどうかは，これから調べるべき問題である．

参考文献

[1] M. J. Duff, *M-theory (the Theory Formerly Known as Strings)*, hep-th/9608117, 1996.

[2] J. H. Schwarz, *Lectures on Superstring and M Theory Dualities,* T. A. S. I. Summer School, June 1996.

[3] C. M. Hull and P. K. Townsend, *Nucl. Phys.* **B438**, 109 (1995).

[4] P. S. Aspinwall, *K3 Surfaces and String Duality*, hep-th/9611137, 1996.

[5] M. Duff, R. Minasian, and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B465**, 413 (1996).

[6] E. G. Gimon and J. Polchinski, hep-th/9601038.

[7] G. Aldazabal, A. Font, L. E. Ibanez, and F. Quevedo, hep-th/9602087.

[8] D. R. Morrison and C. Vafa, *Nucl. Phys.* **B473**, 74 (1996).

[9] C. Vafa, *Nucl. Phys.* **B469**, 403 (1996).

[10] M. P. Blencowe and M. J. Duff, *Nucl. Phys.* **B310**, 387 (1988).

[11] T. Kugo and P. K. Townsend, *Nucl. Phys.* **B266**, 440 (1983).

第13章

ソリトン, Dブレイン, ブラックホール

13.1 ソリトン

今までわれわれが推測したデュアリティーの関係を証明するのに，BPS 飽和状態が本質的であることを見た．重要な点は，これらの p ブレイン状態をソリトン，(D ブレインと呼ばれる) ソリトン的解，または超対称な解としてすべて構成できることである．ソリトンは，理論の非摂動的構造を調べるのに有力な方法なので，ソリトンまたはソリトン的物体が理論の BPS 状態を与えるのに重要であるのは驚くにあたらない．純粋に弦だけからなる理論から出発したとしても，これらのメンブレイン状態が存在することは，それらが古典的運動方程式の解である以上避けられない．

$D=11$ 超重力から出発すると，メンブレインに対応する古典解を次のように構成することができる．ベクトル $X^M=(x^\mu, y^m)$ を分解して，$\mu=0,1,2$ がメンブレインの座標を表し，$m=3,\ldots,10$ とする．

すると，$D=11$ 超重力の運動方程式は次のメンブレインに対応する計量でみたされる：

$$ds^2=\left(1+\frac{k_3}{y^6}\right)^{-2/3} dx^\mu dx_\mu+\left(1+\frac{k_3}{y^6}\right)^{1/3}\left(dy^2+y^2 d\Omega_7^2\right). \tag{13.1.1}$$

ここで $d\Omega_7$ は S_7 球の体積要素で，4 形式の場の強さは S_7 上の体積要素のデュアルである．(この解は，実は原点で発散していることが示せ，そのことはこの解がおそらく基本解に対応することを示している．)

同様に，$D=11$ 超重力理論の 5 ブレイン解は，ベクトル $X^M=(x^\mu, y^m)$ を分解して，$\mu=0,1,2,3,4,5$ と $m=6,\ldots,10$ とすることによって得られる．計量テンソルは [2]

$$ds^2=\left(1+\frac{k_6}{y^3}\right)^{-1/3} dx^\mu dx_\mu+\left(1+\frac{k_6}{y^3}\right)^{2/3}\left(dy^2+y^2 d\Omega_4^2\right) \tag{13.1.2}$$

で与えられ，4 形式の場の強さは S_4 の体積要素に比例する．(メンブレイン解と違って，5 ブレイン解は原点で有限であり，したがっておそらく基本解ではない．)

このように，p ブレイン状態はいろいろな BPS 状態の不可欠な部分をなす．$D=11$ 超重力理論から出発すると，(代数のセントラルチャージにより要求されるように) 必然的にソリトンまたはソリトン的な解として，メンブレインと 5 ブレイン解が導入さ

れるのである．ここが本質的な点である．M 理論の新しい考え方は，いろいろな弦理論は 1 つの理論の単に異なる真空であるということである．摂動論は各真空の近傍だけを調べるにすぎず，1 つの真空を別の真空に変えたりはできない．しかし，非摂動効果が入れば，必然的に p ブレインが現れる．このように弦理論は，この蜘蛛の巣状のデュアリティーにおける主要な(ちゃんとした摂動論ができる唯一の理論ということ以外の)役割を失うのである．

11 次元で定義された p ブレインを M ブレインと呼ぶ．

さらにこれらの結果は，いろいろな次元の p ブレインに一般化できる [3]．D 次元時空で定義された弦理論でよくある一般的な作用を考えよう：

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^D x\sqrt{-g}\left(R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2(d+1)!}e^{-a(d)\phi}F_{p+2}^2\right). \tag{13.1.3}$$

ここで F_{p+2} は，通常の p ブレインに結合する場に対応する反対称場の強さである．

これを p ブレインに結合させたい．変数 $X_\mu(\xi)$ を導入して，これが p ブレインの世界体積を座標付けしている変数 ξ の関数とする：

$$\begin{aligned} S_p = T\int d^{p+1}\xi\,\Bigg(&\frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ij}\partial_i X^M\partial_j X^N g_{MN}e^{a\phi/(p+1)} + \frac{p+1}{2}\sqrt{g} \\ &- \frac{1}{(p+1)!}\varepsilon^{i_1 i_2\ldots i_{p+1}}\partial_{i_1}X^{M_1}\ldots\partial_{i_{p+1}}X^{M_{p+1}}A_{M_1\ldots M_{p+1}}\Bigg). \end{aligned} \tag{13.1.4}$$

ここで g^{ij} は p ブレインの世界体積上の計量である．第 1 項は南部-後藤の作用を p ブレインに一般化したもので，最後の項は質量 0 の $p+1$ 階反対称場の p ブレインへの結合を表す．

これらの連立方程式を解くために，仮定 $\phi = \phi(y)$ と

$$\begin{aligned} A_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{p+1}} &= -\det{}^{-1}(g_{\mu\nu})\ \varepsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{p+1}} \\ ds^2 &= e^{2A}dx^\mu dx_\mu + e^{2B}dy^m dy^m \end{aligned} \tag{13.1.5}$$

をおく．ここで $\mu = 0, 1, 2, \ldots, p$ は p 世界体積のパラメーターを表し，$m = p+1, p+2, \ldots, D-1$ とした．同様に p ブレインの座標を次のように分解する．$X^M = (X^\mu, Y^m)$，$X^\mu = \xi^\mu$，$Y^m =$ 定数．

すると解は次で与えられる：

$$\begin{aligned} A &= \frac{D-p-3}{2(D-2)}(C - a\phi_0/2) \\ B &= -\frac{p+1}{2(D-p-3)}(C - a\phi_0/2) \\ \frac{a}{2}\phi &= \frac{a^2}{4}(C - a\phi_0/2) + \frac{a}{2}\phi_0 \\ a^2 &= 4 - 2(p+1)(D-p-3)/(D-2) \end{aligned} \tag{13.1.6}$$

および

$$e^{-C} = \begin{cases} e^{-a\phi_0/2} + k/y^{p+1}; & D-p-3 > 0 \\ e^{-a\phi_0/2} - (\kappa^2 T/\pi)\ln y; & D-p-3 = 0\,. \end{cases} \tag{13.1.7}$$

ここで $k=2\kappa^2T/(D-p-3)\Omega_{D-p-2}$，$\Omega_{D-p-2}$ は超球面の体積，ϕ_0 は ϕ の真空期待値である．

これから，たとえば p ブレインの電荷が計算できる：

$$Q_E=\frac{1}{\sqrt{2}\kappa}\int_{S_{D-p-2}} e^{-a\phi}\,{}^*F=\sqrt{2}\kappa T(-1)^{(D-p-1)(p+2)}. \tag{13.1.8}$$

要点は，たとえ弦の理論から出発したとしても，必然的にソリトン的な p ブレインを理論に入れなければならないということである．10 次元より低い次元では，たくさんの p ブレインがあり，したがってその作用や性質を系統的に計算することが大事である．その過程でいろいろ驚くべきことがわかる．

13.2 超メンブレインの作用

運動方程式の古典解としてソリトンを構成することに加え，これらのいろいろな p ブレインの局所超対称作用を構成することができる．

まず p ブレインの物理的自由度を数えてみよう．p ブレインの作用は，座標変換不変性をもつ $p+1$ 次元世界体積に定義されているので，座標 X_μ は $D-p-1$ 個の物理的自由度をもつ．超対称な理論を作るには，これはスピノールの自由度の数と等しくなければならない：

$$D-p-1=\frac{1}{4}MN. \tag{13.2.1}$$

ここで M はスピノールの次元に等しく，N は理論の超対称性の数である．局所的 κ 不変性によってフェルミオン場の数が半分になり，さらに運動方程式をみたす条件から半分になるので，これを 4 で割らなければならない．この関係は，(10 次元の)弦と(11 次元の)メンブレインでは右辺が 8 になるので，容易にみたされる．(しかし，11 次元のメンブレインや 5 ブレインでは，これはみたされないことに注意する．世界体積上のベクトルやテンソルなどの新しい場が，これらの欠点を修正するのに必要になるであろう.)

とくに，次のような解が可能と考えられる [4]：

$$\begin{aligned}
p&=0 \quad & D&=2,3,5,9\\
p&=1: & D&=3,4,6,10\\
p&=2: & D&=4,5,7,11\\
p&=3: & D&=6,8\\
p&=4: & D&=9\\
p&=5: & D&=10\,.
\end{aligned} \tag{13.2.2}$$

超メンブレインの作用を書き下すために [5]，もとの Green-Schwarz の作用を一般化したものから出発する．p 次元のメンブレインの $p+1$ 次元世界体積上に定義された座標 $X_\mu(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{p+1})$ を考える．前と同じに，一般化された微分

$$\Pi_i^\mu=\partial_i X^\mu-i\bar\theta\Gamma^\mu\partial_i\theta \tag{13.2.3}$$

を導入する．ここで θ は D 次元空間で定義されたスピノールである．この組み合わせ

は，大域的な超対称性変換

$$\delta X_\mu = i\bar{\varepsilon}\Gamma^\mu\theta \ ; \qquad \delta\theta = \varepsilon \tag{13.2.4}$$

のもとで不変であることに注意する．

次に作用の最初の部分は南部-後藤の作用の単純な一般化で与えられる：

$$S_1 = -T\int d^{p+1}\sigma\sqrt{-\det \Pi_i \cdot \Pi_j}\,. \tag{13.2.5}$$

S_1 は大域的な超対称性変換のもとで明らかに不変であるが，局所的超対称性変換のもとでは正しく変換せず，フェルミオンとボソンの自由度が一致していない．

この問題を正すために，作用にもう1つの項，Wess-Zumino 項を付け加える．

$$h = \frac{i}{2p!}\Pi^{\mu_p}...\Pi^{\mu_1}d\bar{\theta}\Gamma_{\mu_1\ldots\mu_p}d\theta \tag{13.2.6}$$

で定義される不変 p 形式 h を導入する．

この p 形式 h は前の大域的超対称性変換のもとで不変であることに注意する．h を入れることの利点は，$p-1$ 形式 b を

$$h = db \tag{13.2.7}$$

によって導入できるところにある．ここで $dh=0$ を要求する．$d\Pi^\mu = id\bar{\theta}\Gamma^\mu d\theta$ なので

$$(d\bar{\theta}\Gamma^{\mu_1}d\theta)(d\bar{\theta}\Gamma_{\mu_1\ldots\mu_p}d\theta) = 0 \tag{13.2.8}$$

を得る．

これはさらに，

$$(\Gamma_{\mu_1}\mathcal{P})_{(\alpha\beta}(\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}\mathcal{P})_{\gamma\delta)} = 0 \tag{13.2.9}$$

を与える．ここで θ がカイラルなスピノールであれば，$\mathcal{P}$ はカイラル射影演算子である．$p=1$ の場合は，これからよく知られた制限 $D=3,4,6,10$ が得られ，Green-Schwarz 弦理論となる．しかしこの新しい恒等式は，この恒等式を $(\Gamma^\nu)^{\alpha\beta}$ と縮約することによって得られる新しい制限を出す．少し計算すると，前と同じく $D-p-1=MN/4$ をもう一度得る．

こうして Wess-Zumino 作用は

$$S_2 = -2T\int {}^*b = -\frac{2T}{(p+1)!}\int d^{p+1}\sigma \quad \varepsilon^{i_1\cdots i_{p+1}}b_{i_1\ldots i_{p+1}} \tag{13.2.10}$$

で与えられる．

これを超メンブレインに対して詳しく書くと，Wess-Zumino 項は

$$\begin{aligned} S_2 = -\frac{iT}{2}\int d^3\sigma\,\big\{(\varepsilon^{ijk}\bar{\theta}\Gamma_{\mu\nu}\partial_i\theta)\,\big[\Pi_j^\mu\Pi_k^\nu + i\Pi_j^\mu\bar{\theta}\Gamma^\nu\partial_k\theta \\ -\ (1/3)(\bar{\theta}\Gamma^\mu\partial_j\theta)(\bar{\theta}\Gamma^\nu\partial_k\theta)\big]\big\} \end{aligned} \tag{13.2.11}$$

となる．

さて，この作用が局所超対称であることを確かめよう．今は $\delta\theta$ が決まっていないとすれば

$$\delta b = \frac{1}{p!}\Pi^{\mu_p}...\Pi^{\mu_1} i d\bar{\theta}\Gamma_{\mu_1...\mu_p}\delta\theta \tag{13.2.12}$$

を得る．

$p = 2$ の場合

$$\begin{aligned}\delta S &= 2iT\int d^3\sigma\ \delta\bar{\theta}\left(\sqrt{-g}g^{ik}\Gamma_i - \frac{c}{2}\varepsilon^{ijk}\Gamma_{ij}\right)\partial_k\theta \\ &= iT\int d^3\sigma\ \delta\bar{\theta}(1-c\Gamma)\sqrt{-g}g^{ij}\Gamma_i\partial_j\theta\end{aligned} \tag{13.2.13}$$

を得る．ここで

$$\Gamma_i = \Pi_i^\mu\Gamma_\mu\ ; \qquad \Gamma_{ij} = \Pi_i^\mu\Pi_j^\nu\Gamma_{\mu\nu}\ ; \qquad \Gamma = \frac{1}{6\sqrt{-g}}\varepsilon^{ijk}\Pi_i^\mu\Pi_j^\nu\Pi_k^\rho\Gamma_{\mu\nu\rho} \tag{13.2.14}$$

である．

したがって，

$$c = \pm 1\ ; \qquad \delta\theta = (1\pm\Gamma)\varepsilon(\sigma) \tag{13.2.15}$$

とすれば，$\delta S = 0$ となる．ただし $\frac{1}{2}(1\pm\Gamma)$ は射影演算子である．

重要な点は，南部-後藤の作用に Wess-Zumino 項を入れると作用が局所超対称になり，スピノールの 32 成分の半分を除くことができることである．（スピノールの成分のさらに半分は，質量殻条件をみたすことで除け，ボソン理論の 8 成分と一致する．）

13.3　5 ブレインの作用

状態を数えることにより，5 ブレインがふつうの p ブレインの勘定をみたさないことがわかる．5 ブレイン作用を構成するためには，自己双対なテンソル F_{mnl} で記述される新しい 2 階のテンソルを導入しなければならない．

物理的モードの数を数えよう：

$$(D-p-1) + \begin{pmatrix} p-2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}MN\,. \tag{13.3.1}$$

ここで最初の 2 項は，それぞれ弦と 2 形式の自由度を表す．これの解は $p = 5$ で，5 ブレインを与える．

しかしこれは新しい問題を提起する．というのは一般に伝播する自己双対場の共変な作用を構成するのは，極めて難しいからである．実際いろいろな否定定理があって，ある種の条件下では伝播する自己双対場の共変な作用を構成することは不可能であることが示される．

この長年の懸案の解が提案されているが，無限個の補助場を含む．しかし最近，たった 1 つだけ補助場を含む 5 ブレインのよさそうな作用が書き下された [6–7]．

世界体積上のテンソル場 A_{mn} を考える．その場の強さは $F_{mnl} = 2\,(\partial_l A_{mn} + \partial_m A_{nl}$

$+ \partial_n A_{lm})$ で与えられる．

そのデュアル F^{*lmn} は

$$F^{*lmn} = \frac{1}{6\sqrt{-g}} \varepsilon^{lmnpqr} F_{pqr} \tag{13.3.2}$$

で定義される．

またスカラー場 a（これはゲージ固定で消去される）とテンソル

$$\tilde{F}_{mn} = \frac{1}{\sqrt{(\partial_m a)^2}} F^*_{mnl} \partial^l a \tag{13.3.3}$$

を導入することが重要である．

すると5ブレインの作用のボソン部分は $L = L_1 + L_2$ と書け

$$\begin{aligned} L_1 &= \sqrt{-\det\left(g_{mn} + i\tilde{F}_{mn}\right)} \\ L_2 &= \frac{1}{4} \frac{\sqrt{-g}}{(\partial_l a)^2} F^{*mnl} F_{nlp} \partial a^p \end{aligned} \tag{13.3.4}$$

である．

この作用は反対称テンソルのふつうの変分（小さなパラメーター ϕ_n に対して）

$$\begin{aligned} \delta A_{mn} &= \frac{1}{2} \partial_{[m} a \ \phi_{n]} \\ \delta a &= 0 \end{aligned} \tag{13.3.5}$$

のもとで不変である．これは驚くにあたらない．ふつうでない点は，これが場 a を完全に消すことができるようなゲージ変換の下でも不変である点である：

$$\begin{aligned} \delta A_{mn} &= \frac{\phi}{2(\partial_l a)^2} \left(F_{mnp} \partial^p a - V_{mn}\right) \\ \delta a &= \phi. \end{aligned} \tag{13.3.6}$$

ただし

$$V_{mn} = -2\sqrt{\frac{-(\partial a)^2}{g}} \frac{\delta\sqrt{-\det\left(g_{pq} + i\tilde{F}_{pq}\right)}}{\delta \tilde{F}_{mn}} \tag{13.3.7}$$

である．この最後の変分が，共変な作用を作るのに重要である．場 a は共変性を保つために入れたのであるが，最後は理論の物理的状態からは除きたいからである．

この理論が実際自己双対テンソル場を与えることを確かめるために，平坦な空間で作用をべき展開すると

$$L = \frac{1}{24} F_{lmn} F^{lmn} - \frac{1}{8(\partial a)^2} \partial^m a (F - F^*)_{mnl} (F - F^*)^{nlr} \partial_r a \tag{13.3.8}$$

を得る．これから望みの制限

$$F_{mnl} - F^*_{mnl} = 0 \tag{13.3.9}$$

が出てテンソル F_{mnl} は自己双対であることがわかる．

同様に上の作用はスピノール場 θ を加えれば超対称にできることがわかる．

（今 5 ブレイン解が 2 つの異なる方法で得られた．1 つは低エネルギー作用のソリトン解としてであり，もう 1 つは超対称な作用によってである．しかし，どの拡がった物体が「基本的」で，どれが「ソリトン的」なのかについては混乱がある．これらの違いは原点で発散しているかどうかにある．実はデュアリティー変換のもとで，一方は他方に移せる．たとえば，前に BPS 状態の勘定でカルーツァ-クライン状態と巻き付きモードの両方が必要であることを見たが，後者はソリトン的と考えられている．しかし T デュアリティーにより，巻き付きモードは KK モードに変化するので，何が基本的で何がソリトン的かは趣味の問題になる．しかし，広く用いられている分類では，いろいろな p ブレインの張力を考える．基本的弦の張力は大きさ 1 であり，D ブレインの張力は大きさ $1/g_s$，$D=11$ のソリトン的 5 ブレインの張力は大きさ $1/g_s^2$ である.）

13.4 D ブレイン

最後に D ブレインをもう少し詳しく調べる [8, 9]．この新しい種類の物体を導入するには重要な理由があって，弦理論の非摂動的性質に新しい光があてられた．

まず R-R 背景場に結合する新しい種類の物体が必要であることに注意する．今まで解析してきた弦は，NS-NS 背景場の源としてだけの役割しかもっておらず，R-R 場の源にはならなかった．R-R 場は弦の世界面に結合しない．実際，摂動の任意の次数で弦は R-R 背景場のチャージをもっていない．したがって，D ブレインと呼ばれる R-R 背景場の源となる新しい非摂動的物体が必要になる．

NS-NS 部分からくるテンソル場 $B_{\mu\nu}$ の背景場は II 型理論に直接結合するので，II 型理論はこのテンソル場のチャージをもっていることを思い出そう．しかし，R-R 場はその場の強さのテンソル $F_{\mu_1\cdots\mu_n}$ を通じてのみ弦に結合している．つまり NS-NS と R-R の背景場は，次のような弦との結合をもつ：

$$\varepsilon^{ij}\partial_i X^\mu \partial_j X^\nu B_{\mu\nu}\,; \qquad \bar{S}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_n} S F_{\mu_1\cdots\mu_n}\,. \tag{13.4.1}$$

ここで S は弦の世界面上で定義された標準的なスピン場である．このように弦は R-R 場のチャージをもたない．これは，デュアリティーにより 2 種類のチャージが混ざるので問題になる．たとえば，前に IIB 型弦に 2 つの質量 0 のテンソル場 B と B' があって，デュアリティー群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ によって入れ替わることを見た．しかし IIB 型弦は B' のチャージをもたないので，これはこのチャージを運ぶ新しい物体，D ブレインを導入しないといけないことを意味している．たとえば，$(1,0)$ が，NS-NS 場のチャージ 1 と，R-R 場のチャージ 0 をもつふつうの IIB 型弦とすれば，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 回転により一般に $(1,0)$ 弦は (m,n) 弦に変わるが，これは摂動のどんな有限次数でも決して見えない．

また，低次元ではこのような D ブレインが驚くほどたくさんある．11 次元の超並進代数を解析したとき，$p=2$ と $p=5$ の M ブレインしかなかったことを思い出そう．しかし超並進代数をコンパクト化した場合は，11 次元の $p=2$ と $p=5$ の源は低

次元の非常にたくさんの p ブレインに分解し，そのうち多くのものが D ブレインに対応する．一般に，IIA 型弦理論では偶数次元の D ブレインがあり，IIB 型弦理論では奇数次元の D ブレインがある．

以前に，超 p ブレインの次元を決める簡単な関係があることに注意した．しかし，M ブレインをコンパクト化して得られる D ブレインは，一般にこの関係をみたさない．したがって，p ブレイン場以外に新しいベクトル場を加えて，ブレインスキャンを一般化しなければならない．

$p+1$ 次元世界体積上のベクトル場は，物理的状態に $p-1$ 個の自由度を出す．したがって前の公式 $D-p-1=\frac{1}{4}MN$ を次のように修正しなければならない：

$$\text{D ブレイン：} D-2=\frac{1}{4}MN. \tag{13.4.2}$$

計算から p が落ちたことに注意する．これを，IIA，IIB，I 型弦によって生成される R-R 状態と比べると，D ブレインがそれと完全に一致することがわかる．これにより BPS 状態を完全に数えることができ，デュアリティーの非摂動的解析の無矛盾性の強力なチェックができる．

もともとは，D ブレインは I 型理論の T デュアリティーを解析して発見された．前に標準的 T デュアリティー変換をしたときには，閉弦は閉弦に写像された．T デュアリティー変換のもとで

$$X_\mu(z)+X_\mu(\bar{z}) \to X_\mu(z)-X_\mu(\bar{z}) \tag{13.4.3}$$

であった．T デュアリティーは単に異なる閉弦の真空を結びつけたにすぎなかった．しかし，I 型開弦に T デュアリティー変換をしようとすると，境界条件がまずいことがわかる．とくに開弦の端のノイマン境界条件は，デュアリティー変換の後で，ディリクレ境界条件になる．

μ 方向をコンパクト化しよう．X_μ の標準的な開弦の展開は，次のように $\hat{X}_\mu$ に変化する：

$$X_\mu = x_\mu - i\alpha' p_\mu \ln z\bar{z} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{m\neq 0}\frac{\alpha_{m,\mu}}{m}\left(z^{-m}+\bar{z}^{-m}\right) \tag{13.4.4}$$

$$\hat{X}_\mu = \hat{x}_\mu - i\alpha' p_\mu \ln\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{m\neq 0}\frac{\alpha_{m,\mu}}{m}\left(z^{-m}-\bar{z}^{-m}\right). \tag{13.4.5}$$

言い換えると，X_μ のノイマン境界条件は，$\hat{X}_\mu$ に対するディリクレ境界条件になる：

$$\partial_\sigma X_\mu = 0 \to \partial_\tau \hat{X}_\mu = 0, \tag{13.4.6}$$

または端点で，$\hat{X}_\mu=0$．ただし $\hat{X}_\mu$ はデュアルな弦である．

したがって，開弦とデュアルなものは，端点が固定された開弦である．26 次元のボソン弦の場合，これはデュアルな開弦の端点が固定された 24 + 1 次元の超平面にあることを意味する．しかし弦理論は量子重力の理論であるから，理論の力学により最終的にはこの超平面も時間とともに動くことになる．したがって新しい物体を導入しな

ければならない．それが，弦がひっつくことのできる新しい種類の p ブレイン，ディリクレブレインまたは D ブレインである．

$\hat{X}^{25}$ が，25 番目の座標についてディリクレ境界条件をみたす T デュアルした弦とする．積分

$$\int d\sigma\ \partial_\sigma \hat{X}^{25} = \hat{X}^{25}(\pi) - \hat{X}^{25}(0) = 2\pi\alpha' p^{25} = 2\pi\alpha' n/R = 2\pi n\hat{R} \qquad (13.4.7)$$

をする．ここで $\hat{R} = \alpha'/R$ を用いた．しかしデュアルな理論に対して 25 番目の座標をコンパクト化しているので，これは弦の両端が同じ D ブレイン上にあることを意味する．これは任意の場合に一般化できる．全体の次元 D のうち k 個がコンパクト化しているとすれば，T デュアリティーにより Dp ブレイン $(p = (D-1-k))$ が得られる．

T デュアリティーはノイマン境界条件をディリクレ条件に変えることに注意する．これはさらに，T デュアリティーが IIA と IIB 型理論の D ブレインの性質をどのように変えるかも示している．前に IIA (B) 弦理論には偶数（奇数）の Dp ブレインがあることを見た．もし T デュアリティー変換をすれば，偶数と奇数の p ブレインは互いに移り変わらなければならない．これは次のようにして起こる．IIA 理論から出発して 1 次元をコンパクト化し，T デュアリティー変換をして D ブレインが円周に巻き付いていたとすると，開弦の 1 つのノイマン境界条件がディリクレ境界条件に変わり，したがって D ブレインの世界体積の次元が 1 減る．こうして，T デュアリティーにより，偶数と奇数の D ブレインの間を行ったり来たりできる．

さて，Chan-Paton 因子をもつ開弦を考えよう．たとえば，開弦は各端点に荷電スピン行列をもてるので，I 型弦は O(32) 対称性をもてたことを思い出す．頂点関数は，陽にリー代数の行列 λ^a_{ij} をもっており，散乱振幅がこれらの行列のトレース Tr $\lambda^a\lambda^b\lambda^c\lambda^d$ を含む．ゲージ場があると，運動量に対するふつうのカルーツァ-クラインの公式 $p = n/R$ が大きく変更されることを後で見る．

質量 0 の場，U(N) Yang-Mills 場があるときの開弦の運動を考える．Yang-Mills 場が単なるゲージ $A_\mu = -iU^{-1}\partial_\mu U$ になっていて

$$U = \mathrm{diag}\left(e^{iX^{25}\theta_1/2\pi R}\ , \ldots,\ e^{iX^{25}\theta_N/2\pi R}\right) \qquad (13.4.8)$$

となっている古典的配位を選ぶ．ここで U は対角的な $N \times N$ の行列であるが，対角部分は異なる値 $e^{iX^{25}\theta_i/2\pi R}$ をとるとする．この古典的配位があると，U(N) 対称性が $\mathrm{U}(1)^N$ に破れる．

U は変換 $X^{25} = X^{25} + 2\pi R$ のもとで周期的でないことに注意する．実際 U には余分の位相因子がつく：

$$U \to \mathrm{diag}\left(e^{i\theta_1}\ , \ldots,\ e^{i\theta_N}\right) U\,. \qquad (13.4.9)$$

さてこの位相の変化が弦のベクトルの頂点に及ぼす影響を考える．弦は Chan-Paton 因子のラベル $|ij\rangle$ をもっており，これらの指数は $U(N)$ の基本表現であるから，$i = 1, 2, \ldots, N$ をとる．i 番目の要素は位相 $e^{i\theta_i}$ を得，j 番目の要素はその複素共役 $e^{-i\theta_j}$ を得るので，頂点関数は位相

$$|ij\rangle \to e^{i(\theta_i - \theta_j)}|ij\rangle \qquad (13.4.10)$$

を得る．

ベクトル状態 $|ij\rangle$ はそれに付随した運動量 p^{25} ももち，それが $X^{25} \to X^{25} + 2\pi R$ のもとで位相を得る．ふつうは運動量 p をもつ状態は，$x \to x + a$ のもとで位相因子 e^{ipa} を得る．したがって，ゲージ場によって加わる位相は運動量に余分の $\theta_i/(2\pi R)$ を加えることになることがわかる．

こうして，頂点関数の可能な運動量は

$$p^{25} = (2\pi n + \theta_j - \theta_i)/(2\pi R) \tag{13.4.11}$$

に等しくなる．

開弦がどこで終わりうるかを決めるために，積分 $\int d\sigma\ \partial_\sigma X^{25}$ を考える．

$$X^{25}(\pi) - X^{25}(0) = (2\pi n + \theta_j - \theta_i)\hat{R} \tag{13.4.12}$$

となるので，開弦はもはや同じ D ブレインの上から始まり終わる必要はない．$\theta_i \hat{R}$ の位置にある N 個の異なる平行な D ブレインから出たり終わったりする開弦があり，それらが D ブレインを結ぶ網を作る．これから出るゲージ群は U(N) ではなく U(1)^N である．

しかし，U(N) 不変性を回復することが可能である．D ブレインをゆっくり別の D ブレインに融合させる．すると $\theta_i \to \theta_j$ であり，完全な U(N) 対称性が回復する．ベクトル状態 $|ij\rangle$ は荷電スピン変換から位相因子をもらわなくなるからである．

この U(N) 対称性の回復は，弦のスペクトルを解析しても見える．ふつうは開弦のスペクトルは

$$M^2 = (p^{25})^2 + \left(\frac{(2\pi n + \theta_j - \theta_i)\hat{R}}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}(\mathcal{N} - 1) \tag{13.4.13}$$

で与えられる．ここで $\mathcal{N}$ は調和振動子の数演算子である．$\mathcal{N} = 1$ で $n = 0$ の最低状態を解析すると，$\theta_i \to \theta_i$ のとき，新しい質量 0 のベクトル状態が現れ，それが完全な U(N) ゲージ場のスペクトルを完成するのに必要なものであることがわかる．

こうして超平面が離れていれば，各超平面ごとに N 個の質量 0 のベクトル場が得られる．しかし超平面が集まると，質量 0 のベクトルの数は N^2 になり，U(N) 対称性が出る．ここでの教訓は，N 個の平行で異なる D ブレインのゲージ群は U(1)^N であるが，D ブレインが集合したときには U(N) になるということである．これは N 個の D0 ブレインを議論するときに重要になる．

13.5　D ブレインの作用

D ブレインの作用もいくつかの方法で作ることができる．

まず，有効低エネルギー作用を見つけるときにふつうの閉弦理論で使ったのと同じ方法を繰り返してみることができる [9]．開弦を取り扱っているので，質量 0 の部分はベクトルとスピノールである．弦の背景ベクトル場への結合は，次の境界項で与えられる：

$$S = \int ds \sum_{m=0}^{p} A_m(x^0, ..., x^p)\partial_t X^m + \int ds \sum_{i=p+1}^{25} A_i(x^0, ..., x^p)\partial_n \hat{X}^i. \quad (13.5.1)$$

ここで質量 0 のベクトル場は p ブレインを記述する座標 $x^0, \ldots, x^p$ だけに依存する．i のついた座標をコンパクト化する．1 つ重要な点は，A_i がブレインの外方向へのゆらぎを記述することである．このため，p ブレインは固定された超平面ではなく，力学的なものになる．前のように，重い弦のモードを積分してしまうと，ベータ関数の関係

$$\beta = 0 \quad (13.5.2)$$

を得る．こうして得られた理論は共形不変でなければならないので，これらのベータ関数方程式を質量 0 の場の運動方程式として扱うことができる．そのとき D ブレインの作用は，$\beta = 0$ の式が運動方程式として出るようにとる．

これらの手順を具体的に遂行して，D ブレインの作用としてディラック-ボルン-インフェルト(Dirac-Born-Infeld)作用

$$T \int d^{p+1}\sigma \sqrt{-\det\,(G_{ij} + F_{ij} - B_{ij})} \quad (13.5.3)$$

を得る．ここで f^μ がディリクレ条件の場合の p ブレインの境界における X^μ の値を表すとしたとき，G と B はメンブレイン面への引き戻し(pull-back)から構成されるふつうの項，すなわち $G_{ij} = \partial_i f^\mu \partial_j f^\nu g_{\mu\nu}$ である．

作用を構成するさらに別の方法があって，こちらの方がもっと直接的である．M 理論の $p = 2$ M ブレイン作用をとって，それの次元を 1 次元落とす [10, 11]．そうして得られる 10 次元の理論は，ふつうの IIA 弦理論と $p = 2$ メンブレイン，すなわち D ブレインの両方を含まなければならない．したがって，11 次元の超メンブレインのコンパクト化から生じるカルーツァ-クラインモードが，10 次元の D2 ブレインになる．

11 次元の平坦な空間における超メンブレイン作用は，$g^{ij}\Pi_i^M \Pi_{j,M}$ という項を含む．ここで M は 11 次元の添え字である．11 番目の次元を別扱いして $\phi = X_{11}$ を定義すれば，

$$g^{ij}\Pi_i^M \Pi_{j,M} \to g^{ij}\Pi_i^\mu \Pi_{j,\mu} + ig^{ij}\left(\partial_i\phi - i\bar{\theta}\Gamma_{11}\partial_i\theta\right)\left(\partial_j\phi - i\bar{\theta}\Gamma_{11}\partial_j\right) \quad (13.5.4)$$

を得る．さてここで $\partial_i\phi$ をベクトル場 L_i と置き換えたい．これは作用にラグランジュ未定乗数場 A_j を付け加えることによってできる：

$$\varepsilon^{ijk} A_i \partial_j L_k \,. \quad (13.5.5)$$

作用から A_i 場を消去すれば，拘束 $\partial_i L_j - \partial_j L_i = 0$ が課され，これは $L_i = \partial_i\phi$ によって解けるので，あらゆるところで $\partial_i\phi$ を L_i で置き換えることができる．

A_i を消去すればもとの作用を回復するので，今までのところは理論を変更していない．ここで A_i のかわりに L_i を消去してみよう．そのために考えるべき作用の中の項は

$$\varepsilon^{ijk} A_i \partial_j L_k + g^{ij} L_i L_j + \cdots \quad (13.5.6)$$

である．作用から L_i を消去すると U(1) マクスウェル項

$$F(A)_{ij}F_{kl}(A)g^{ik}g^{jl} \tag{13.5.7}$$

を得る．

以上をすべて合わせれば

$$\begin{aligned} S = &-\frac{1}{2}\int d^3\sigma\sqrt{-g}\left[g^{ij}\Pi_i^{\mu}\Pi_{j,\mu} + \frac{1}{2}g^{ik}g^{jl}\hat{F}_{ij}\hat{F}_{kl} - 1\right] \\ &- \frac{1}{6}\int d^3\sigma\varepsilon^{ijk}\left[b_{ijk} - 3i\bar{\theta}\Gamma_{11}\partial_i\theta\hat{F}_{jk}\right] \end{aligned} \tag{13.5.8}$$

を得る．ここで

$$\hat{F}_{ij} = F_{ij} - b_{ij} \tag{13.5.9}$$

であり，b_{ijk} と b_{ij} は，$\partial_i X_{11}$ の成分を除いたメンブレインの作用にある b_{ijk} から生じる Π と θ の複雑な関数である．

まとめると，D ブレインの作用は，ふつうの南部-後藤の作用に余分な U(1) マクスウェル場のテンソルを付け加えたものである．それはボルン-インフェルト作用の構造をもっている．

前の計算は平坦な空間で，フェルミオン場も入れて計算した．もっと面白いのは D ブレインが背景場のある中を運動するときである．背景場のあるときに(フェルミオン場を 0 として)同じ計算ができる．そうすると，ボソンの作用として

$$-T\int d^{p+1}\sigma\sqrt{-\det\ (G_{ij} + F_{ij} - B_{ij})} \tag{13.5.10}$$

を得る．ここで G と B はメンブレイン面への引き戻しから作られるふつうの項，すなわち $G_{ij} = \partial_i X^{\mu}\partial_j X^{\nu} g_{\mu\nu}$ である．(前に作用のこの項は，有効場の理論の形式におけるディリクレ境界項 f^{μ} の関数であることを見つけた．この形式では，これが p ブレインの座標 X^{μ} に変換されていることがわかる．)

$F_{ij} - B_{ij}$ がこの特別な組み合わせで現れることは，B 場のゲージ変換がふつうは 0 になるのに，今の場合境界項をひろうので，ベクトル場の対応する変化でうち消さなければならないことから理解できる：

$$\begin{aligned} B_{ij} &\to B_{ij} + \partial_i\chi_j - \partial_j\chi_i \\ A_i &\to A_i - \chi_i\,. \end{aligned} \tag{13.5.11}$$

D ブレインのもっとも直接的な応用は，円周にコンパクト化した M 理論が IIA 型弦理論と同等であるという証明を解析することである．証明に重要だったのは，コンパクト化した M 理論から出るカルーツァ-クラインモードが 10 次元の BPS 飽和モードに対応しているということであった．以前に 11 次元の運動量が

$$p_{11} = \frac{N}{R} \tag{13.5.12}$$

と量子化することを見た．$N = 0$ の項はふつうの弦に対応しており，$N = 1$ は 1 つの D0 ブレインに対応しており，より大きな N のモードは D0 ブレインの束縛状態に対応していた．

さて N 個の平行で平坦な D ブレインに，それらの各対の間に開弦がくっついている場合を考えよう．開弦の各端は，それに付随した U(1) ゲージ場をもつ．N 個の平行な D ブレインを徐々に 1 つの超平面にゆっくり融合させる．すると余分な質量 0 のベクトルボソンが出てきて，U(N) に基づいたゲージ理論となる．

さて $\beta=0$ の条件を用いて D ブレインの作用をもう一度計算してみよう．もしブレインが大きく離れていれば，ふつうの U(1) ディラック-ボルン-インフェルト作用を得る．しかし今同じ $\beta=0$ の計算をして，D ブレインをゆっくり一致させる．すると一致した D ブレインが 10 次元 U(N) 超対称 Yang-Mills 理論を D ブレインの $p+1$ 次元空間に落としたもの

$$S=T\int d^{p+1}\sigma \;\; \mathrm{Tr}\;\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+i\bar{\Psi}\Gamma^{\mu}D_{\mu}\Psi\right)+\cdots \tag{13.5.13}$$

で記述されることがわかる．(一般に，場の強さ F とその微分の高次のべきを含む他の項がありうる．) 場は 10 次元空間全部ではなく，$p+1$ 個の変数の関数であることに注意する．これはこれらの項の多くが落ちることを意味する：

$$F_{mn}=\partial_m A_n-\partial_n A_m+i[A_m,A_n] \tag{13.5.14}$$

$$F_{mj}=\partial_m X_j+i[A_m,X_j] \tag{13.5.15}$$

$$F_{ij}=i[X_i,X_j]\,. \tag{13.5.16}$$

ここで i,j はモード $p{+}1,p{+}2,\ldots,9$ を表し，p ブレインのモードは $m,n=0,1,2,\ldots,p$ で表される．

点粒子を表す $p=0$ の場合を考える．D0 ブレインの場合，これはすべてのメンブレイン座標が 1 つを除いてなくなることを意味する：

$$\begin{cases} F_{ij}=i[X_i,X_j] \\ F_{0j}=D_0X_i=\partial_0X_j+i[A_0,X_j] \\ D_j\theta=i[X_j,\theta] \\ D_0\theta=\partial_0\theta+i[A_0,\theta]\,. \end{cases} \tag{13.5.17}$$

したがって作用は

$$S=T\int dt \;\; \mathrm{Tr}\;\left(\frac{1}{2}(D_0X^i)^2-i\theta^T D_0\theta+\frac{1}{4}\left([X^i,X^j]\right)^2+\theta^T\gamma^j[X_j,\theta]\right) \tag{13.5.18}$$

となる．

この U(N) 作用の驚くべき特徴は，多重 Dp ブレイン散乱振幅を記述することができることである．超 Yang-Mills 理論の行列がブロック対角形で，対角にいろいろな U(N_i) 行列がある形になっていれば，理論は簡単に一連の相互作用しない U(N_i) D ブレイン理論に分解する．したがって，群の行列の非対角部分は，D ブレインの間の相互作用に対応する．同じ超 Yang-Mills 理論が，それ自身必ずしも重なっていないいくつかの D ブレインの相互作用を記述できるのは少し奇妙に思える．

13.6 行列模型とメンブレイン

D ブレインの物理のもっとも重要な応用の 1 つは，M 理論の性質を明らかにすることである．以前に，M 理論は 2 ブレインや 5 ブレインがあって複雑であると言った．しかし M 理論の性質についてもっとも驚くべき予測の 1 つは，ある極限ではそれが D0 ブレインで表される単純な行列模型に帰着するというものである．

円周にコンパクト化した M 理論が IIA 弦理論に S デュアルであることを以前に見た．11 次元の超並進代数は p_M の項を含んでいるが，これは円周にコンパクト化した後 p_μ と Z になる．Z は，N を整数として，カルーツァ-クライン量子化条件

$$p_{11} = \frac{N}{R} \tag{13.6.1}$$

で与えられる IIA の D0 ブレインのチャージに対応することに注意する．前に見たように，コンパクト化した 11 次元 M 理論のカルーツァ-クライン状態は，非摂動的な 10 次元の D0 ブレインと同等である．

ここで運動量が無限大の極限，すなわち $Z = p_{11} \to \infty$ をとる．この場合，D0 ブレインの項が超並進代数の中の他の項より大きくなって，理論は D0 ブレインの理論に帰着する．さらに，この運動量無限大の極限は，$N \to \infty$ と $p_{11} \to \infty$ の極限をとって実現できる．

1 つの D0 ブレインは $1/R$ の運動量をもち，N 個の(重なっていない) D0 ブレインの束縛状態は運動量 N/R をもつことに注意する．さらに，この N 個の D0 ブレインの束縛状態は超対称な量子力学(量子場の理論ではない)で記述されることが示せる．

弦の状態は $N = 0$ に対応する．これは弦はセントラルチャージ Z で表される R-R 場の源になれないからである．

こうしてわれわれは次の推測に導かれる [13, 14]．

推測： M 理論の運動量無限大の極限は，U(N) 超対称 Yang-Mills 理論で与えられる N 個の重なった D0 ブレインの $N \to \infty$ 極限と同等である．

M 理論の完全な作用はまったくわからないので，そのような複雑な理論が(この極限で)そのように簡単な理論，すなわち大きな N の点粒子超対称 Yang-Mills 理論で表現できるとは，ほとんど奇跡としか思えない！ しかし物理が運動量無限大の極限で簡単になるということが，何年も前にこれが導入された理由の 1 つである．多くのファインマン図が $p_{11} \to \infty$ とともに，$1/p_{11}$ のように 0 になる．

たとえば，真空から生成された粒子に対応するファインマン図は，運動量無限大の極限で小さくなる．これは，この極限で真空が自明になることを意味する．さらに，運動量無限大の極限のファインマン図は，非相対論的場の理論に見つかる「旧式の」摂動論に似ている．今の目的には，D0 ブレイン以外のいろいろなものを含むファインマン図は，運動量無限大 $p_{11} \to \infty$ の極限で $1/p_{11}$ のように小さくなることを使う．とくに，弦は R-R 場のチャージをもっていないので，$p_{11} = 0 = N$ であり，運動量無限大の極限で小さくなる．

これを見るために，$\mathbf{p}_a$ を粒子の集合の運動量とする．これらのベクトルの和を $\mathbf{P}$

とする．すると各運動量 $\mathbf{p}_a$ は

$$\mathbf{p}_a = \eta_a \mathbf{P} + \mathbf{p}_{\perp a} \tag{13.6.2}$$

と分解でき，

$$\sum_a \eta_a = 1\ ; \quad \sum_a \mathbf{p}_{\perp a} = 0\ ; \quad \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_{\perp a} = 0 \tag{13.6.3}$$

をみたすようにとることができる．今粒子の系をブーストして，$\mathbf{P} \to \infty$ としよう．十分大きな $\mathbf{P}$ に対して，すべての η_a が正であることがわかる．

P を大きくする極限をとる要点は，エネルギーを

$$\begin{aligned} E_a &= \sqrt{\mathbf{p}_a^2 + m^2} \\ &= \eta_a|\mathbf{P}| + \frac{\mathbf{p}_{\perp a}^2 + m_a^2}{2\eta_a|\mathbf{P}|} + \mathcal{O}(P^{-2}) \end{aligned} \tag{13.6.4}$$

のように書けることにある．

運動量無限大の極限で理論に現れるファインマン図を解析しよう．共変な伝播関数が，非相対論的摂動論に見られる非相対論的エネルギー分母に似ていることがわかる．エネルギーの差に注目しよう．

もし 2 つの粒子が正の同じ η_a をもっていれば，そのエネルギー差は $1/|\mathbf{P}|$ のように 0 にいくことがわかる．しかし正の η_a をもつ粒子と，負の η_a をもつ別の粒子（これは場の理論ではすべての運動量について積分しなければならないために存在する）の間のエネルギー差に何が起こるかを解析してみよう．エネルギー差は $|\mathbf{P}|$ のようになる．したがって，このエネルギー分母は $1/|\mathbf{P}| \to 0$ のように 0 になり，$\eta_a < 0$ をもつ粒子は理論から落ちてしまう．こうしてわれわれの結論は，負または 0 の η_a をもつ状態は，理論から落ちてしまうようなエネルギー分母をもつということになる．しかし，行列理論では，正の η_a をもつ状態は，$N > 0$ の運動量 $p_{11} = N/R$ をもつ状態しかない．こうして運動量無限大の極限の M 理論は，正の η_a をもつ粒子，すなわち正の p_{11} をもつ D0 ブレインの系に帰着する．一方，これらの状態は，D ブレインの世界体積上に定義された超 Yang-Mills 理論で記述される．η_a が 0 か負の状態は，弦の状態か反 D ブレインであり，これらは無限大のエネルギー分母のために理論から落ちてしまう．

この極限で 1 つ自明でないことは，弦や反 D ブレインを含む状態は正の η_a をもたないので落としてよいのだが，理論はこれらの粒子が M 理論にあることを「知っている」ことである．

超 Yang-Mills 理論は 10 次元でのみ定義されているのに，この理論の $N \to \infty$ の極限が 11 次元の理論（M 理論）を出すことは，非常にすばらしいことである．何らかの方法で，$N \to \infty$ の極限が 11 番目の次元を出すと理解される．

Yang-Mills 場は 16 個のフェルミオン場を含むので，この簡単だが自明でない推測の証拠を得ることができる．フェルミオン場の組み合わせを作ると，$2^8 = 256$ 個の状態ができ，それはまさに $D = 11$ 超重力理論で見つかった状態の数である．

また D0 ブレインの散乱を調べると，この推測の納得のいく証明が得られる．これ

が11次元の超グラビトンの散乱を正確に再現することが示せるが [15–18]，それは非常に非自明な結果である．

たとえば，散乱が8番目と9番目の空間方向に起こるとする．ここで8は水平軸を表し，9は垂直軸を表すとする．衝突の前は，2つの粒子が8にそった2つの平行な水平な経路にそってやってくるとする．それらは相対速度 v で互いに向かって動いている．しかしそれらの軌跡は垂直方向にずれており，衝突パラメーターは9方向に b である．8-9平面におけるこれらの2つのD0ブレインの距離は，$r \equiv \sqrt{(vt)^2 + b^2}$ で与えられる．

荷電スピン空間で，X は 2×2 の行列で，対角要素は2つのD0ブレインの位置を表す．$X^i = B^i + \sqrt{g} Y^i$ と書いて，B^i は2つの古典的D0ブレインの位置を表し，Y^i が2つのD0ブレインの量子的なゆらぎを表すとする．対角要素 B_{11} が1つのD0ブレイン，B_{22} が別のを表すとする．このとき

$$B^8 = \begin{pmatrix} vt/2 & 0 \\ 0 & -vt/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} vt\sigma_3; \quad B^9 = \begin{pmatrix} b/2 & 0 \\ 0 & -b/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} b\sigma_3 \tag{13.6.5}$$

である．座標が群 $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$ の 2×2 の行列なので，σ_3 はパウリ行列を表す．B^i の他の成分は0にする．

さて超 Yang-Mills 作用を古典的配位 B のまわりにべき展開しよう．Y で書かれた次の作用を得る：

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_Y = i \int d\tau \biggl(& \frac{1}{2} Y_1^i (\partial_\tau^2 - r^2) Y_1^i + \frac{1}{2} Y_2^i (\partial_\tau^2 - r^2) Y_2^i + \frac{1}{2} Y_3^i \partial_\tau^2 Y_3^i \\ & - \sqrt{g} \varepsilon^{a3x} \varepsilon^{cbx} B_3^i Y_a^j Y_b^i Y_c^j - \frac{g}{4} \varepsilon^{abx} \varepsilon^{cdx} Y_a^i Y_b^j Y_c^i Y_d^j \biggr) . \end{aligned} \tag{13.6.6}$$

B_i は弦の古典的な位置を表すので，それは量子場 Y^i で表された作用の質量項にだけ寄与する．したがって，この式の第1行は Y^i の運動項と質量項を与える．

A をゲージ場の第0成分とすれば，同様にこの項に対する作用が書ける：

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_A = i \int d\tau \biggl(& \frac{1}{2} A_1 (\partial_\tau^2 - r^2) A_1 + \frac{1}{2} A_2 (\partial_\tau^2 - r^2) A_2 + \frac{1}{2} A_3 \partial_\tau^2 A_3 \\ & + 2\varepsilon^{ab3} \partial_\tau B_3^i A_a Y_b^i + \sqrt{g} \varepsilon^{abc} \partial_\tau Y_a^i A_b Y_c^i \\ & - \sqrt{g} \varepsilon^{a3x} \varepsilon^{bcx} B_3^i A_a A_b Y_c^i - \frac{g}{2} \varepsilon^{abx} \varepsilon^{cdx} A_a Y_b^i A_c Y_d^i \biggr) . \end{aligned} \tag{13.6.7}$$

B^i の古典的な値をこれらの2つの方程式に代入して，Y^i と A で与えられる質量をもったボソン場による作用の自由場部分を読みとることができる．ゲージ場 Y^i と A の各々に，3つの荷電スピン成分があり，そのようなゲージ場が10個あるので，全部で30個のボソン場がある．質量行列を対角化してやると，次のようなボソンとフェルミオンの場があることがわかる．

- 質量 r^2 の16個のボソン，
- 質量 $r^2 + 2v$ の2個のボソン，

- 質量 r^2-2v の 2 個のボソン，
- 質量 0 の 10 個のボソン，
- 質量 r^2+v の 8 個のフェルミオン，
- 質量 r^2-v の 8 個のフェルミオン，
- 質量 0 の 8 個のフェルミオン，
- 質量 r^2 の 2 個の複素ゴーストボソン，
- 質量 0 の 1 個の複素ゴーストボソン．

質量 $r^2+\alpha$ の複素ボソン場を積分してしまうと，経路積分に次の行列式が生じる：

$$D_\alpha = \det\left(-\partial_\tau + r^2 + \alpha\right). \tag{13.6.8}$$

これらの重い場をすべて含めることにより，汎関数積分が行列式

$$D_{\text{tot}} = D_0^{-6} D_{2v}^{-1} D_{-2v}^{-1} D_v^4 D_{-v}^4 \tag{13.6.9}$$

を含むことがわかる．

$D^{-1}=e^{-\log D}$ によって，各 D を経路積分の作用の中に入れることができる．そうすると，有効作用は，

$$S \to S - \log D_{\text{tot}} \tag{13.6.10}$$

と修正される．

散乱過程のポテンシャルを

$$\log D_{\text{tot}} = \int d\tau V_{\text{eff}}(b^2 + v^2\tau^2) \tag{13.6.11}$$

によって定義する．

以上をすべてまとめれば，少し計算した後

$$V_{\text{eff}} = -\frac{15v^4}{16r^7} + \mathcal{O}\left(\frac{v^6}{r^{11}}\right) \tag{13.6.12}$$

を得る．

さらにこれは，ちょうどふつうの超重力の散乱で得られる数であり，この形式が正しいことに確信を与えてくれる．実はこの計算は 2 ループまでなされており，超重力の結果と完全に一致している [18].

一般の p ブレインの散乱の場合，

$$V_{\text{eff}} = -\frac{av^4}{r^{7-p}} + \mathcal{O}\left(\frac{v^6}{r^{11-p}}\right) \tag{13.6.13}$$

が得られている．

この公式はいくつかの面白い結果を与える．ポテンシャルが速度だけの関数で，速

度が0のときは0になることに注意する．これは，2つの静的なDブレインの間の「力が働かない」条件を再現しており，ソリトンの理論でしばしば見出されることである．たとえば，2つのDブレインを表す2つの平行で静的な超平面をとり，それらの間の相互作用を計算するには，この2つの超平面を結ぶ開弦のゆらぎについて和をとる．超対称性のために，ボソンとフェルミオンの弦のモードが互いにうち消しあって，2つの静的な超平面Dブレインの間には力が働かないことがわかる．

もっと重要なのは，Dブレインが調べることのできる有効距離が速度に比例していることである．これはDブレインがふつうの弦よりもずっと短い距離まで調べられることを意味している．ふつうの弦はプランク長さより短い距離は調べられないと考えられている．Tデュアリティーのために，新しい「不確定性原理」があってプランク長さより短い距離を調べることはできないと主張することができる．このため究極的な長さ，すなわちプランク長さがあって，それより短い距離の物理は調べられないという人たちもいる．

しかし，Dブレインの散乱ポテンシャルの速度依存性を見ると，低い速度ではプランク長さよりずっと短い距離を調べることができそうである．たとえば，上に与えた散乱ポテンシャルから，散乱の衝突パラメーターを求めることができるが，それは$\sqrt{v}$の大きさである．したがって，Dブレインの調べる有効距離は速度の平方根のように小さくなる．このことが，Dブレインがより深い物理的な意味をもっていることを意味しているかどうかは，今後の課題である．

最後に，M理論にある11次元のメンブレインがD0ブレインの集合と見なせることが，行列模型の推測の証拠と考えられる．11次元のメンブレインをうまく量子化する方法がわからなかったことが，1980年代にメンブレインが捨てられたいろいろな理由の1つなので，これはすばらしいことである．とくに，メンブレインの作用は(相互作用なしでも)高度に非線形で，量子化が難しい．もっと悪いのは，ハミルトニアンに安定な状態は存在せず [19]，作用は紫外発散くりこみ不可能でもある．これらの理由のために，11次元メンブレイン理論は基本的な理論というよりは，変なものと考えられた．

11次元のメンブレイン理論の新しい解釈は，D0ブレインの大きなNの極限で生じるというものであり，したがってメンブレイン理論の問題が原理的にはまったくない．

pブレイン作用を量子化しよう．これは弦のときと同様に1次形式または2次形式によってできる．1次形式では，X_μだけで定義された南部-後藤の作用から始める．正準運動量を

$$P^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{X}_\mu} \tag{13.6.14}$$

により定義する．具体的に計算することにより，P^μが次の拘束を正確にみたすことがわかる：

$$\begin{aligned} P^\mu \partial_a X_\mu &= 0 \\ P_\mu^2 &= T^2 \det \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \, . \end{aligned} \tag{13.6.15}$$

ここで$a = 1, 2, ..., p$である．これは系のハミルトニアンが0であること，すなわちそ

れが完全に次の拘束の和になっていることを示している：

$$H = \lambda_0 \left(P_\mu^2 + T^2 \det \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \right) + \lambda_i P^\mu \partial_i X_\mu \,. \tag{13.6.16}$$

グプタ-ブロイラー形式では，$\lambda_i = 0$ と $\lambda_0 = 1$ とすることができる．こうして得られるハミルトニアンの問題は，それが弦の変数について 4 次であることである．これがメンブレインの量子化が M 理論の難しい問題の 1 つとして残っている主要な理由である．

4 次の相互作用の問題は，光錐ゲージなどのどんなゲージでも残る．たとえば，2 次形式では世界体積の計量 g_{ab} の寄与を入れる．0 番目の時間を分離して世界体積の計量を分解する．$a, b = 1, 2, \ldots, p$ が世界体積の空間的添え字を表し，$i, j = 0, 1, 2, \ldots, p$ がふつうの世界体積の添え字を表すとする．すると

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \omega^{-2}[-h + h_{ab}u^a u^b] & -\omega^{-1}h_{ab}u^b \\ -\omega^{-1}h_{ab}u^b & h_{ab} \end{pmatrix}. \tag{13.6.17}$$

ここで，h_{ab} は 2×2 の空間的座標の計量を表す．g_{ij} の $(p+1)(p+2)/2$ 個の成分を $p+1$ 個の座標 ω，u^a と $p(p+1)/2$ 個の座標 h_{ab} に変えたことに注意する．（このパラメーター付けは，正準形式でふつうの重力を量子化するのに使われる ADM 変数からとられている．h^a と ω はふつうのシフト関数とラプス関数である.） 計量テンソルのいくつかの成分について解けば，いつものように $h_{ab} = \partial_a X^I \partial_b X^I$ を得る．こうして，1 次形式と同じになる．

$p = 2$ とすれば，式が簡単になる．記法

$$\{f, g\} = \varepsilon^{ab} \partial_a f \partial_b g \tag{13.6.18}$$

を用いれば，ボソン座標に対するゲージ固定したメンブレインの作用は

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \int d^2\sigma \left[\left(\partial_0 X^I - \left\{ \omega, X^I \right\} \right)^2 - \frac{1}{2} \left\{ X^I, X^J \right\} \left\{ X^I, X^J \right\} \right] \tag{13.6.19}$$

となる．

フェルミオン変数を入れれば，全体のハミルトニアンは

$$H = \int d^2\sigma \left[\frac{1}{2} P_I^2 + \frac{1}{2} h^{ab} \psi^\dagger \gamma_a \gamma \partial_b \psi + \frac{1}{4} \left\{ X^I, X^J \right\} \left\{ X^I, X^J \right\} \right] \tag{13.6.20}$$

となる．ただし $\gamma_a = \partial_a X^I \gamma^I$，$\gamma = \frac{i}{2} \varepsilon^{ab} \partial_a X^I \partial_b X^J \gamma^{IJ}$ である．

ここで，メンブレイン作用の問題点がすべてわかる．まず第 1 に，相互作用項が弦の変数 X^I の 4 次であり，理論を量子化することが極めて難しい．メンブレインの自由理論は，このように高度に非線形で基本的に取り扱うことができない．これだけでメンブレインの研究は行われなくなってしまった．

第 2 に，そしてもっと重要なのは，この 4 次の項が実は 0 になる方向があることである．この項はメンブレインの表面積に対応するので，メンブレインが長くて無限に細い線に縮退すると，この面積は 0 になる．

メンブレインが何百万もの小さな「針」を出したやまあらしのように見える場合を

想像してみれば，メンブレインの波動関数がこれらの針から「漏れだして」，そのために波動関数が安定でなくなることがわかる．

また理論が世界体積上で紫外発散しているという問題もあり，そのため理論の量子化に問題がある．

この理論を 1 つの時間座標だけをもつふつうの超 Yang-Mills の作用と比べてみれば，この問題に関する何らかの知見を得ることができる．τ^a を $\mathrm{U}(N)$ の生成子として，$A^I = \tau^a A^{aI}$ とすると作用は

$$S = \frac{1}{2}\int d\tau \ \mathrm{Tr}\left\{\left(D_0 A^I\right)^2 - \frac{1}{2}\left[A^I, A^J\right]\left[A^J, A^I\right] + i\bar{\psi}D_0\psi + \bar{\psi}\gamma^I\left[A^I, \psi\right]\right\} \tag{13.6.21}$$

となる．

驚くべきことに，2 つの理論が非常に似ていることに気がつく．基本的に $\mathrm{U}(N)$ Yang-Mills 理論とメンブレインの間に次の対応をつけたくなる：

$$\begin{aligned} A^I &\to X^I \\ [\ ,\ ] &\to \{\ ,\ \} \\ \int d\tau \ \mathrm{Tr} &\to \int d^2\sigma \\ \mathrm{U}(N) &\to w(\infty). \end{aligned} \tag{13.6.22}$$

重要な点は，N が無限大の極限をとったことである．この極限では $\mathrm{U}(N)$ は $\mathrm{U}(\infty)$ となり，（もしこの極限をあるやり方で注意深くとったならば，）これは球状のメンブレインとトーラスの面積を保存する座標変換に対応する $w(\infty)$ になる．メンブレインの 2 次元の座標 (σ_1, σ_2) は $\mathrm{U}(N)$ の添え字 a から出る．

このようにして作用の安定性を解析できる正則化の極限がわかる．われわれの書いた Yang-Mills 理論は，有限の N に対しては不安定である．その理由は，カルタン部分代数の要素は互いに交換するので，A^I が $\mathrm{U}(N)$ のカルタン部分代数に値をとると 4 次の項が 0 になるからである．したがって，ここでは「針」はカルタン部分代数の要素に置き換わっている．理論が有限の N に対して不安定なので，$N \to \infty$ としても，メンブレイン理論も不安定であることが示せる．

この結果は残念であるが，前とまったく異なる解釈を与える．行列模型の解釈では，メンブレインは単に D0 ブレインの集合である．メンブレインの不安定性は，ソリトンにふつうある「力が働かない」条件の単純な結果である．こうして，行列模型は D0 ブレインの束縛状態というメンブレインの新しい解釈を与えてくれているのである．（M 理論に存在する 5 ブレインは，もっと微妙でまだ研究されている．）

13.7　ブラックホール

弦理論は重力相互作用の量子論であるから，それを指針としてブラックホールの物理の難しい問題を調べることができなければならない．とくに，ブラックホールの Bekenstein-Hawking の面積-エントロピーの関係を統計力学の方法を用いて導くとい

う長年の問題がある [20, 21]．エントロピーは統計力学的方法で $S = k \log W$ と厳密に定義されているが，この定義にはブラックホールの量子状態の勘定を詳しく理解することが必要で，今まで物理学者の及ぶところではなかった．

過去には，統計力学ではなく熱力学的な議論により，ブラックホールのエントロピーを発見法的に定義してきた．まず，直接計算することにより，ブラックホールの質量がその事象の地平線の面積に比例していることに気がついた：

$$dM = \frac{1}{8\pi G}\kappa dA\,. \tag{13.7.1}$$

ここで κ はブラックホールの表面重力である．とくに，dA は少なくとも古典的には常に正であることに注意せよ．たとえば，ブラックホールが近くの星を吸収するか，2つのブラックホールがぶつかったりすれば，ブラックホールの質量は大きくなり，面積は常に増大する．こうして，純粋に形式的議論により，ブラックホールの面積と増大しなければならないエントロピーの間に関係があることが疑われる．

とくに，この式と熱力学の法則との間の関係を利用したい：

$$dE = TdS\,. \tag{13.7.2}$$

ここで dS はエントロピーの変化であり，dE はエネルギーの変化である．ブラックホールの温度とは何かを定義しなければならないことに注意せよ．

ブラックホールから逃げ出すための速度が光速であり，定義により何物もブラックホールからは逃げられないので，ブラックホールに温度を定義することは最初は変に思えるかもしれない．ブラックホールは十分強い古典的な重力場をもっているので，どんな浮遊している宇宙物質も吸収してしまうが，それはまた量子力学の法則にも従わねばならない．そのため，ポテンシャルの障壁を通して量子トンネルが起きる．たとえば，ブラックホールの近くの重力場は十分強いので，真空中に作られた仮想粒子対を実在のものにしてしまうことがある．電子-陽子対が極めて強い電場により真空から生成されるのと同じように，ブラックホールの重力場は十分強いので，真空から粒子を生成する．

物理的には，これは量子ブラックホールがゆっくり放射する，あるいは時間とともに「蒸発」し，そのエネルギーを空間に漏らしてしまうことを意味している．ブラックホールからでる特徴的な放射は，決まった温度の黒体輻射になることが示せる．したがって，ブラックホールを決まった温度をもった熱力学的物体として取り扱うことができる．その結果

$$T = \kappa/2\pi \tag{13.7.3}$$

であることがわかる．

これから，Bekenstein-Hawking の関係が得られ，ブラックホールのエントロピー S が，その事象の地平線の面積の 1/4 であることがわかる：

$$S = \frac{1}{4}A\,. \tag{13.7.4}$$

スピンをもつブラックホールの場合には，熱力学との類似がもっと強い．もしブラッ

クホールが角運動量 J をもち，地平線の角速度が Ω ならば

$$dM = (\kappa/8\pi)dA + \Omega dJ \tag{13.7.5}$$

となる．これは熱力学のふつうの法則

$$dE = TdS - PdV \tag{13.7.6}$$

と非常によく似ている．

この導出の欠点は，議論が半古典的で熱力学的なものにすぎないことであり，完全な導出ではブラックホールの量子状態をどうしても数えなければならない．エントロピーはふつう統計力学的に定義されるので，統計力学的勘定の議論でこの関係を出そうとするいろいろな試みが長年あったが，いずれも厳密ではなかった．

最近，M 理論の方法を用いて，この問題に光が当てられた [22]．ブラックホールを解析する際に BPS 状態がよく現れるので，これらを用いてそのエントロピーを計算できるというのはありそうなことである．とくに D ブレインは R-R 場の源となり，ある場合には D ブレインの勘定の仕方はわかっている．

ブラックホールの多くの配位の場合，ブラックホールのチャージによるが，事象の地平線の面積は 0 になることがわかる．0 でない面積を得るために，5 次元の IIB 作用を考える：

$$\begin{aligned} S = \frac{L}{16\pi} e^D \int d^5x\sqrt{-g}\Big\{ & R - (\nabla\phi)^2 - \frac{2}{3}(\nabla D)^2 \\ & - \frac{1}{4}e^{-2D+2\phi}\tilde{H}_+^2 - \frac{1}{4}e^{-2D-2\phi}H_-^2 - \frac{e^{2D}}{4}G^2\Big\}\,. \end{aligned} \tag{13.7.7}$$

3 つの U(1) ゲージ場があることに注意する．$G = dA$ はふつうのカルーツァ-クライン場に対応し，$(H_+)_{\mu\nu} = H_{\mu\nu 5}$，$H_- = e^{2\phi+D}\,{}^*H$ で，$*$ は 5 次元の双対に対応する．

ここで 3 つのチャージ，すなわち 2 つの R-R チャージ(電荷と磁荷)と 1 つのカルーツァ-クラインチャージを定義する：

$$Q_1 = \frac{1}{8}\int_{S_3} e^{-D+2\phi}\,{}^*H_+ \tag{13.7.8}$$

$$Q_2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_{S_3} e^{-D-2\phi}\,{}^*H_- \tag{13.7.9}$$

$$P = \frac{2\pi n}{L} = \frac{L}{16\pi}\int_{S_3} e^{3D}\,{}^*G\,. \tag{13.7.10}$$

5 次元では，Reissner-Nordstrom ブラックホール(電荷をもつブラックホール)に似た，これらの式の簡単な解を見つけることができる．残念ながら，このブラックホール解は，運動量 P が 0 のときは，事象の地平線の面積が 0 である．(面積が 0 でないブラックホール解を見つけるには，運動量 P を含めて，3 つのチャージが 0 であってはいけない.)　これは Reissner-Nordstrom ブラックホールをブーストして，変数 σ で決まる運動量 P にしなければならないことを意味している．ブーストした 5 次元 Reissner-Nordstrom 解は

$$ds^2 = -\left[1 - \left(\frac{r_+^2 \cosh^2\sigma - r_-^2 \sinh^2\sigma}{r^2}\right)\right] dt^2 + \sinh 2\sigma \frac{r_+^2 - r_-^2}{r^2} dt dx_5$$
$$+ \left[1 - \left(\frac{r_-^2 \cosh^2\sigma - r_+^2 \sinh^2\sigma}{r^2}\right)\right] dx_5^2$$
$$+ \left(1 - \frac{r_-^2}{r^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_+^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2\, d\Omega_3^2 \tag{13.7.11}$$

で与えられる．ここに，r_- と r_+ はブラックホールの場合の内と外の事象の地平線を表す．$\sigma = 0$ のとき，ふつうの一般化された Reissner-Nordstrom 計量となる．ブラックホールが「極限」の場合に興味がある．（チャージをもつブラックホールの場合，質量 M とチャージ Q の間に関係がある．それは適当な単位で，$M \geq Q$ である．極限ブラックホールの場合，$M = Q$ である．今の場合，$r_+ = r_- = r_0$ のときに極限ブラックホールになる.）

この計量に対し，次のチャージの関係を得る：

$$Q_1 Q_5 = r_+^2 r_-^2 V/g^2 . \tag{13.7.12}$$

運動量は

$$P = \frac{RV}{2g^2} \sinh(2\sigma)(r_+^2 - r_-^2) \tag{13.7.13}$$

で与えられる．（P を有限に保ったまま，$r_- \to r_+$ で $\sigma \to \infty$ の極限をすぐにとる.）

エネルギー E と面積 A は

$$E = \frac{RV}{2g^2} \left[2(r_+^2 + r_+^2) + \cosh 2\sigma\, (r_+^2 - r_-^2)\right] \tag{13.7.14}$$

$$A = 4\pi^3 r_+^2 R \cosh\sigma \sqrt{r_+^2 - r_-^2} \tag{13.7.15}$$

となる．（有限の σ に対し $r_- \to r_+$ とすれば，事象の地平線の面積 A は 0 になることに注意せよ．このために自明でない結果を得るためにブーストをしなければならなかった.）

事象の地平線の面積は

$$A = 8\pi \sqrt{Q_1 Q_5 P R} \tag{13.7.16}$$

と簡単化できる．

この計量の場合の Hawking 輻射の温度は

$$T = \frac{\sqrt{r_+^2 - r_-^2}}{2\pi r_+^2 \cosh\sigma} \tag{13.7.17}$$

であることが示せる．

以上を総合すると，

$$S = \frac{A}{4} = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^4 V P R}{g^2}} = 2\pi \sqrt{Q_1 Q_5 P R} \tag{13.7.18}$$

を得る．

コンパクト化した円周上では $P=n/R$ なので，エントロピーの最終的結果は

$$S = 2\pi\sqrt{Q_1 Q_5 n} \tag{13.7.19}$$

となる．

今までの議論はすべて半古典的であり，エントロピーの統計力学的起源をまったく無視していた．われわれがやったことは，知られている結果を弦の背景方程式の言葉で書き直したにすぎない．

これからの課題は，量子論的勘定の議論によってこの関係を統計力学的に導くことである．重要な点は，どうやってBPSのDブレイン状態を勘定するかがわかっていることである．たとえば，IIB弦の場合，奇数次元のDブレインがあることがわかっている．体積 $(2\pi)^4 V$ の小さな4トーラスと円周の長さ $2\pi R$ の大きな円周にコンパクト化したD1ブレイン(弦)とD5ブレインに注目する．

D1ブレインを半径 R の円周のまわりに巻き付ければ，この弦はチャージ $Q_1=1$ をもつ．同様に，D5ブレインを4トーラスに巻き付ければ，$Q_5=1$ のチャージを得る．たくさんのDブレインを円周か4トーラスに巻き付ければ，任意のチャージの場の配位を作ることができる．

前に言ったように，Dブレインの相互作用はそれらの間につながった開弦によって与えられる．この場合状態の勘定は，Q_1 個のD1ブレインと Q_5 個のD5ブレインについている開弦で決まる．しばらく $Q_5=1$ としよう．すると理論の状態は開弦できまり，それは他の4トーラスの4次元を自由に動ける．これが全体の問題の鍵である．量子状態の勘定は，4次元を自由に動ける Q_1 個のふつうの弦の勘定になり，状態は $4Q_1$ 個のボソン的弦とそのフェルミオンの相棒を含むことになる．幸いなことに，弦の状態の勘定はよく知られている．ふつうの弦理論の場合は，セントラルチャージ c の共形場理論のレベル $L_0=n$ の調和振動子状態の縮退度は，大きな n に対し

$$d(n,c) \to \exp\left(2\pi\sqrt{nc/6}\right) \tag{13.7.20}$$

で与えられることを思い出す．

そこで，これらD1ブレインの c を計算する必要がある．N_B 種類のボソンと N_F 種類のフェルミオンのある単純な共形場理論では，c は

$$c = N_B + \frac{1}{2}N_F \tag{13.7.21}$$

で与えられる．ここで $N_B = N_F = 4Q_1$ である．こうして $Q_5=1$ に対して

$$d(n,c) \to \exp 2\pi\sqrt{Q_1 n} \tag{13.7.22}$$

を得る．

しかし系は1ブレインと5ブレインの間でデュアルであることがわかっている．したがって最終結果は積 Q_1Q_5 で書かれるはずである．これにより $Q_5=1$ の条件をゆるめて，答えを積 Q_1Q_5 で書くことができる．こうして最終的な答えは $S=\log d$，すなわち

$$S = 2\pi\sqrt{Q_1 Q_5 n} \tag{13.7.23}$$

で与えられる．これは以前の結果と一致しており，したがって $S = A/4$ が確かめられた．

この計算の鍵は，統計力学的状態の勘定が，よくわかっている D1 ブレイン(弦)の状態の勘定で決まったところにあることがわかる．この結果は IIB 型弦を用いて 5 次元ブラックホールに対して導いたが，結果はおそらくかなり一般的で，いろいろなコンパクト化や背景に対して 4 次元でも成り立っていることが示されている．(4 次元では，この計算にカルーツァ-クラインモノポールなどの新しい物体を導入しなければならない.) 同様に，この計算は回転しているブラックホールの場合にもできる．

13.8 まとめ

今まで，p ブレインが M 理論全体に広く及ぼしている影響を見てきた．これにより，多くの弦理論の非摂動的振る舞いが決定できた．この章では，これらの p ブレインの具体的な表現を構成した．

弦理論ではこれらの p ブレインの存在をいれなければならないことを強調しておく．たとえ純粋に弦だけの理論から出発したとしても，いずれは運動方程式を解かねばならず，そこにはソリトンやソリトン的物体が許されるのである．とくに，11 次元超重力のメンブレイン解を，仮定

$$ds^2 = \left(1 + \frac{k_3}{y^6}\right)^{-2/3} dx^\mu dx_\mu + \left(1 + \frac{k_3}{y^6}\right)^{1/3} \left(dy^2 + y^2 d\Omega_7^2\right) \tag{13.8.1}$$

を考えて書き下すことができる．ここで $\mu = 0, 1, 2$，$m = 3, \ldots, 10$，$d\Omega_7$ は S_7 球の体積形式，4 形式の場の強さは S_7 上の体積形式のデュアルに比例する．

同様に，11 次元超重力の 5 ブレイン解は

$$ds^2 = \left(1 + \frac{k_6}{y^3}\right)^{-1/3} dx^\mu dx_\mu + \left(1 + \frac{k_6}{y^3}\right)^{2/3} \left(dy^2 + y^2 d\Omega_4^2\right) \tag{13.8.2}$$

と書ける．4 形式の場の強さは S_4 上の体積形式に比例する．

驚くまでもないが，一般的な D 次元の p ブレイン解の場合を与えることができる．作用

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int d^D x\sqrt{-g}\left(R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2(d+1)!}e^{-a\phi}F_{p+2}^2\right) \tag{13.8.3}$$

を考える．ここで F_{p+2} はふつうの反対称場の強さである．

これを p ブレイン作用に結合させる：

$$\begin{aligned} S_p = T\int d^{p+1}\xi \Bigg(&-\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}\partial_i X^M \partial_j X^N g_{MN} e^{a(d)\phi/(p+1)} + \frac{p+1}{2}\sqrt{\gamma} \\ &- \frac{1}{(p+1)!}\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_{p+1}}\partial_{i_1} X^{M_1} \ldots \partial_{i_{p+1}} X^{M_{p+1}} A_{M_1 \ldots M_{p+1}}\Bigg). \end{aligned} \tag{13.8.4}$$

ここで，γ^{ij} は p ブレインの世界体積上の計量である．

これらの連結した方程式を解くために，仮定

$$ds^2 = e^{2A} dx^\mu dx_\mu + e^{2B} dy^m dy^m \tag{13.8.5}$$

をする．ここで $\mu = 0, 1, 2, \ldots, p$ で $m = p+1, p+2, \ldots, D-1$ である．同様に，p ブレインの座標を次のようにわける．$(X^M = X^\mu, Y^m)$，$X^\mu = \xi^\mu$，$Y^m =$ 定数．

こうすると解は

$$\begin{aligned} A &= \frac{D-p-3}{2(D-2)}(C - a\phi_0/2) \\ B &= -\frac{p+1}{2(D-p-3)}(C - a\phi_0/2) \\ \frac{a}{2}\phi &= \frac{a^2}{4}(C - a\phi_0/2) + \frac{a}{2}\phi_0 \\ a^2 &= 4 - 2(p+1)(D-p-3)/(D-2) \end{aligned} \tag{13.8.6}$$

および

$$e^{-C} = \begin{cases} e^{-a\phi_0/2} + \frac{k}{y^{p+1}}; & D-p-3 > 0 \\ e^{-a\phi_0/2} - \frac{\kappa^2 T}{\pi} \ln y; & D-p-3 = 0 \end{cases} \tag{13.8.7}$$

で与えられる．ここで $k = 2\kappa^2 T/(D-p-3)\Omega_{D-p-2}$ であり，Ω は超平面の体積である．

今まで，メンブレインと5ブレインに対応する古典解だけを構成した．超メンブレインを具体的に構成するために，一般化された南部-後藤項を導入する：

$$S_1 = -T \int d^{p+1}\sigma \ \sqrt{-\det \Pi_i \cdot \Pi_j}\,. \tag{13.8.8}$$

ここで $\Pi_i^\mu = \partial_i X^\mu - i\bar{\theta}\Gamma^\mu \partial_i \theta$ である．この項自身は局所超対称ではないので，Wess-Zumino 項を導入しなければならない．まず形式 h を導入する：

$$h = \frac{i}{2p!}\Pi^{\mu_p} \ldots \Pi^{\mu_1} d\bar{\theta}\Gamma_{\mu_1 \ldots \mu_p} d\theta\,. \tag{13.8.9}$$

$h = db$ と書けば，作用の Wess-Zumino 項は

$$S_2 = -2T \int {}^*b = -\frac{2T}{(p+1)!}\int d^{p+1}\sigma \ \varepsilon^{i_1 \ldots i_{p+1}} b_{i_1 \ldots i_{p+1}} \tag{13.8.10}$$

と書ける．

具体的に書けば，メンブレインの Wess-Zumino 項は

$$\begin{aligned} S_2 = -\frac{iT}{2}\int d^3\sigma \, \big\{ (\varepsilon^{ijk}\bar{\theta}\Gamma_{\mu\nu}\partial_i\theta) \big[\Pi_i^\mu \Pi_k^\nu + i\Pi_i^\mu \bar{\theta}\Gamma^\nu \partial_k \theta \\ - (1/3)(\bar{\theta}\Gamma^\mu \partial_j \theta)(\bar{\theta}\Gamma^\nu \partial_k \theta) \big] \big\} \end{aligned} \tag{13.8.11}$$

である．ここで

$$\Gamma_i = \Pi_i^\mu \Gamma_\mu \ ; \qquad \Gamma_{ij} = \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \Gamma_{\mu\nu} \ ; \qquad \Gamma = \frac{1}{6\sqrt{-g}}\varepsilon^{ijk}\Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \Pi_k^\rho \Gamma_{\mu\nu\rho}. \tag{13.8.12}$$

したがって，

$$c = \pm 1\,; \quad \delta = (1 \pm \Gamma)\varepsilon(\sigma) \tag{13.8.13}$$

とすれば，$\delta S = 0$ となる．ここで $\frac{1}{2}(1 \pm \Gamma)$ は射影演算子である．

11 次元のメンブレインと 5 ブレインはときどき M 理論の M ブレインと呼ばれる．しかし，BPS 状態になっている低い p ブレインにも興味がある．これは D ブレインを含む．

Dp ブレイン(すなわちディリクレ p ブレイン)は，開弦がその上に終われる p ブレインとして定義できる．これらの D ブレインの作用はふつうのと違っていて，世界体積の上を伝播するベクトル場 A を加えることができる．このベクトル場が加わると，ふつうのブレインスキャンの勘定が変わって

$$\text{D ブレイン：} D - 2 = \frac{1}{4}MN \tag{13.8.14}$$

となる．超並進代数を分解して見つかったいろいろな BPS p ブレインは，この条件をみたしていることが容易にわかる．

歴史的には，D ブレインは開弦に T デュアリティー変換をすることで最初に発見された．閉弦に T デュアリティー変換をすれば

$$X_\mu(z) + X_\mu(\bar{z}) \to X_\mu(z) - X_\mu(\bar{z}) \tag{13.8.15}$$

となることを思い出す．

しかし，開弦に対しては，この同じ T デュアリティー変換が X_μ のノイマン境界条件を $\hat{X}_\mu$ のディリクレ境界条件に変える：

$$\partial_\sigma X_\mu = 0 \to \partial_\tau \hat{X}_\mu = 0\,, \tag{13.8.16}$$

または端点で $\hat{X}_\mu = 0$ である．ここで $\hat{X}_\mu$ はデュアルな弦である．

D ブレインの作用はいろいろな方法で見つかる．ふつうの閉弦のように，まず開弦を質量 0 の場(ベクトル場とフェルミオン)に結合させ，それから重い弦の自由度を積分する．こうしてベータ関数が求まり，それを 0 にする．そうすれば，運動方程式がちょうど $\beta = 0$ になるような作用を構成するのは簡単である．

こうして得られた質量 0 の場の作用は

$$\int d^3\sigma \sqrt{-\det\,(G_{ij} + F_{ij} - B_{ij})} \tag{13.8.17}$$

である．ここで p ブレインの境界で $f^\mu = X^\mu$ としたとき，G と B はメンブレイン表面への引き戻しから作られるふつうの項，すなわち $G_{ij} = \partial_i f^\mu \partial_j f^\nu g_{\mu\nu}$ である．

D ブレインの作用を別のやり方，11 次元メンブレイン作用を考えそれを円周にコンパクト化して導くこともできる．同じディラック-ボルン-インフェルト作用を得る．

D ブレインの物理でもっとも驚くべき結果の 1 つは，運動量無限大の極限の M 理論が，大きな N の極限の D0 ブレインと同等であるという行列模型の推測である．M 理論はメンブレインと 5 ブレインを含むことがわかっているので，これは本当にすごい単純化である．というのは，D0 ブレインの作用は超対称量子力学系であり，量子場

の理論でさえもないからである．

この結果の動機は，M 理論の超並進代数を調べるとわかる．コンパクト化の後，運動量演算子 P_M は p_μ と p_{11} になる．ただし

$$p_{11} = Z = N/R \tag{13.8.18}$$

である．11 次元では，この最後の項はふつうカルーツァ-クライン状態である．しかし 10 次元では，これは D0 ブレイン状態に対応し，運動量無限大の系の代数で主要な項になる．

この推測の検証がいくつかある．もっとも簡単なものは，理論のスペクトルを解析することである．超 Yang-Mills 理論は 16 成分のスピノールをもち，それを用いて超重力の質量 0 の状態に対応する $2^8 = 256$ 個の状態を導くことができる．

次に，D0 ブレイン散乱振幅を具体的に計算することができ，それが超重力の散乱と一致することが示せる．N 個の重なった D ブレインの作用は，超 Yang-Mills 理論を p ブレインの世界面に落としたものになる：

$$S = T\int d^{p+1}\sigma \ \ \mathrm{Tr}\ \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\Psi}\Gamma^\mu D_\mu \Psi\right) + \cdots \quad . \tag{13.8.19}$$

非常に不思議なのは，この作用が重なっていない多重 D ブレイン場にも使えるので，この作用で D ブレインの散乱を記述できることである．この事実を使って D0 ブレインの散乱を計算する．N 個の D0 ブレインを考える：

$$S = T\int dt\ \ \mathrm{Tr}\ \left(\frac{1}{2}(D_0X^i)^2 - i\theta^T D_0\theta + \frac{1}{4}\left([X^i, X^j]\right)^2 + \theta^T\gamma^j[X_j, \theta]\right) . \tag{13.8.20}$$

この作用は N 個の重なった D0 ブレインの散乱過程を記述する．たとえば，ゲージ場がブロック対角であれば，

$$U(N_1)\otimes U(N_2)\otimes\cdots\otimes\ U(N_n) \tag{13.8.21}$$

となり，これを用いて多重 D ブレイン散乱を表すことができる．

実際 2 つの D ブレインの散乱を具体的に解く．まず X 場を次のように分解する．ここで，$X^i = B^i + \sqrt{g}Y^i$ であり，B^i は古典的配位を表し，Y は量子論的ゆらぎである．べき展開は

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_Y = i\int d\tau &\left(\frac{1}{2}Y_1^i(\partial_\tau^2 - r^2)Y_1^i + \frac{1}{2}Y_2^i(\partial_\tau^2 - r^2)Y_2^i + \frac{1}{2}Y_3^i\partial_\tau^2 Y_3^i\right.\\ &\left. - \sqrt{g}\varepsilon^{a3x}\varepsilon^{cbx}B_3^iY_a^jY_b^iY_c^j - \frac{g}{4}\varepsilon^{abx}\varepsilon^{cdx}Y_a^iY_b^jY_c^iY_d^j\right)\end{aligned} \tag{13.8.22}$$

である．A をゲージ場の 0 番目の成分とすれば，この場に対する作用は

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_A = i\int d\tau &\left(\frac{1}{2}A_1(\partial_\tau^2 - r^2)A_1 + \frac{1}{2}A_2(\partial_\tau^2 - r^2)A_2 + \frac{1}{2}A_3\partial_\tau^2 A_3\right.\\ &+ 2\varepsilon^{ab3}\partial_\tau B_3^i A_a Y_b^i + \sqrt{g}\varepsilon^{abc}\partial_\tau Y_a^i A_b Y_c^i\\ &\left. - \sqrt{g}\varepsilon^{a3x}\varepsilon^{bcx}B_3^i A_a A_b Y_c^i - \frac{g}{2}\varepsilon^{abx}\varepsilon^{cdx}A_a Y_b^i A_c Y_d^i\right) .\end{aligned} \tag{13.8.23}$$

ここで，容易に量子場 Y^i を最低次で汎関数積分できる．B^i 場は古典場なので，上の作用は 2 次，3 次および高次の項の和に書ける．2 次の項は対角化できるので，ある質量の自由粒子の伝播を表す．1 つの場に対しては，2 次の部分の積分はふつうの行列式

$$D_\alpha = \det\,(-\partial_\tau + r^2 + \alpha) \tag{13.8.24}$$

を与える．これらの重い場をすべて含めれば，汎関数積分が行列式

$$D_{\rm tot} = D_0^{-6} D_{2v}^{-1} D_{-2v}^{-1} D_v^4 D_{-v}^4 \tag{13.8.25}$$

で修正されることがわかる．

上の行列式を分解することにより，これらの行列式の作用への寄与を得ることができる：

$$V_{\rm eff} = -\frac{15v^4}{16r^7} + \mathcal{O}\left(\frac{v^6}{r^{11}}\right). \tag{13.8.26}$$

これはふつうの超重力の散乱で見つかっている結果と一致している．

最後に D ブレインにより，ブラックホールの物理の長年の問題，ブラックホールのエントロピーが面積の 1/4 であるという Bekenstein-Hawking 輻射の公式を統計力学的に導くという問題が解ける．

ブラックホールのエントロピーが面積に比例しているという事実は，ブラックホールが新しい星間物質をがつがつ食い，その面積が減らず大きくなることに関係している．エントロピーと同じように，ブラックホールの面積は常に大きくなる．この関係を与えるような熱力学の議論がされているが，統計力学的導出には必ず重力の量子論が必要で，これはいつも手の届かないことであった．

D ブレインの導入がこれをまったく変え，ブラックホールの量子状態を数えることができるようになった．5 次元にコンパクト化した IIB 型理論を考えよう．場の有効作用は

$$\begin{aligned} S = \frac{L}{16\pi}\int d^5x\sqrt{-g}\,\Big\{ & R - (\nabla\phi)^2 - \frac{2}{3}(\nabla D)^2 \\ & - \frac{1}{4}e^{-2D+2\phi}\tilde{H}_+^2 - \frac{1}{4}e^{-2D-2\phi}H_-^2 - \frac{e^{2D}}{4}G^2\Big\} \end{aligned} \tag{13.8.27}$$

となる．

場について積分して，ブラックホールを記述している 3 つのチャージを求めることができる：

$$Q_1 = \frac{1}{8}\int_{S_3} e^{-D+2\phi}\ {}^*H_+ \tag{13.8.28}$$

$$Q_2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_{S_3} e^{-D-2\phi}\ {}^*H_- \tag{13.8.29}$$

$$P = \frac{2\pi n}{L} = \frac{L}{16\pi}\int_{S_3} e^{3D}\,{}^*G\,. \tag{13.8.30}$$

一般にブラックホールの面積が 0 でないようにするには，3 つのチャージがすべて

0 でない必要がある．IIB 型弦の場合，奇数次元の D ブレイン，とくに D1 ブレインと D5 ブレインがある．4 トーラスと円周にコンパクト化すれば，D1 ブレインを円周に巻き付け($Q_1 = 1$ を得る)，D5 ブレインをトーラスに巻き付ける($Q_5 = 1$ を得る)ことができる．$Q_5 = 1$ とする．Q_1 個の D1 ブレインを円周に巻き付けよう．すると実際上 Q_1 個の D1 ブレイン(弦)は 4 次元で自由に振動できる．こうして，$4Q_1$ 次元に定義されたシグマ模型を得る．

幸いに，弦理論の状態の数え方はわかっている．大きな n に対して，弦の状態の縮退は

$$d(n, c) \to \exp\left(2\pi\sqrt{nc/6}\right) \tag{13.8.31}$$

で与えられる．今の場合，c は $N_B + \frac{1}{2}N_F$ に等しい．ただし $N_B = N_F = 4Q_1$ である．しかし，この系の D1 と D5 はデュアルなのでチャージは Q_1Q_5 の組み合わせで現れなければならないから，$Q_5 = 1$ の条件をゆるめることができる．

$S = \log d$ なので，以上をすべてまとめれば，エントロピー

$$S = 2\pi\sqrt{Q_1Q_5n} \tag{13.8.32}$$

を得る．これはちょうど面積の 1/4 である．

ここでは 5 次元にコンパクト化した IIB 型理論を考えたが，この結果は 4 次元ブラックホールやスピンをもつブラックホールなどの，いろいろな別種のブラックホールに一般化されている．

13.9　結論

現在弦理論とその最近の再定式化である M 理論は，すべての物理的力の統一理論へのもっとも有望な希望を与えてくれている．弦理論は重力と他の量子的力を組み合わせるだけではなく，非常に豊富な内容をもっているので，自然界で発見されている対称性を原理的にはすべて説明してくれる．この点で，この理論に匹敵するものはない．しかし，この理論が合格しなければならない多くの厳しい試験がある．

- 弦理論のもっとも重大な問題は，われわれの宇宙を記述している正しい真空を見つけることである．4 次元で見つかっている何百万もの真空のうちから，重力に結合した対称性 $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ をもつ標準模型を再現するものを見つけなければならない．

- 超弦理論のすばらしい特徴の多くは，局所超対称性から来ているが，理論が物理的な宇宙を記述するものならば，超対称性は最後には破れなければならない．今までのところ，超対称性を破る納得のいく方法は提案されていない．

- この理論は，ほとんど 0 と言える位小さい宇宙定数を説明しなければならない．宇宙定数は局所超対称な理論では 0 なので，この問題は超対称性の破れと密接に関係している．

これらの問題の鍵はすべて，理論の非摂動的定式にあるのかもしれない．現在のところ，いろいろな提案にはそれぞれ問題がある．たとえば，共形場の理論は基本的に弦理論の摂動論であり，非摂動的な情報は与えてくれない．弦の場の理論は摂動とは無関係に定義されているが，定式化し解くのがあまりに難しい．

われわれの最大の期待はM理論にある．11次元の観点からは，5つの弦理論がすべて同じ理論の異なる真空と見なせる．大きな蜘蛛の巣状のデュアリティーが，異なる弦理論の間に非摂動的な関係を確立した．たくさんの弦理論の強結合極限が，今や別の弦理論に関係していることがわかった．

さらに，理論の中にたくさんのDブレインがあることから，理論の非摂動的スペクトルに関する知見が得られ，BPS状態を分類することができ，ブラックホールの量子論的性質を計算できた．

M理論にはまだ巨大な障害がある．未解決の問題のいくつかは次のものである．

11次元の完全な構造を決めること． 今までのところ，わかっていることは低エネルギーで11次元超重力になることだけである．

M理論の量子化． M理論を量子化しなければ，そのスペクトルは決してわからないし，その性質を正確に理解することもできない．残念ながら，単純なメンブレインの作用でさえも，知られている手法では量子化できない．

相互作用を理解すること． 現在メンブレインの相互作用についてはほとんどわかっていない．Dブレインの励起は弦によって与えられるが，メンブレインが互いにどのように相互作用するかについては，大きな欠落がある．

蜘蛛の巣状のデュアリティーを $D=4$ まで完成すること． $D=8$ と $N=6$ のデュアリティーについてはたくさんの仕事がなされたが，物理的に興味のある $N=1$ 超対称性をもつ $D=4$ のデュアリティーについては，まだほとんどわかっていない．

その現象論を理解すること． M理論はなぜ超対称性が破れるかをまだ説明することができず，宇宙項についての知見を与えていない．

しかし，理論が驚くほど早く進展しているので，M理論の背後の謎は早晩解かれるであろうという楽観論がかなりある．おそらくこの本の読者の誰かが，この偉業を達成するものの内に入るであろう．

参考文献

[1] M. J. Duff and K. Stelle, *Phys. Lett.* **B253**, 113 (1991).
[2] R. Gueven, *Phys. Lett.* **B276**, 49 (1992).
[3] レビューは次を見よ．M. J. Duff, R. R. Khuri and J. X. Lu, *Phys. Rep.* **259**, 213 (1995).
[4] A. Achucarro, J. Evans, P. Townsend, and D. Wiltshir, *Phys. Lett.* **198B**, 441 (1987).
[5] B. E. Bergshoeff, E. Sezgin, and P. K. Townsend, *Phys. Lett.* **B189**, 75 (1987); *Ann. Phys.* **185**, 300 (1988).
[6] M. Aganaic, J. Park, C. Popescu, and J. H. Schwarz, hep-th/9701166.
[7] P. Pasti, D. Sorokin, and M. Tonin, *Phys. Rev.* **D52**, 4277 (1995); hep-th/9701149.
[8] J. Dai, R. G. Leigh, and J. Polchinski, *Mod. Phys.* **A4**, 2073 (1989).

[9] R. G. Leigh, *Mod. Phys. Lett.* **A4**, 2767 (1989).
[10] P. K. Townsend, *Phys. Lett.* **B373**, 68 (1996).
[11] C. Schmidhuber, *Nucl. Phys.* **B467**, 146 (1996).
[12] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B460**, 335 (1995).
[13] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, *Phys. Rev.* **D55**, 5112 (1997).
[14] 行列模型のレビューは次を見よ．A. Bilal, hep-th/9710136.
[15] U. H. Danielsson, G. Ferretti, and B. Sundborg, hep-th/9603081.
[16] D. Kabat and P. Pouliot, hep-th/9603127.
[17] M. R. Douglas, D. Kabat, P. Pouliot and S. Shenker, hep-th/9608024.
[18] K. Becker and M. Becker, hep-th/9705091.
[19] B. de Wit, M. Luscher, and H. Nicolai, *Nucl. Phys.* **B305[FS23]**, 545 (1988).
[20] I. J. Bekenstein, *Lett. Nuov. Cimento* **4**, 737 (1972); Phys. Rev. **D7**, 2333 (1973); *Phys. Rev.* **D9**, 3292 (1974); *Phys. Rev.* **D12**, 3077 (1975).
[21] S. Hawking, *Nature*, **248**, 30 (1974); *Comm. Math. Phys.* **43**, 199 (1975); *Phys. Rev.* **D13**, 191 (1976).
[22] C. Vafa and A. Strominger, *Phys. Lett.* **B383**, 44 (1996).
[23] G. Horowitz, gr-qc/9604051.
[24] J. M. Maldacena and A. Strominger, hep-th/9603060.

付　録

超弦理論の数学は非常に高度なので，この短い付録によって，読者にこの本で導入される概念のいくつかを簡単に説明する．この付録で広範囲の話題をカバーするために，数学的厳密さをある程度犠牲にせざるを得ないことをお詫びする．興味のある読者は，数学的詳細については後に挙げる文献のいくつかを参照されるように勧める．

A.1　群論への短い入門

群(group) G とは，次の条件をみたす要素 g_i の集まりである．

(1) 恒等元 I がある．

(2) 積の下で閉じている：

$$g_1 \times g_2 = g_3 .$$

(3) すべての要素には逆がある：

$$g_i \times g_i^{-1} = I .$$

(4) 積は結合則をみたす：

$$(g_i \times g_j) \times g_k = g_i \times (g_j \times g_k) .$$

群はいろいろな形で入ってくる．詳しくいうと，有限個の要素をもつ**不連続群**と，無限個の要素をもつ**リー群**などの**連続群**がある．不連続群の例としては次のものがある．

(1) **交代群**(alternating group)　Z_n は n 個の物の置換の集合に基づいている．

(2) **26 個の散在型群**　これは規則性をもっていない．散在型群のうちで最大でもっとも面白いものは群 F_1 で,「モンスター群(monster group)」と呼ばれるものである．それは，

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$$

個の要素をもっている．

しかしこの本では，主に無限個の要素をもつ連続群を考える．連続群のうちもっとも重要なものは**リー群**であって，コンパクトで実な形のものに制限すると，次の 4 つの古典的無限系列 A, B, C, D

$$\begin{aligned} A_n &= \mathrm{SU}(n+1) \\ B_n &= \mathrm{SO}(2n+1) \\ C_n &= \mathrm{Sp}(2n) \\ D_n &= \mathrm{SO}(2n) \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

および，例外群

$$G_2;\ F_4;\ E_6;\ E_7;\ E_8 \tag{A.1.2}$$

だけになる．弦の現象論の観点からは，このうち E_6 と E_8 がもっとも面白い．

すべての実または複素 $n \times n$ 行列の集合を分析することにより，これらのゲージ群のいくつかの具体例を与えよう．任意の可逆な $n \times n$ 行列の集合は明らかに群の定義をみたし，群 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ または $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ と呼ばれている．この書き方は，実または複素要素をもつ $n \times n$ 行例の一般線形(General Linear)群の頭文字を表す．$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ または $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の部分群で行列式が 1 のものをとれば，$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ と $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$，すなわち実または複素要素をもつ特殊線形 $n \times n$ 行列の群を得る．

O(n)

さて，$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ の部分群である**直交群** $\mathrm{O}(n)$ をとろう．これは直交するすべての可逆な $n \times n$ 実行列からなる：

$$O \times O^T = 1\,. \tag{A.1.3}$$

これは明らかに，4 つの群の条件をすべてみたしている．さて，どんな直交行列も反対称行列の指数関数として書くことができる：

$$O = e^A\,. \tag{A.1.4}$$

そして，容易に

$$O^T = e^{A^T} = e^{-A} = O^{-1} \tag{A.1.5}$$

が示せる．一般に直交行列は，

$$\frac{1}{2}n(n-1)$$

個の独立要素をもっている．それでいつでも $\frac{1}{2}n(n-1)$ 個の線形独立な行列の組を選ぶことができる．**生成子** λ_i と呼ばれるその組を用いて，$\mathrm{O}(n)$ の任意の要素は

$$O = \exp\left(i \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n-1)} \rho^i \lambda_i\right) \tag{A.1.6}$$

と書ける．実数 ρ^i は群の**パラメーター**と呼ばれるもので，$\mathrm{O}(n)$ には $\frac{1}{2}n(n-1)$ 個のパラメーターがある．リー群のパラメーターの数は次元と呼ばれる．これらの生成子

2つの交換子は別の生成子を与える：

$$[\lambda_i, \lambda_j] = i f_{ij}^k \lambda_k \,. \tag{A.1.7}$$

ここで f は，この代数の**構造定数**(structure constant)と呼ばれる．構造定数が代数を完全に決定することに注意しよう．

3つの交換子の巡回した組み合わせをとれば，厳密な恒等式

$$[\lambda_{[i}, [\lambda_j, \lambda_{k]}]] = 0 \tag{A.1.8}$$

を得ることに注意しよう．これらの交換子を展開してみれば，この組み合わせが打ち消して恒等的に0になることがわかる．これは**ヤコビ**恒等式と呼ばれ，群が正しく閉じるためにはみたされていなければならない．ヤコビ恒等式を展開することにより，構造定数の間の制限を得るが，それがみたされなければ群は閉じなくなる：

$$f_{[ij}^l f_{k]l}^m = 0 \,. \tag{A.1.9}$$

もちろん直交行列の集合は積の下で閉じる．もっと面倒なのは，生成子とパラメーターによる直交群のこの特定の表示が積の下で閉じることを示すことである．そのために，

$$e^A e^B = e^C \tag{A.1.10}$$

と書こう．幸いなことにBaker-Hausdorffの定理により，C は A たす B に，A と B の可能な多重交換子をすべて加えたものになる．しかし A と B はヤコビ恒等式をみたすので，A と B の可能な多重交換子すべての集合は生成子の線形結合のみになる．したがって群は積の下で閉じることがわかる．

代数の構造定数は，**随伴表現**(adjoint representation)と呼ばれる表現を作る．つまり構造定数を行列

$$f_{ij}^k = (\lambda^k)_{ij} \tag{A.1.11}$$

として書けば，構造定数自身が表現をなすことがわかる．

反対称行列 M^{ab} に対し，交換関係はいつでも

$$[M^{ab}, M^{cd}] = \delta^{ac} M^{bd} - \delta^{ad} M^{bc} + \delta^{bd} M^{ac} - \delta^{bc} M^{ad} \tag{A.1.12}$$

と選ぶことができる．

代数の便利な表現の1つは，

$$(M^{ab})_{ij} \sim \delta_i^a \delta_j^b - \delta_i^b \delta_j^a \tag{A.1.13}$$

で与えられる．これは群の交換関係をみたす．

この群の下でベクトルとして変換する n 個の要素 x_i の集合を定義しよう：

$$x_i{}' = O_{ij} x_j \,. \tag{A.1.14}$$

一般に，ランク P のテンソル

$$T_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_P} \tag{A.1.15}$$

は，P 個のふつうのベクトル x_{μ_i} の積と同じように変換するものとして定義できる：

$$\bar{T}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_P} = O_{\nu_1,\mu_1} O_{\nu_2,\mu_2} \cdots O_{\nu_P,\mu_P} T_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_P} \,. \tag{A.1.16}$$

O(N) のベクトルとテンソル表現以外に，群のスピノール表現もある．まず Clifford 代数

$$\left\{\Gamma^a, \Gamma^b\right\} = 2\delta^{ab} \tag{A.1.17}$$

を定義しよう．これらの Clifford 数により，生成子の表現を定義しよう：

$$M^{ab} = \frac{1}{4i}[\Gamma^a, \Gamma^b] \,. \tag{A.1.18}$$

Clifford 数自身はベクトルとして変換する：

$$[M^{ab}, \Gamma^c] = i(\delta^{ac}\Gamma^b - \delta^{bc}\Gamma^a) \,. \tag{A.1.19}$$

一般にこれらの Clifford 数は，群 O($2n$) に対し $2^n \times 2^n$ 行列

$$(\Gamma^a)_{\alpha\beta} \tag{A.1.20}$$

により表すことができる．したがって，O($2n$) の下で変換するスピノール ψ_α は 2^n の成分をもち，

$$\psi'_\alpha = (e^{M^{ab}\rho^{ab}})_{\alpha\beta}\psi_\beta \tag{A.1.21}$$

と変換する．ここで M は Clifford 代数によって表され，ρ 変数はパラメーターである．

群 O($2n+1$) に対してはもう 1 つ要素が必要である．この足りない要素は，

$$\Gamma^{2n+1} = \Gamma^1\Gamma^2 \cdots \Gamma^{2n} \tag{A.1.22}$$

である．この新しい要素により，O($2n+1$) の M 行列がすべて構成できることが容易に確かめられる．

ここで，群の下での不変量を作ろう．まず直交変換は，スカラー積 $x_i x_i$ を保存する：

$$x_i x_i = \text{不変量} \,. \tag{A.1.23}$$

もし $x_i{}' = O_{ij}x_j$ ならば，

$$x_i{}' x_i{}' = xO^T Ox = x_i x_i \tag{A.1.24}$$

だからである．この不変量は，

$$x_i \delta_{ij} x_j \tag{A.1.25}$$

とも書ける．ここで計量は δ_{ij} である．対角上に正と負の符号が入り混じった計量 η_{ij} もあってもよいが，これはコンパクトでないパラメーターの空間を作ってしまう．η_{ij} に N 個の正と M 個の負の成分があれば，この形を保つ行列の集合を O(M, N) と呼ぶ：

$$\begin{aligned} &(O^T)_{ij}\eta_{jk}O_{kl} = \eta_{il} \\ &\eta_{ij} = \varepsilon(i)\delta_{ij} \,; \quad \varepsilon(i) = \pm 1 \,. \end{aligned} \tag{A.1.26}$$

もし ε の成分がすべて正ならば，これは群 O(n) を与えている．もし符号が変化していれば群はコンパクトでない．特別な場合は次のようなものである：

$$\begin{aligned}&\text{射影群 O}(2,1)\\&\text{ローレンツ群 O}(3,1)\\&\text{de Sitter 群 O}(4,1)\\&\text{反 de Sitter 群 O}(3,2)\\&\text{共形群 O}(4,2)\end{aligned} \tag{A.1.27}$$

たとえば de Sitter 群を作るには，O(4,1) の生成子をとり，その第 5 成分を

$$P^a \sim M^{5a} \tag{A.1.28}$$

と書けばよい．こうすると代数は

$$\mathrm{O}(4,1):\begin{cases}[P^a,P^b]=M^{ab}\\ [P^a,M^{bc}]=P^b\eta^{ac}-P^c\eta^{ab}\\ [M^{ab},M^{cd}]=\eta^{ac}M^{bd}-\cdots\end{cases} \tag{A.1.29}$$

となる．これはほとんどポアンカレ群の代数であることに注意しよう．実際，

$$P^a \longrightarrow \pm r P^a \tag{A.1.30}$$

という代入をすれば，変化する交換子は

$$[P^a,P^b]=\frac{1}{r^2}M^{ab} \tag{A.1.31}$$

だけである．この r は **de Sitter 半径**と呼ばれる．この式は，de Sitter 空間で円のまわりを一周し同じ地点にもどると，もとの方向からローレンツ変換だけ回転していることを意味している．もし r を無限大とすれば，ポアンカレ群になることに注意しよう．このように r は 5 次元の宇宙の半径に対応し，r を無限大とすればそれはポアンカレの平坦な 4 次元空間と区別できないようになっているのである．半径を無限大にすることは **Wigner-Inönü 縮小**(contraction)と呼ばれ，超重力理論で広く用いられるものである．この縮小の後では de Sitter 群はポアンカレ群となる．

SU(n)

群 SU(n) は，可逆なすべての $n\times n$ 複素行列で，行列式 1 をもち，ユニタリーなものからなる：

$$UU^\dagger = 1\,. \tag{A.1.32}$$

この記法は，複素成分をもつ特殊ユニタリー $n\times n$ 行列を表している．どんなユニタリー行列もエルミートな行列 $H^\dagger = H$ の指数として書ける：

$$U = e^{iH}\,. \tag{A.1.33}$$

そして，

$$U^\dagger = e^{-iH^\dagger} = e^{-iH} = U^{-1} \tag{A.1.34}$$

が示せる．

複素ベクトル u_i の n 成分が SU(n) の下で線形に変換するとしよう：

$$u_i{}' = U_{ij} u_j \,. \tag{A.1.35}$$

この n 成分複素ベクトル u_i は群の**基本表現**を生成する．そして不変量は

$$u_i{}^* u_i = \text{不変量} \tag{A.1.36}$$

として構成できる．つまり $u_i{}' = U_{ij} u_j$ とすれば，容易に

$$u_i'^* u_i{}' = u_i{}^* (U^\dagger)_{ij} U_{jk} u_k = u_i^* u_i \tag{A.1.37}$$

を確かめられるのである．

スカラー積の計量テンソルは再び δ_{ij} である．この対角形列の符号をいくつか反対にすれば，この計量を保つ群は SU(N, M) と呼ばれるものになる．この 1 つの例は共形群 SU(2, 2) である．

どんな $n \times n$ 複素のトレースが 0 のエルミート行列も，$n^2 - 1$ 個の独立成分をもっており，$n^2 - 1$ 個の線形独立な行列 λ_i により書ける．そこで SU(n) の要素は，

$$U = \exp\left(i \sum_{i=1}^{n^2-1} \rho_i \lambda_i \right) \tag{A.1.38}$$

と書ける．すると Baker-Hausdorff の定理により，群がこのパラメーターづけの下で閉じ，群の代数が

$$[\lambda_i, \lambda_j] = i f_{ij}^k \lambda_k \tag{A.1.39}$$

と書けることがわかる．再び構造定数がわかれば，代数が完全に決まることになる．

また，スピノールから SU(n) の表現を構成することもできる．群 O($2n$) があれば SU(n) はその部分群である．すなわち，グラスマン変数 Γ^{2j} を用いて，

$$A^j = \frac{1}{2}(\Gamma^{2j-1} - i\Gamma^{2j}) \tag{A.1.40}$$

という要素を作れば，SU (n)の生成子は

$$\lambda^a = \sum_{j,k} A^{\dagger j} (\lambda^a)_{jk} A^k \tag{A.1.41}$$

と書ける．こうして，包含

$$\mathrm{SU}(n) \subset \mathrm{O}(2n) \tag{A.1.42}$$

に対し具体的な表示が得られる．

Sp($2n$)

シンプレクティック群は，$2n \times 2n$ 実行列 S の集合で，反対称計量 η を保つものとして定義される：

$$(S^T)_{ij}\eta_{jk}S_{kl} = \eta_{il}\,. \tag{A.1.43}$$

ここで，

$$u_i{}' = S_{ij}u_j \tag{A.1.44}$$

および

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{A.1.45}$$

である．

偶然

幸いなことに一連の「偶然」があって，群の間に局所的な同型関係がつけられる．たとえば O(2) は局所的に U(1) と同型である：

$$\mathrm{O}(2) = \mathrm{U}(1)\,. \tag{A.1.46}$$

これを見るには，単に O(2) と U(1) の行列要素の間の次の対応に注意すればよい：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \longleftrightarrow e^{i\theta}\,. \tag{A.1.47}$$

これらは積の規則 $\theta_1 + \theta_2 = \theta_3$ をみたす．

別の偶然は，

$$\mathrm{O}(3) = \mathrm{SU}(2) \tag{A.1.48}$$

である．これをもっとも容易に証明する方法は，パウリスピン行列 σ_i が 2×2 複素行列で，O(3) の代数と同じ交換関係をみたすことに注意すればよい．つまり，

$$\exp\left(i\sum_{i=1}^{3}\theta^i\lambda_i\right) \longleftrightarrow \exp\left(i\sum_{i=1}^{3}\theta^i\sigma_i\right). \tag{A.1.49}$$

ここで左辺の行列は 3×3 の直交行列で，右辺のものはユニタリー行列である．

別の有用な偶然は，

$$\mathrm{O}(4) = \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(2) \tag{A.1.50}$$

である．これを証明するには，O(4) の生成子 M^{ij} が 2 つの部分にわけられることに注意する．

$$A = \{M_{12} + M_{34}, M_{31} + M_{24}, M_{23} + M_{14}\} \tag{A.1.51}$$

および

$$B = \{M_{12} - M_{34}, M_{31} - M_{24}, M_{23} - M_{14}\} \tag{A.1.52}$$

である．A と B の行列は別々に O(3) の代数を生成し，

$$[A, B] = 0 \tag{A.1.53}$$

であることに注意しよう．したがって O(4) のどの要素でも，O(3) と別の交換する O(3) の積にわかれるようにパラメーターづけすることができる．こうして，O(4) の要素が SU(2) 群の交換する集合の 2 つの要素の積にわかれることが証明できた．

残念ながら，これらの偶然はリー群に対し例外であって規則ではない．以下に，いくつか偶然を列挙しておく[1]．

次元=3

$$\begin{aligned} \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) \sim \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \sim \mathrm{Usp}(2) \sim \mathrm{U}(1,\mathbb{Q}) \sim \mathrm{SL}(1,\mathbb{Q}) \\ \mathrm{SU}(1,1;\mathbb{C}) \sim \mathrm{SO}(2,1;\mathbb{R}) \sim \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R}) \sim \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\,. \end{aligned} \tag{A.1.54}$$

次元=6

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(4,\mathbb{R}) &\sim \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) \\ \mathrm{SO}^*(4) &\sim \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \\ \mathrm{SO}(3,1;\mathbb{R}) &\sim \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \\ \mathrm{SO}(2,2;\mathbb{R}) &\sim \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \otimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\,. \end{aligned} \tag{A.1.55}$$

次元=10

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(5,\mathbb{R}) &\sim \mathrm{Usp}(4) \\ \mathrm{SO}(4,1;\mathbb{R}) &\sim \mathrm{Usp}(2,2) \\ \mathrm{SO}(3,2;\mathbb{R}) &\sim \mathrm{Sp}(4,\mathbb{R})\,. \end{aligned} \tag{A.1.56}$$

次元=15

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(6,\mathbb{R}) &\sim \mathrm{SU}(4,\mathbb{C}) \\ \mathrm{SO}(5,1;\mathbb{R}) &\sim \mathrm{SU}^*(4) \sim \mathrm{SL}(2,\mathbb{Q}) \\ \mathrm{SO}^*(6) &\sim \mathrm{SU}(3,1;\mathbb{C}) \\ \mathrm{SO}(4,2,\mathbb{R}) &\sim \mathrm{SU}(2,2;\mathbb{C}) \\ \mathrm{SO}(3,3;\mathbb{R}) &\sim \mathrm{SU}(4,\mathbb{R})\,. \end{aligned} \tag{A.1.57}$$

任意の N に対し，

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}(N,\mathbb{Q}) &= \mathrm{SU}^*(2N) \\ \mathrm{U}(N,\mathbb{Q}) &= \mathrm{Usp}(2N) \\ \mathrm{Sp}(N,\mathbb{Q}) &= \mathrm{Usp}(2N) \\ \mathrm{O}(N,\mathbb{Q}) &= \mathrm{SU}^*(2N)\,. \end{aligned} \tag{A.1.58}$$

また，$N \leq 6$ に対し，

[1] 詳細は文献［1］を見よ．

$$\begin{aligned} \mathrm{Spin}(3) &= \mathrm{SU}(2) \\ \mathrm{Spin}(4) &= \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(2) \\ \mathrm{Spin}(5) &= \mathrm{Usp}(4) \\ \mathrm{Spin}(6) &= \mathrm{SU}(4)\,. \end{aligned} \tag{A.1.59}$$

となる．ここで，$\mathrm{SL}(n)$ は行列式 1 をもつ $n \times n$ 行列すべての集合で，実数 $\mathbb{R}$，複素数 $\mathbb{C}$，または四元数 $\mathbb{Q}$ の成分をもつものである．四元数は複素数を一般化したもので，任意の要素は，

$$q = \sum_{i=0}^{3} c_i q_i \tag{A.1.60}$$

と書ける．ここで c_i は実数で，

$$\begin{aligned} q_0 = I; \quad q_{1,2,3}^2 &= -I \\ q_1 q_2 = -q_2 q_1 &= q_3 \\ q_2 q_3 = -q_3 q_2 &= q_1 \\ q_3 q_1 = -q_1 q_3 &= q_2 \end{aligned} \tag{A.1.61}$$

である．

カルタン-ワイル表示

一般に例外群は，$\mathrm{GL}(n)$ の部分群としてはあまりうまく表せない．そこでリーとカルタンの方法を使うことにする．

群の生成子 λ_i のうち，互いに交換する要素 H_i

$$[H_i, H_j] = 0 \tag{A.1.62}$$

をすべて選び出そう．これは**カルタン部分代数**と呼ばれる．カルタン部分代数の要素の数は群の**ランク** r と呼ばれる．代数の他の要素すべてを E と呼ぼう．H と他の要素 E の間の交換関係は，どんなものであろうか？一般に，H と E の間の交換関係は，別の H を含むわけにはいかない．なぜならば，それはヤコビ恒等式をみたさないからである．したがって H と E の交換子は，別の E を出さねばならない．代数の残りの要素 E をうまくとることにより，いつでもそれらが H の固有ベクトルになるようにできる．それらを，

$$E_{\boldsymbol{\alpha}_i} \tag{A.1.63}$$

と表そう．ここで $\boldsymbol{\alpha}$ は r 次元空間の**ルートベクトル**と呼ばれる．もし群が N 個のパラメーターをもてば，E は $(N-r)$ 個あることに注意しよう．したがって，r 次元空間に $N-r$ 個のルートベクトルが存在する．そして E の線形結合をうまくとれば，いつでも固有値方程式

$$[H_i, E_{\boldsymbol{\alpha}}] = \alpha_i E_{\boldsymbol{\alpha}} \tag{A.1.64}$$

が得られるようにできる．ヤコビ恒等式により，他の交換関係は，

$$
\begin{aligned}
[E_{\boldsymbol{\alpha}}, E_{-\boldsymbol{\alpha}}]D &= \alpha_i H_i \\
[E_{\boldsymbol{\alpha}}, E_{\boldsymbol{\beta}}] &= N_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} E_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}
\end{aligned}
\tag{A.1.65}
$$

となる．N は群の構造定数である．具体的には，それらは

$$
N^2_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{2} n(m+1)\alpha_i \alpha_i \tag{A.1.66}
$$

となる．N は

$$
\begin{aligned}
N_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} &= -N_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} = -N_{-\boldsymbol{\alpha},-\boldsymbol{\beta}} \\
N_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} &= N_{\boldsymbol{\beta},-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} = -N_{-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}}
\end{aligned}
\tag{A.1.67}
$$

で与えられる対称性をもっている．

Dynkin 図

ルートに関して定義をいくつかしよう．各ルートベクトルは r 次元空間の中にある．したがって r 成分をもつそれらの部分集合をとって，他のどのルートも線形結合

$$
\rho = \sum_{i=1}^{r} c_i \alpha_i \tag{A.1.68}
$$

で表せるようにとることができる．もし上の式の最初の 0 でない c が正であれば，そのルートを**正のルート**(positive root)と呼ぶ．**単純ルート**(simple root)とは，2 つの正のルートの和にかけない正のルートのことである．構造定数が代数を正確に決めるのとちょうど同じことが，**カルタン行列**についてもいえる．カルタン行列とは，

$$
A_{ij} = 2\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \tag{A.1.69}
$$

で定義される $r \times r$ 行列のことである．ここで α_i は r 個の単純ルートである．

カルタン行列の対角成分は作り方によりすべて 2 に等しい．けれどもこの行列は必ずしも対称ではない．実は非対角行列要素の可能な値は，$0, -1, -2, -3$ だけになる．カルタン行列が群を完全に決めるので，カルタン行列のある簡単な性質を用いれば，群をグラフにより定義することができる．これらのうちもっとも便利なものが，**Dynkin 図**と呼ばれるものである．

ランク r の群に対し r 個の点を書こう．各単純ルートを点で表すのである．そして i 番目と j 番目の点を n 本の線で結ぶ．ここで n は非対角成分の積である：

$$
n = A_{ij} A_{ji} \, . \tag{A.1.70}
$$

こうして得られる図は，一連の点を一連の多重線で結んだもので，**Dynkin 図**と呼ばれる．Dynkin 図の強力な点は，それによりどんなリー群の構造も 1 通りに決まり，それによりいろいろなリー群を視覚的に区別できることである．

カルタン行列の成分はルート格子空間上のスカラー積に関係しているので，n を 2 つのルートベクトルの間の角度で表すこともできる：

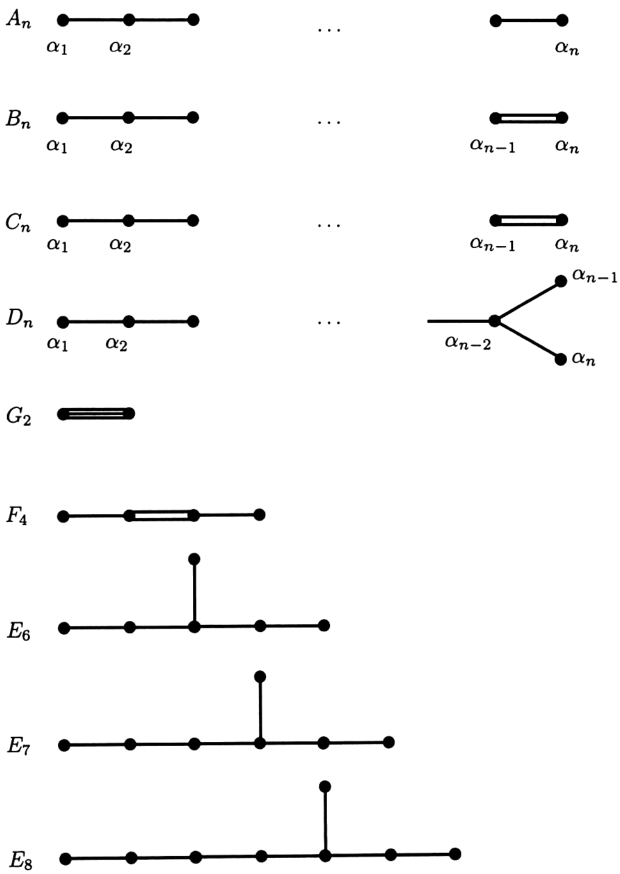


図 A.1：いろいろなリー代数の Dynkin 図．点の数が群のランクを表し，点を結ぶ線の数は 2 つのルートベクトルの間の角度によっている．Dynkin 図はリー代数の構造全体を視覚化する便利な方法である．

n	θ
0	90°
1	120°
2	135°
3	150°

コンパクトで実の形に制限すれば，次の Dynkin 図が得られる（図 A.1 を見よ）．

$A_n = \mathrm{SU}(n+1)$

$$\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j ; \quad 1 \leq i \neq j \leq n+1 .$$

$B_n = \mathrm{SO}(2n+1)$

$$\pm \boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j$$

$$\pm \boldsymbol{e}_i .$$

$C_n = \mathrm{Sp}(2n)$

$$\pm \boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j$$
$$\pm 2\boldsymbol{e}_i\,.$$

$D_n = \mathrm{SO}(2n)$

$$\pm \boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j\,.$$

G_2

$$\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j$$
$$\pm(\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j - 2\boldsymbol{e}_k);\quad 1 \le i \ne j \ne k \le 3\,.$$

F_4

$$\pm \boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j;\quad 1 \le i \ne j \le 4$$
$$\pm 2\boldsymbol{e}_i$$
$$\pm \boldsymbol{e}_1 \pm \boldsymbol{e}_2 \pm \boldsymbol{e}_3 \pm \boldsymbol{e}_4\,.$$

E_6

$$\pm \boldsymbol{e}_i + \pm \boldsymbol{e}_j;\quad 1 \le i \ne j \le 5$$
$$\frac{1}{2}(\pm \boldsymbol{e}_1 \pm \boldsymbol{e}_2 \pm \cdots \pm \boldsymbol{e}_5) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_6\,.$$

この最後の表式では + 符号が偶数個ある．

E_7

$$\pm \boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j;\quad 1 \le i \ne j \le 6$$
$$\pm \sqrt{2}\boldsymbol{e}_7$$
$$\frac{1}{2}(\pm \boldsymbol{e}_1 \pm \boldsymbol{e}_2 \pm \cdots \pm \boldsymbol{e}_6) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_7\,.$$

この最後の表式では + 符号が偶数個ある．

E_8

$$\pm \boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j;\quad 1 \le i \ne j \le 7$$
$$\frac{1}{2}(\pm \boldsymbol{e}_1 \pm \boldsymbol{e}_2 \pm \cdots \pm \boldsymbol{e}_7) \pm \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_8\,.$$

この最後の表式では + 符号が偶数個ある．

A.2　一般相対論への短い入門

時空のもっとも一般的なパラメーターつけかえ，一般座標変換は，

$$\bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x) \qquad \text{(A.2.1)}$$

で与えられる．チェイン則を用いれば，このパラメーターつけかえの下で微分と偏微分が

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} d\bar{x}^\nu$$
$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu} \tag{A.2.2}$$

と変換することがわかる．微分 dx^μ は**反変的に**(contravariantly)変換するといい，偏微分 ∂_μ は**共変的に**(covariantly)変換するという．それとの類推で，同じように変換するベクトルを定義する：

$$A_\mu{}' = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} A_\nu$$
$$B^{\mu\prime} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} B^\nu \,. \tag{A.2.3}$$

テンソル $T^{\mu\nu\lambda\cdots}_{\alpha\beta\gamma\cdots}$ は，単にいくつかのベクトルの積のように変換するものである．テンソルについている添字の数をテンソルの**ランク**という．

共変と反変テンソルの縮約が不変量を与えることは容易に示せる：

$$A_\mu B^\mu = \text{不変量}\,. \tag{A.2.4}$$

またスカラーの偏微分がベクトルであることも示せる：

$$\partial_\mu \phi = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \partial_\nu \phi \,. \tag{A.2.5}$$

しかし，テンソルの偏微分がそれ自身テンソルでないために，一般共変性の基本的な問題が生じる．この情況を救うには，Christoffel 記号と呼ばれる別の量を加えなければならない．それはテンソルの微分を本当のテンソルに変えてくれるものである：

$$\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda \,. \tag{A.2.6}$$

ここで，

$$(\nabla_\mu A_\nu)' = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\nu} \nabla_\lambda A_\alpha \tag{A.2.7}$$

を要求する．これによりテンソルではない Christoffel 記号の変換性が一意的に決まる．

もちろん．反変ベクトルの共変微分

$$\nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} A^\lambda \tag{A.2.8}$$

および，ランク r の任意のテンソルの共変微分も定義できる．

今までは Christoffel 記号，いや時空にさえも制限をつけていなかった．ここでこの空間上の計量を定義して，不変な長さを

$$ds^2 = dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu \tag{A.2.9}$$

と定義しよう．ただし $g_{\mu\nu}$ は計量で，2 階テンソルとして変換する．

さて計量の共変微分が 0 であると定義することにより，考えている計量を制限し

よう：

$$\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = 0\,. \tag{A.2.10}$$

みたすべき式は

$$D \times \frac{1}{2}D(D+1) \tag{A.2.11}$$

だけあり，Christoffel 記号がその下の添字について対称とすれば，これはちょうど Christoffel 記号の成分の数になっていることに注意しよう．したがって，Christoffel 記号について解いて計量テンソルで表すことができる：

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} &= g^{\alpha\beta}\Gamma_{\mu\nu,\beta} \\ \Gamma_{\mu\nu,\beta} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu})\,. \end{aligned} \tag{A.2.12}$$

Christoffel 記号が，その下の添字について対称と仮定したことに注意しよう．一般にはこれは正しくなく，Christoffel 記号の反対称成分は**ねじれ率**(**torsion**)テンソルと呼ばれるものになっている：

$$T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\,. \tag{A.2.13}$$

平坦な空間では，

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0 \tag{A.2.14}$$

が成り立つ．場の微分は平行移動を起こすので，直観的にはこの式はベクトルを平坦な空間の中で閉じた曲線のまわりに平行移動させても同じベクトルになることを意味している．

ところが曲がった空間では，これは明らかに正しくない．たとえば，球面上の閉じた経路のまわりにベクトルを平行移動させると，完全に一周したときベクトルが全体として回転している．

式(A.2.14)に類似したものは，曲がった多様体に対しても得られる．共変微分をベクトルの平行移動として，また Christoffel 記号を平坦な空間からのずれの量として解釈することができる．ベクトルを閉じたループのまわりに完全に平行移動すれば，

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A_\lambda = R^\alpha_{\mu\nu\lambda}A_\alpha \tag{A.2.15}$$

が得られる．ここで，

$$R^\alpha_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu\Gamma^\alpha_{\nu\lambda} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\lambda} - \Gamma^\alpha_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\mu\lambda} \tag{A.2.16}$$

である．

次にこの形式で作用を作ることを試みよう．まず，積分の体積は本当のスカラーではないことに注意する：

$$d^Dx = \det\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}_\nu}\right] d^D\bar{x}\,. \tag{A.2.17}$$

不変量を作るには，計量テンソルの行列式の平方根をかけなければならない：

$$\sqrt{-g} = \det\left[\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}\right]\sqrt{-\bar{g}}\,. \tag{A.2.18}$$

この 2 つの積は不変量である：

$$\sqrt{-g}d^Dx = \text{不変量}\,. \tag{A.2.19}$$

ヤコビアン因子のために，計量テンソルの行列式の平方根はスカラーとして変換しないことに注意しよう．それは**密度**として変換するという．

曲率テンソルは微分を 2 つ含むことに注意しよう．実は縮約した曲率テンソル

$$R^\alpha_{\mu\nu\lambda}\delta^\mu_\alpha g^{\nu\lambda} = R \tag{A.2.20}$$

は微分を 2 つもち，計量テンソルと Christoffel 記号で書ける**唯一の**スカラーである．したがって，2 つの微分をもつ**唯一の**可能な作用は，

$$S = -\frac{1}{2\kappa^2}\int d^Dx\sqrt{-g}R \tag{A.2.21}$$

だけである．

この形式を一般化してスピノールを含めることはできない．変換行列

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \tag{A.2.22}$$

を GL(D) の要素として扱えば，**この群に有限次元スピノール表現**はないことがわかるからである．したがって，計量テンソルだけではスピノールを定義できない．

この情況を救うために，多様体のすべての点に平坦な**接空間**を構成する．それは O(D) 対称性をもつ．接空間中のベクトルをローマ添字 $a, b, c, d, \ldots$ で定義しよう．そして**フィアーバイン**を，x 空間から接空間へ移したりその逆を行う行列として定義しよう：

$$\begin{aligned} e^a_\mu e^a_\nu &= g_{\mu\nu} \\ e^{\alpha a} &= g^{\alpha\beta}e^a_\beta \\ e^a_\alpha e^{\alpha b} &= \delta^{ab}\,. \end{aligned} \tag{A.2.23}$$

これで接空間上または底空間上のいずれでも定義されたガンマ行列の集合を定義できる：

$$\begin{aligned} \gamma^a e^{a\mu} &= \gamma^\mu \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= -2g^{\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{A.2.24}$$

したがって，スピノールの微分演算子は

$$\gamma^a e^{a\mu}\partial_\mu = \gamma^\mu\partial_\mu = \partial\!\!\!/ \tag{A.2.25}$$

となる．

この接空間を用いて，スピノール ψ の共変微分を定義できる：

$$\nabla_\mu\psi = \partial_\mu\psi + \omega^{ab}_\mu\sigma^{ab}\psi\,. \tag{A.2.26}$$

ここで σ^{ab} は 2 つのガンマ行列の反対称積，ω^{ab}_μ は**スピン接続**と呼ばれるものである．

スピン接続は添字 μ に関して，本当のテンソルであることに注意しよう．共変微分は，局所的ローレンツ変換の下で次のように共変的に変換する：

$$\psi \to e^M \psi,\ \nabla_\mu \psi \to e^M \nabla_\mu \psi\,. \tag{A.2.27}$$

一般相対論の $O(3,1)$ 定式化を用いて，Christoffel 記号なしですませることもできる．

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu^{ab} M^{ab} \tag{A.2.28}$$

と定義できるのである．ここで M はローレンツ群の生成子である．すると，

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = R_{\mu\nu}^{ab} M^{ab} \tag{A.2.29}$$

が得られる．ここで，

$$R_{\mu\nu}^{ab} = \partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} + \omega_\mu^{ac}\omega_\nu^{cb} - \omega_\nu^{ac}\omega_\mu^{cb} \tag{A.2.30}$$

である．このテンソル $R_{\mu\nu}^{ab}$ が曲率テンソルのもう 1 つの定式化を与える．

また，フィアーバインの共変微分が 0 に等しいことも要求する：

$$\nabla_\mu e_\nu^a = \partial_\mu e_\nu^a + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a + \omega_\mu^{ab} e_\nu^b = 0\,. \tag{A.2.31}$$

この式を $\mu\nu$ につき反対称化すれば，Christoffel 記号は落ちる．それでスピン接続は，

$$D \times \frac{1}{2} D(D-1) \tag{A.2.32}$$

個の成分をもつことに注意しよう．これはちょうど上の式を反対称化したものの成分の数である．したがってフィアーバインにより接続を表すことができる．Christoffel 記号とフィアーバインは，お互いに非常に複雑な関係で与えられるようになっている．

これで Christoffel 記号と接続場の形が求まったので，2 つの形式での曲率テンソルの間の関係を求めることができる：

$$R_{\mu\nu} = R(\Gamma)_{\mu\alpha\nu}^\alpha = R(\omega)_{\mu\alpha}^{ab} e_{a\nu} e_b^\alpha\,. \tag{A.2.33}$$

次に任意のスピノールをとり，面積 $\Delta^{\mu\nu}$ の閉じた回路のまわりに平行移動させれば，

$$\psi \longrightarrow (1 + \Delta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{ab} \sigma^{ab})\psi \tag{A.2.34}$$

を得る．σ^{ab} 行列はユークリッド的ローレンツ変換 $O(D)$ の生成子であることに注意しよう．こうして閉経路のまわりの平行移動をすれば，スピノールはもとの方向から

$$\Delta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{ab} \tag{A.2.35}$$

に比例する角度だけ回転される．1 つの点から出発して，何回も閉経路をまわることができることに注意しよう，そのたびにスピノールは回転する．それは群を作る．実はこの群は単なる $O(D)$ であり，ホロノミー群と呼ばれるものである．

A.3　微分形式の理論への短い入門

1 形式 A を

$$A = A_\mu dx^\mu \tag{A.3.1}$$

で定義しよう．ここで A_μ はベクトル場で，微分 dx^μ はここでは反交換する量である：

$$
\begin{aligned}
dx^\mu \wedge dx^\nu &= -dx^\nu \wedge dx^\mu \\
dx^\mu \wedge dx^\mu &= 0.
\end{aligned}
\tag{A.3.2}
$$

微分演算子を，

$$
d = dx^\mu \partial_\mu \tag{A.3.3}
$$

と定義しよう．微分は交換するので

$$
[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0 \tag{A.3.4}
$$

したがって，

$$
d^2 = 0 \tag{A.3.5}
$$

となり，d がべき零であることに注意しよう．

次に，2 形式

$$
F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{A.3.6}
$$

を定義しよう．ベクトル場に付随した曲率は，2 形式になることに注意しよう：

$$
\begin{aligned}
F = dA &= dx^\mu \partial_\mu A_\nu dx^\nu \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu .
\end{aligned}
\tag{A.3.7}
$$

d 演算子はべき零なので，

$$
dF = d^2 A = 0 \tag{A.3.8}
$$

を得る．このように微分形式によって表せば，マクスウェル理論のビアンキ恒等式は d のべき零性にほかならないのである．

次の場合には，形式 ω は**閉**(closed)であると呼ぶ：

$$
\text{閉}：d\omega = 0 . \tag{A.3.9}
$$

また次の場合には，形式 ω は**完全**(exact)であると呼ぶ．ある形式 Q に対し，

$$
\text{完全}：\omega = dQ . \tag{A.3.10}
$$

したがって曲率形式 F は 1 形式 A の微分として書けるので完全である．またビアンキ恒等式のために，それは閉でもある．

生成子 λ_a をもつ局所的ゲージ群を組み合わせることもできる．

$$
A = A_\mu^a \lambda_a dx^\mu \tag{A.3.11}
$$

とすると，曲率形式は，

$$
F = dA + A \wedge A \tag{A.3.12}
$$

である．さらに，

$$
\Lambda = \Lambda^a \lambda_a \tag{A.3.13}
$$

の下での Yang-Mills 場のゲージ変換は,

$$\delta A = d\Lambda + A \wedge \Lambda - \Lambda \wedge A \tag{A.3.14}$$

である. 場 A の変分を曲率 F に代入すれば,

$$\delta F = F \wedge \Lambda - \Lambda \wedge F \tag{A.3.15}$$

を得る. したがって作用の変分は 0 である:

$$\delta(\mathrm{Tr}\, F^2) = 2\mathrm{Tr}(F \wedge \Lambda) - 2\mathrm{Tr}(\Lambda \wedge F) = 0. \tag{A.3.16}$$

さて, アノーマリー項 $F\tilde{F}$ を微分形式の言葉で書こう. 軸性カレントの発散も 2 次曲率の平方であり, 後者も全微分になっている. 微分形式の言葉では, これが完全形式であることがわかる:

$$\mathrm{Tr}(F \wedge \tilde{F}) = d\omega_3\,. \tag{A.3.17}$$

ここで,

$$\omega_3 = \mathrm{Tr}(AdA + \frac{2}{3}A^3) \tag{A.3.18}$$

である. ω_3 は 3 形式で, Chern-Simons 形式と呼ばれる. さらにそのゲージ変換は別の形式になり完全である:

$$\delta\omega_3 = \mathrm{Tr}(d\Lambda \wedge dA) = d\omega_2\,. \tag{A.3.19}$$

ここで,

$$\omega_2 = \mathrm{Tr}(\Lambda \wedge dA) \tag{A.3.20}$$

である.

これらの恒等式は Yang-Mills 理論にも, 一般相対論にも同様に適用できることにも注意しよう. 重力に対してはゲージ群は O(3,1) である. 言い換えると重力は 2 つのゲージ不変性, 座標 x の一般共変性と接空間の局所的ローレンツ不変性とをもっている. 後でこのことをもっと説明する.

一般に N 形式は,

$$\omega_N = \omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_N} \tag{A.3.21}$$

と定義される. もちろん上の式は全部, 形式の理論を使わないでも導ける. しかし形式は強力な速記法を与えてくれ, 複雑な数式を扱いやすくしてくれるのである. たとえばストークスの定理は, 形式の言葉で表せば,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \tag{A.3.22}$$

となることに注意しよう. ここで ∂M は多様体 M の境界である.

これらの形式の簡単な性質をいくつか示すと,

$$\begin{aligned} \omega_p \wedge \omega_q &= (-1)^{pq}\omega_q \wedge \omega_p \\ d(\omega_p \wedge \omega_q) &= d\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_q \end{aligned} \tag{A.3.23}$$

である．

また Hodge $*$ 演算子を導入して，n 次元の p 形式の双対をとってそれを $(n-p)$ 形式に変えられるようにしよう：

$$*(dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p})=\frac{|g|^{1/2}}{(n-p)!}\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\mu_{p+1}\cdots\mu_n}dx^{\mu_{p+1}}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_n}\,. \tag{A.3.24}$$

この $*$ 演算子の性質をいくつか示すと，

$$\begin{aligned} **\omega_p&=(-1)^{p(n-p)}\omega_p\\ \omega_p\wedge *\omega_q&=\omega_q\wedge *\omega_p \end{aligned} \tag{A.3.25}$$

である．

以下の数ページで，不変多項式は閉でも完全でもあるという第 8 章の主張を証明することにする．不変多項式は，

$$P(\alpha)=P(g^{-1}\alpha g) \tag{A.3.26}$$

をみたすものとして定義する．

まず次数 r の斉次不変多項式を定義しよう．これは形式 α_i に依存しており，

$$P=P(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r) \tag{A.3.27}$$

と書けるものである．P の中の各形式を別々に微分することに注意して，この多項式を微分しよう：

$$dP=\sum_{1\le i\le r}(-1)^{d_1+\cdots+d_{i-1}}P(\alpha_1,\ldots,d\alpha_i,\ldots,\alpha_r)\,. \tag{A.3.28}$$

この符号は微分 d が形式 α_i をとびこすたびに，符号をひろうからである：

$$d\alpha_i=(d\alpha_i)+\alpha_i d(-1)^{d_i}\,. \tag{A.3.29}$$

さて，

$$\alpha\longrightarrow g^{-1}\alpha g \tag{A.3.30}$$

と仮定する．g が 1 に近いときはいつでも

$$\begin{aligned} g&=1+\omega\\ \delta\alpha&=-\omega\wedge\alpha+\alpha\wedge\omega \end{aligned} \tag{A.3.31}$$

と書くことができる．このずらしの下で，r 次斉次多項式 P の変化を計算しよう：

$$\begin{aligned} \delta P(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)=0=\sum_{i\le i\le r}&(-1)^{d_1+\cdots+d_{i-1}}[P(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\omega\wedge\alpha_i,\ldots,\alpha_r)\\ &-(-1)^{d_i}P(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_i\wedge\omega,\ldots,\alpha_r)]. \end{aligned} \tag{A.3.32}$$

そこで dP と δP の両方の寄与を加える．すると，

$$dP+\delta P=\sum_{1\le i\le r}(-1)^{d_1+\cdots+d_i}P(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,D\alpha_i,\ldots,\alpha_r) \tag{A.3.33}$$

を得る．そこで，各 α_i をビアンキ恒等式に従う曲率形式にすると $D\alpha_i = 0$ となる．こうして前に主張したように，

$$dP(\Omega) = 0 \tag{A.3.34}$$

を得る．

証明の次の部分はもう少し複雑である．まず

$$\begin{aligned}\Omega\ &= d\omega + \omega \wedge \omega \\ \Omega' &= d\omega' + \omega' \wedge \omega'\end{aligned} \tag{A.3.35}$$

と定義する．われわれの計画は，ある形式 Q に対し，

$$P(\Omega') - P(\Omega) = dQ \tag{A.3.36}$$

を示すことである．

まず Ω と Ω' の間を連続的につなぐような曲率形式を書こう：

$$\begin{aligned}\omega_t &= \omega + t\eta \\ \eta &= \omega' - \omega\end{aligned} \tag{A.3.37}$$

とすると，変数 t により，2 つの形式の間がつながることに注意しよう：

$$\begin{aligned}t = 0 &\longrightarrow \omega_t = \omega \\ t = 1 &\longrightarrow \omega_t = \omega'\,.\end{aligned} \tag{A.3.38}$$

これで t の関数として，この 2 つの間をつなぐ曲率形式が容易に見つけられる：

$$\Omega_t = d\omega_t + \omega_t \wedge \omega_t\,. \tag{A.3.39}$$

ここで，

$$t = 0 \longrightarrow \Omega_t = \Omega \tag{A.3.40}$$

である．t が 0 から 1 へ変化するとき，形式が Ω から Ω' へ変化することに注意しよう．

さて，形式 q を

$$q(\beta, \alpha) = rP(\beta, \alpha, \alpha, \ldots (r-1 \text{ 回}) \ldots \alpha) \tag{A.3.41}$$

としよう．ここで形式 α は，不変多項式の中に $(r-1)$ 回くり返してある．この形式 q が P が完全形式であることを示すための鍵になる．

前に与えた推論により，q を微分すれば，

$$\begin{aligned}dq(\eta, \Omega_t) &= rdP(\eta, \Omega_t \cdots (r-1 \text{ 回}) \cdots \Omega_t) \\ &= q(D\eta, \Omega_t) - r(r-1)tP(\eta, \Omega_t \wedge \eta - \eta \wedge \Omega_t, \Omega_t, \Omega_t, \ldots, \Omega_t)\end{aligned} \tag{A.3.42}$$

を得る．ところが q が不変多項式であるから，次の恒等式が成り立つ：

$$2q(\eta \wedge \eta, \Omega_t) + r(r-1)P(\eta, \Omega_t \wedge \eta - \eta \wedge \Omega_t, \Omega_t, \ldots, \Omega_t) = 0\,. \tag{A.3.43}$$

この式では，

$$g = 1 + \eta \tag{A.3.44}$$

を用いた．両方の式を一緒にすれば，

$$dq(\eta,\Omega_t) = q(D\eta,\Omega_t) + 2tq(\eta\wedge\eta,\Omega_t) = \frac{dP(\Omega_t)}{dt} \tag{A.3.45}$$

を得る．こうして，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dP(\Omega_t)}{dt}dt &= P(\Omega') - P(\Omega)\\ &= d\int_0^1 q(\omega'-\omega,\Omega_t)dt = dQ\end{aligned} \tag{A.3.46}$$

を得る．こうして最終的結果

$$\begin{aligned}P(\Omega') - P(\Omega) &= dQ\\ Q &= \int_0^1 q(\omega'-\omega,\Omega_t)dt + \text{閉形式}\end{aligned} \tag{A.3.47}$$

を得る．したがって曲率形式による不変多項式は，閉でありかつ完全である．

A.4　超対称性への短い入門

1960年代後半には物理学は，SU(3) のような内部対称性の群とローレンツまたはポアンカレ群を統合するような群を作ろうと試みていた．内的群 U とポアンカレ群 P の自明でない統合である群 M を探していたのである：

$$M \supset U \otimes P\,. \tag{A.4.1}$$

SU(6, 6) のような群に強い興味がもたれていた．ところが有名な Coleman-Mandula の定理により，このプログラムは不可能であることが示された．非コンパクトな群にはユニタリーな有限次元表現はない．したがって次のいずれかが成り立つ．

(1) 群 M は連続的質量をもつ．

(2) 群 M は各既約表現に無限個の粒子をもつ．

いずれにしてもこれは破局である．ところが**超群**(super groups) または**次数つきリー群**(graded Lie groups) ならば，この否定定理を逃れられることがわかった．

リーとカルタンの仕事では，パラメーター ρ_i が実の場合の連続単純群だけを取り扱っている．しかしもしこれらのパラメーターにグラスマン値を許せば，古典群を超群に拡張することができるのである．

われわれが興味のある2つの無限に大きな群は，Osp(N/M) と SU(N/M) である．

まず群 O(N) から始めよう．それは次の不変量を保存する：

$$\mathrm{O}(N) : x_i x_i = \text{不変量}\,. \tag{A.4.2}$$

また群 Sp(M) は，次の形式を保存する：

$$\mathrm{Sp}(M) : \theta_m C_{mn}\theta_n = \text{不変量}\,. \tag{A.4.3}$$

ここで θ_i がグラスマン値なので，C 行列は実反対称行列である．そこで**直交シンプレクティック群**を，次の和を保つ群として定義する：

$$\mathrm{Osp}(N/M): x_i x_i + \theta_m C_{mn} \theta_n = \text{不変量}. \tag{A.4.4}$$

直交シンプレクティック群は，明らかに積

$$\mathrm{Osp}(N/M) \supset \mathrm{O}(N) \otimes \mathrm{Sp}(M) \tag{A.4.5}$$

を含んでいる．この群の行列表示を与えるもっとも簡単な方法は，次の形を使うことである：

$$\mathrm{Osp}(N/M) = \begin{bmatrix} \mathrm{O}(N) & A \\ B & \mathrm{Sp}(M) \end{bmatrix}. \tag{A.4.6}$$

A と B の行列には，簡単な制限がついている．

同様に超ユニタリー群は，複素形

$$\begin{aligned} (x^i)^* x^j \delta_{ij} + (\theta^m)^* \theta^n g_{mn} \\ g_{mn} = \pm \delta_{mn} \end{aligned} \tag{A.4.7}$$

を保つ群として定義できる．この群のボソン的分解は，

$$\mathrm{SU}(N/M) \supset \mathrm{SU}(N) \otimes \mathrm{SU}(M) \otimes \mathrm{U}(1) \tag{A.4.8}$$

で与えられる．

ここで，Osp(1/4) の生成子を

$$M_A = (P_\mu, M_{\mu\nu}, Q_\alpha) \tag{A.4.9}$$

と書こう．これらは交換関係

$$[M_A, M_B]_\pm = f_{AB}^C M_C \tag{A.4.10}$$

をもつ．具体的に書けば，超対称性生成子を含む交換子は，

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 2(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu \\ [Q_\alpha, P_\mu] &= 0 \\ [Q_\alpha, M_{\mu\nu}] &= (\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta \end{aligned} \tag{A.4.11}$$

である．ここでこれらの生成子の具体的表示が必要である．それは，ちょうど

$$P_\mu = -i\partial_\mu \tag{A.4.12}$$

が x 空間の並進の生成子であるのと同じようにするのが望ましい．今は時空の概念を拡張して，x 座標の超対称な相手も含めなければならない．そのために**超空間**(superspace) を，対

$$x_\mu,\ \theta_\alpha \tag{A.4.13}$$

によって作られる空間として定義しよう．ここで θ_α はグラスマン数である．そして超対称性の生成子

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha} - i(\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu \tag{A.4.14}$$

を定義しよう．ここで θ はマヨラナ条件 $\theta = C\bar{\theta}^T$ をみたす．この特定の表示をとったのは，このような 2 つの生成子の間の反交換子が，要求通り並進を与えるからである：

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = -2(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} i\partial_\mu\,. \tag{A.4.15}$$

$\bar{\varepsilon}Q$ は超空間で次の変換を生成することに注意しよう：

$$\begin{aligned} x_\mu &\longrightarrow x_\mu - i\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\theta \\ \theta_\alpha &\longrightarrow \theta_\alpha + \varepsilon_\alpha\,. \end{aligned} \tag{A.4.16}$$

また演算子

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha} + i(\gamma^\mu\partial_\mu\theta)_\alpha \tag{A.4.17}$$

も構成できる．これは超対称性生成子と反交換する：

$$\{Q_\alpha, D_\beta\} = 0\,. \tag{A.4.18}$$

これは対称性をこわさずに超対称性の表現を制限するのに使えるので，非常に重要である．これにより可約な表現から，既約なものが引き出せるのである．

超対称性の下で不変な作用を構成しよう．まず**超場** V を，この超空間の中のもっとも一般的なべき展開できるものとして定義しよう：

$$V(x,\theta)\,. \tag{A.4.19}$$

すると，超対称性の表現は

$$\delta V(x,\theta) = V(x+\delta x, \theta+\delta\theta) - V(x,\theta) = \bar{\varepsilon}^\alpha Q_\alpha V(x,\theta) \tag{A.4.20}$$

で与えられる．この定義から 2 つの超場の積も超場であることがわかることに注意しよう：

$$V_1 V_2 = V_3.$$

したがってこの単純な積の規則により，超対称性の表現の大きな集合を作ることができる．そこで場の具体的な変換を計算しよう．恒等式

$$\mathrm{O}(4) = \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(2) \tag{A.4.21}$$

を用いて，4 成分のスピノールを 2 つの 2 成分スピノールにわけるのが便利である．添字 A と $\dot{A}$ $(A = 1,2)$ を用いて，マヨラナ 4 スピノールをその $\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)$ の内容を用いて書くのである：

$$\begin{aligned} \chi^\alpha &= \begin{pmatrix} \chi^A \\ \bar{\chi}_{\dot{A}} \end{pmatrix} \\ \bar{\chi}_\alpha &= (\chi_A, -\bar{\chi}^{\dot{A}})\,. \end{aligned} \tag{A.4.22}$$

これの逆をとれば，

$$\begin{aligned} \chi^A &= \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\chi \\ \bar{\chi}_{\dot{A}} &= \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\chi\,, \end{aligned} \tag{A.4.23}$$

および

$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon_{AB} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot{A}\dot{B}} \end{pmatrix} \tag{A.4.24}$$
$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon^{AB} = -\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} = -\varepsilon^{\dot{A}\dot{B}}, \varepsilon_{12} = 1$$

を得る．この記法では，共変微分は

$$\begin{aligned} D_A &= \frac{\partial}{\partial\theta_A} - i(\sigma^\mu)_{A\dot{A}}\theta^{\dot{A}}\partial_\mu \\ D_{\dot{A}} &= \frac{\partial}{\partial\theta^{\dot{A}}} - i(\sigma^\mu)_{A\dot{A}}\theta^{A}\partial_\mu \end{aligned} \tag{A.4.25}$$

と書ける．ここで，

$$\sigma^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma}) \tag{A.4.26}$$

である．

実ベクトル超場 V は

$$\begin{aligned} V(x,\theta,\bar{\theta}) = C - i\theta\chi - i\bar{\chi}\bar{\theta} - \frac{i}{2}\theta^2(M - iN) + \frac{i}{2}\bar{\theta}^2(M + iN) - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu \\ + i\bar{\theta}^2\theta(\lambda - \frac{i}{2}\partial\!\!\!/\bar{\chi}) - i\theta^2\bar{\theta}(\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\partial\!\!\!/\chi) - \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2(D + \frac{1}{2}\Box C) \end{aligned} \tag{A.4.27}$$

と分解できる．これからこれらの 16 個の場に対し，ζ で決まる超対称性変換を読みとることができる：

$$\begin{aligned} \delta C &= \bar{\zeta}\gamma_5\chi \\ \delta\chi &= (M + \gamma_5 N)\zeta - i\gamma^\mu(A_\mu + \gamma_5\partial_\mu C)\zeta \\ \delta M &= \bar{\zeta}(\lambda - i\partial\!\!\!/\chi) \\ \delta N &= \bar{\zeta}\gamma_5(\lambda - i\partial\!\!\!/\chi) \\ \delta A_\mu &= i\bar{\zeta}\gamma_\mu\lambda + \bar{\zeta}\partial_\mu\chi \\ \delta\lambda &= -i\sigma^{\mu\nu}\zeta\partial_\mu A_\nu - \gamma_5\zeta D \\ \delta D &= -i\bar{\zeta}\partial\!\!\!/\gamma_5\lambda. \end{aligned} \tag{A.4.28}$$

これをベクトル超場と呼んだのは，その表現にベクトル粒子を含むからである(超場自身がローレンツ群の下でベクトル場だからではない)．一般に，ベクトル場は複素であり得て**可約**である．既約表現を作るには，その超対称性の性質を損わないような制限を課すのが便利である．したがってその制限は超対称性生成子と交換しなければならない．

D_α は超対称性生成子と交換するので，この微分を超場に作用させても超対称性の表現が得られることに注意する．この単純な原理に基づいて，超対称性のいろいろな表現を構成することを試みよう．まず，

$$D_{\dot{A}}\phi = 0 \tag{A.4.29}$$

が課せる．この制限をみたす超場は**カイラル超場**と呼ばれる．それはもとの超場の場の数の半分をもつが，群の下で正しく変換することに注意する．カイラル超場は，

$$\phi(x,\theta) = A + 2\theta\psi - \theta^2 F \tag{A.4.30}$$

の分解をもつ．この超場の変分は，

$$\delta\phi = -i[\phi, \zeta Q + \bar{Q}\bar{\zeta}] \tag{A.4.31}$$

から読みとれる．容易に

$$\begin{aligned} \delta A &= 2\zeta\psi \\ \delta\psi &= -\zeta F - i\partial_\mu A\sigma^\mu\bar{\zeta} \\ \delta F &= -2i\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\zeta} \end{aligned} \tag{A.4.32}$$

を得る．またカイラル超場に

$$D_A\phi = 0 \tag{A.4.33}$$

などの他の制限をつけることも考えられる．しかしこの 2 つの条件を同時に課すと，ϕ は定数になってしまうことがわかる．

別の制限として，

$$D^A D_A\phi = 0 \tag{A.4.34}$$

も考えられる．これは線形多重項(linear muitiplet)を与える．(残念ながら，これに基づく作用はカイラル超場に基づく作用と同等であり，何も新しいことは得られない.)別の制限として，

$$[D_A, D_{\dot{B}}]\phi = 0 \tag{A.4.35}$$

も考えられる．残念ながらこれは定数場を与える．また，

$$D_{\dot{B}}D^A D_A\phi = 0 \tag{A.4.36}$$

を課してみる．これも再びカイラル超場にもどる．最後に，実の ϕ に対し

$$D_A\bar{D}^2\phi = 0 \tag{A.4.37}$$

を試してみる．これはまったく新しい超場を与え，Yang-Mills 作用を作るのに使える．

まとめると，超対称性の既約表現として変換する新しい場は，カイラル超場，ベクトル超場，および Yang-Mills 超場だけである．考えられる他の組み合わせは，空であるか，もとの集合に帰着するかのどちらかである．

さて，グラスマン積分を定義することにより不変な作用を作る問題を議論しよう．

これらのグラスマン変数についての積分は，注意して定義しなければならない．実数についてのふつうの積分は，もちろん並進不変である：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi(x+c)\,. \tag{A.4.38}$$

ここで c は実数の変位である．そこでグラスマン値の積分も同じ性質をもってほしい．すなわち，

$$\int d\theta\,\phi(\theta)=\int d\theta\,\phi(\theta+c) \tag{A.4.39}$$

この関数 $\phi(\theta)$ をテイラー級数にべき展開すれば，簡単な表式

$$\phi(\theta)=a+b\theta \tag{A.4.40}$$

が得られる．そこで，

$$I_0=\int d\theta;\quad I_1=\int d\theta\,\theta \tag{A.4.41}$$

と定義すれば，並進不変性により

$$\int d\theta\,\phi(\theta)=aI_0+bI_1=(a+bc)I_0+bI_1 \tag{A.4.42}$$

でなければならない．したがって $I_0=0$ でなければならず，I_1 は 1 に規格化できる：

$$I_0=0;\quad I_1=1\,. \tag{A.4.43}$$

すなわち，

$$\int d\theta=0;\quad \int d\theta\,\theta=1\,. \tag{A.4.44}$$

言い換えると，奇妙に見える恒等式

$$\int d\theta=\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{A.4.45}$$

を得る．これらの恒等式を用いれば，

$$\int\prod_{i=1}^{N}d\theta_i\,d\bar{\theta}_i\exp\left[\sum_{i,j=1}^{N}\bar{\theta}_iA_{ij}\theta_j\right]=\det(A_{ij}) \tag{A.4.46}$$

が示せる．

こうして一般に，不変な作用

$$\begin{aligned}&\int d^4\theta\,d^4xV(x,\theta)\longrightarrow D\ \text{項}\\&\int d^2\theta\,d^4x\phi(x,\theta)\longrightarrow F\ \text{項}\end{aligned} \tag{A.4.47}$$

が作れる((A.4.27, 30)を見よ)．第 1 の積分は超場(A.4.27)の D 項だけを取り出す．第 2 の積分はカイラル超場(A.4.30)の F 項だけを取り出す．一般にこれらを「D」項と「F」項と呼ぶ．そしてこれらが不変

$$\delta\int d^4\theta\,d^4xV=\int d^4\theta\,d^4x\bar{\varepsilon}^{\alpha}Q_{\alpha}V=0 \tag{A.4.48}$$

であることが確かめられる．これは，x または θ 空間の全微分の積分が 0 だからである．

さて，F と D 不変項に基づく簡単な不変作用を書き下そう．もっとも簡単な不変作用は，Wess-Zumino 模型と呼ばれるものである：

$$S=\int d^4\theta\,d^4x\bar{\phi}\phi+\left(\int d^2\theta\,d^4x\left[\mu\phi+\frac{1}{2}m\phi^2+\frac{\lambda}{3!}\phi^3\right]+\text{h.c.}\right)\,. \tag{A.4.49}$$

θ 積分を実行した後，成分で書けば，これは

$$S=\int d^4x\left\{-\frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2-\frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2-\frac{1}{2}\bar{\chi}\gamma^\mu\partial_\mu\chi+\frac{1}{2}F^2+\frac{1}{2}G^2\right\} \tag{A.4.50}$$

となる．今はスピン 0 とスピン $\frac{1}{2}$ の多重項 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ をもつ超対称性の既約表現の作用を構成したことに注意しよう．$\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 多重項を構成するには，マクスウェル作用

$$S=\int d^4xd^2\theta W^AW_A \tag{A.4.51}$$

が必要である．ここで，

$$\begin{aligned}W_A&=\bar{D}^2D_AV\\ W_{\dot{A}}&=D^2D_{\dot{A}}V\\ D_{\dot{A}}W_B&=0\end{aligned} \tag{A.4.52}$$

で，V は実ベクトル超場で，

$$\delta V=\bar{\Lambda}-\Lambda \tag{A.4.53}$$

と変換する．V は実であるが，Λ はカイラルである．すなわち，$\Lambda^\dagger=-\bar{\Lambda}$．この変換の下で

$$\delta W_A=0 \tag{A.4.54}$$

を得るので，作用は超対称性と U(1) ゲージ変換の下で明らかに不変になっている．ベクトル超場がマクスウェル場 A_μ を含み，カイラル超場 Λ がゲージパラメーター λ を含むことに注意する．成分で書くと，作用は

$$S=\int d^4x\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2-\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi+\frac{1}{2}D^2\right) \tag{A.4.55}$$

に等しく，

$$\begin{aligned}\delta A_\mu&=\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\psi\\ \delta\psi&=\left(-\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\gamma_5D\right)\varepsilon\\ \delta D&=\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi\end{aligned} \tag{A.4.56}$$

の下で不変である．

次に調べたい多重項は，$(2,\frac{3}{2})$ 多重項である．歴史的には，Rarita-Schwinger 理論は他の場に矛盾なく結合できないので，基本的に欠陥があると考えられていた．ところがその際に Rarita-Schwinger 場をグラビトンに結合させることを無視していたのである．この多重項を考えた場合には矛盾がすべて消えるのである．

A.5 超重力理論への短い入門

超重力を定式化するには，少なくとも 4 通りの方法がある．

(1) 成分 — この方法は試行錯誤によっている．しかし，これは作用のもっとも具体的な形を与える．

(2) 曲率 — この方法は群論と Yang-Mills 理論との類似を強調する．

(3) テンソル解析 — これは超対称性の表現の積の正確な規則を与える．

(4) 超空間 — これは超重力のもっともエレガントな定式化である．しかし，これはまたもっとも難しくもある．超重力の大きな N の超空間による定式化は，ねじれ率の制限があまりに難しくて解けないのでまだわかっていない．

ここでは今まで使ってきた Yang-Mills の構成と似ているので，曲率の方法を使うことにしよう．

Osp (1/4)は 14 個の生成子をもっているので，Osp (1/4)の 14 個の接続場を

$$h_\mu^A = (e_\mu^a, \omega_\mu^{ab}, \bar{\psi}_\mu^\alpha) \tag{A.5.1}$$

により定義しよう．すると，接続場の大域的な変換は，

$$\delta h_\mu^A = f_{BC}^A \varepsilon^B h_\mu^C \tag{A.5.2}$$

である．ここで，

$$\varepsilon^A = (\varepsilon^a, \varepsilon^{ab}, \bar{\varepsilon}^\alpha) \tag{A.5.3}$$

である．共変微分は，

$$\begin{aligned} \nabla_\mu &= \partial_\mu + h_\mu^A M_A \\ &= \partial_\mu + e_\mu^a P_a + \omega_\mu^{ab} M^{ab} + \bar{\psi}_{\mu,\alpha} Q^\alpha \quad (a > b) \end{aligned} \tag{A.5.4}$$

で与えられる．

場は局所的ゲージ変換の下で，

$$\delta h_\mu^A = \partial_\mu \varepsilon^A + h_\mu^B \varepsilon^C f_{CB}^A \tag{A.5.5}$$

と変換する．

さて，2 つの共変微分の交換子

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = R_{\mu\nu}^A M_A \tag{A.5.6}$$

を作ろう．ここで，

$$R_{\mu\nu}^A = \partial_\mu h_\nu^A - \partial_\nu h_\mu^A + h_\nu^B h_\mu^C f_{CB}^A \tag{A.5.7}$$

である．これは成分の形では

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^a(P) &= \partial_\mu e_\nu^a + \omega_\mu^{ab} e_\nu^b - (\mu \longleftrightarrow \nu) \\ R_{\mu\nu}^{ab}(M) &= \partial_\mu \omega_\nu^{ab} + \omega_\mu^{ac} \omega_\nu^{cb} - (\mu \longleftrightarrow \nu) \\ R_{\mu\nu}^\alpha(Q) &= \partial_\mu \bar{\psi}_\nu^\alpha + \bar{\psi}_\nu \omega_\mu^{ab} \sigma^{ab} - (\mu \longleftrightarrow \nu) \end{aligned} \tag{A.5.8}$$

となる．曲率の変分は，容易に

$$\delta R^{A}_{\mu\nu} = R^{B}_{\mu\nu}\varepsilon^{C} f^{A}_{CB} \tag{A.5.9}$$

となることが示せる．そして，超重力の作用は，

$$S = \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ R_{\mu\nu}(M)^{ab} R_{\rho\sigma}(M)^{cd} \varepsilon_{abcd} + R_{\mu\nu}(Q)^{\alpha} R_{\rho\sigma}(Q)^{\beta} (\gamma_5 C)_{\alpha\beta} \right\} \tag{A.5.10}$$

で与えられる．ところがこの作用の変分をとると，

$$R_{\mu\nu}(P)^{a} = 0 \tag{A.5.11}$$

とおかなければ，作用が全微分にならないことがわかる．つまり作用は，

$$\delta\omega^{\mu\nu}_{a} R^{a}_{\mu\nu}(P) \tag{A.5.12}$$

を除いて不変になるのである．ところが，この制限(A.5.11)を最初から課しておけば，作用はこの変換の下で確かに不変になることがわかる．

この制限は非常に不自然に見えるが，それが(A.2.31)のフィアーバインの共変微分が0となることと同じであることを認識すればそうでもない．それで作用が最終的に不変になるために，フィアーバインの共変微分を0ととることにする．

こうして最終的に作用は

$$L = -\frac{1}{2\kappa^2} eR - \frac{1}{2}\bar{\psi}_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma^{5} D_{\sigma}\psi_{\rho}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \tag{A.5.13}$$

となる．

残念ながら高い N の場合の作用は，あまりよくわかっていない．超空間の方法は高い N に対しては解かれておらず，$N=8$ 超重力はトリックを用いて構成されているのである．すなわち，時空の次元を 11 に拡張することにより，$N=1$, $D=11$ 超重力を構成して，それをコンパクト化することにより $N=8$, $D=4$ 超重力が得られたのである．

11 次元超重力を作る出発点は，同数のボソンとフェルミオンの場が必要なことを認識することである．試行錯誤により，次の取り方が同数の場を与えることがわかる：

$$\begin{aligned} e^{A}_{M} &= \frac{1}{2} 9 \times 10 - 1 = 44 \text{ 成分} \\ \psi_{M} &= \frac{1}{2}(9 \times 32 - 32) = 128 \text{ 成分} \\ A_{MNP} &= \binom{9}{3} = 84 \text{ 成分} \quad . \end{aligned} \tag{A.5.14}$$

ここでフィアーバインは横方向成分のみもち，トレースなし，また $\Gamma \cdot \psi = 0$ である．そして Cremmer, Julia, Scherk は力まかせにやって，次の作用が 11 次元で不変であることを証明した：

$$L = -\frac{1}{2\kappa^2}eR - \frac{1}{2}e\bar{\psi}_M\Gamma^{MNP}D_N\left[\frac{1}{2}(\omega+\hat{\omega})\right]\psi_P - \frac{1}{48}eF^2_{MNPQ}$$
$$-\frac{\sqrt{2}\kappa}{384}e(\bar{\psi}_M\Gamma^{MNPQRS}\psi_S + 12\bar{\psi}^N\Gamma^{PQ}\psi^R)(F+\hat{F})_{NPQR}$$
$$-\frac{\sqrt{2}\kappa}{3456}\varepsilon^{M_1\ldots M_{11}}F_{M_1\ldots M_4}F_{M_5\ldots M_8}A_{M_9M_{10}M_{11}}\,. \tag{A.5.15}$$

ここで,

$$\delta e^A_M = \frac{1}{2}\kappa\bar{\eta}\Gamma^A\psi_M$$
$$\delta A_{MNP} = -\frac{\sqrt{2}}{8}\bar{\eta}\Gamma_{[MN}\psi_{P]} \tag{A.5.16}$$
$$\delta\psi_M = \kappa^{-1}D_M(\hat{\omega})\eta + \frac{\sqrt{2}}{288}(\Gamma_M^{PQRS} - 8\delta^P_M\Gamma^{QRS})\eta\hat{F}_{PQRS}$$

であり,

$$\hat{\omega}_{MAB} = \omega_{MAB} + \frac{1}{8}\bar{\psi}^P\Gamma_{PMABQ}\psi^Q\,. \tag{A.5.17}$$

F_{MNPQ} は A_{MNP} の回転, $\hat{F}_{MNPQ}$ は F_{MNPQ} の超共変化したものである. さらに $\{\Gamma^A,\Gamma^B\} = 2\eta^{AB}$ ととって, $\Gamma^{AB} = \frac{1}{2}(\Gamma^A\Gamma^B - \Gamma^B\Gamma^A)$ のように反対称化してある. 添字 ABC は平坦で, MNP は曲がったものである.

$N=1, D=10$ 超重力は, 前の作用を切断して得られる. そのときスピノールは, 1 対のマヨラナ-ワイルグラビティーノと, 1 対のマヨラナ-ワイルスピン $\frac{1}{2}$ フェルミオンに分解する. フィアーバインは 10 次元のフィアーバインと, スカラー場 ϕ にわかれ, 反対称テンソルはボソン場 B_{MN} に分解する. こうして得られる場の集合は

$$\left\{e^A_M;\phi;B_{MN}\right\};\{\psi_M;\lambda\} \tag{A.5.18}$$

である. そして, 10 次元の最終的作用は,

$$e^{-1}L = -\frac{1}{2\kappa^2}R - \frac{1}{2}\bar{\psi}_M\Gamma^{MNP}D_N\psi_P - \frac{3}{4}\phi^{-3/2}H^2_{MNP}$$
$$-\frac{1}{2}\bar{\lambda}\Gamma^MD_M\lambda - \frac{9}{16\kappa^2}(\phi^{-1}\partial_M\phi)^2 - \frac{3\sqrt{2}}{8}\bar{\psi}_M\Gamma^N\Gamma^M\lambda(\phi^{-1}\partial_N\phi)$$
$$+\frac{\sqrt{2}\kappa}{16}\phi^{-3/4}H_{NPQ}(\bar{\psi}\Gamma^{MNPQR}\psi_R + 6\bar{\psi}^N\Gamma^P\psi^Q - \sqrt{2}\bar{\psi}_M\Gamma^{NPQ}\Gamma^M\lambda) + \cdots \tag{A.5.19}$$

である. ここで

$$
\begin{aligned}
\delta e_M^A &= \frac{\kappa}{2}\bar{\eta}\Gamma^A\psi_M \\
\delta\phi &= -\frac{\sqrt{2}\kappa}{3}\phi\bar{\eta}\lambda \\
\delta B_{MN} &= \frac{\sqrt{2}}{4}\phi^{3/4}\left(\bar{\eta}\Gamma_M\psi_N - \bar{\eta}\Gamma_N\psi_M - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\eta}\Gamma_{MN}\lambda\right) \\
\delta\lambda &= -\frac{3\sqrt{2}}{8}\phi^{-1}(\Gamma\cdot\partial\phi)\eta + \frac{1}{8}\phi^{-3/4}\Gamma^{MNP}\eta H_{MNP} + \cdots \\
\delta\psi_M &= \kappa^{-1}D_M\eta + \frac{\sqrt{2}}{32}\phi^{-3/4}(\Gamma_M^{NPQ} - 9\delta_M^N\Gamma^{PQ})\eta H_{NPQ} + \cdots .
\end{aligned}
\tag{A.5.20}
$$

$H = dB$ であり，$\cdots$ は省略している 4 体フェルミ型の項を意味している．これが IIA 型超弦の低エネルギー極限である（なぜならば，フェルミオンは次元が落ちたことから，反対のカイラリティーをもっているからである）．このようにカイラル非対称性がないので，この理論にアノーマリーはない．

しかし IIB 型の理論は同じカイラリティーのフェルミオンをもつ（したがってアノーマリーももち得る）ので，次元を落とすことによっては得られない．IIB 型は共変な作用をまったくもたないのである（しかし共変な運動方程式と，うまく定義されている光錐作用はもっている）．

次に超重力を Yang-Mills 場に結合させたい．超 Yang-Mills 多重項自身は，

$$
\{A_M^a; \chi^a\}
\tag{A.5.21}
$$

で与えられる．ここで a はアイソスピン群の要素を表す．(A.5.21) には質量殻条件をみたすとき，同数のフェルミオンとボソンがあることに注意しよう．最終的な作用は，

$$
\begin{aligned}
e^{-1}L =& e^{-1}L_{SG}(H_{MNP}) - \frac{1}{4}\phi^{-3/4}F_{MN}^aF^{MNa} - \frac{1}{2}\bar{\chi}^a\Gamma^M(D_M(\hat{\omega})\chi)^a \\
&- \frac{1}{8}\kappa\phi^{-3/8}\bar{\chi}^a\Gamma^M\Gamma^{NP}(F_{NP}^a + \hat{F}_{NP}^a)(\psi_M + \frac{1}{12}\sqrt{2}\Gamma_M\lambda) \\
&+ \frac{1}{16}\sqrt{2}\kappa\phi^{-3/4}\bar{\chi}^a\Gamma^{MNP}\chi^aH_{MNP} \\
&- \frac{1}{1536}\sqrt{2}\kappa^2\bar{\chi}^a\Gamma_{MNP}\chi^a\Gamma\bar{\psi}_Q(4\Gamma^{MNP}\Gamma^Q + 3\Gamma^Q\Gamma^{MNP})\lambda \\
&- \frac{1}{512}\kappa^2\bar{\chi}^a\Gamma_{MNP}\chi^a\bar{\lambda}\Gamma^{MNP}\lambda - \frac{1}{384}\kappa^2\bar{\chi}^a\Gamma_{MNP}\chi^a\bar{\chi}^b\Gamma^{MNP}\chi^b
\end{aligned}
\tag{A.5.22}
$$

である．ここで驚くべきことは，条件 $H = dB$ を修正して，

$$
H = dB - \frac{1}{\sqrt{2}}\kappa\omega_3
\tag{A.5.23}
$$

としなければならないことである．ただし ω_3 は Chern-Simons 項

$$
\omega_3 = \mathrm{Tr}(AF - \frac{1}{3}gA^3)
\tag{A.5.24}
$$

である．ゲージ変換の下での B の変換は，

$$\delta B = \frac{1}{\sqrt{2}}\kappa \mathrm{Tr}(\Lambda\, dA) \qquad \text{(A.5.25)}$$
$$\delta H = 0$$

である．この作用は

$$\delta A^a_M = \frac{1}{2}\phi^{3/8}\bar{\eta}\Gamma_M\chi^a$$
$$\delta\chi^a = -\frac{1}{4}\phi^{-3/8}\Gamma^{MN}\hat{F}^a_{MN}\eta + \frac{\sqrt{2}}{64}\kappa\Big\{3\bar{\lambda}\chi^a\eta - \frac{3}{2}\bar{\lambda}\Gamma^{MN}\chi^a\Gamma_{MN}\eta \qquad \text{(A.5.26)}$$
$$- \frac{1}{24}\bar{\lambda}\Gamma^{MNPQ}\chi^a\Gamma_{MNPQ}\eta\Big\}$$

の下で不変である．超重力の場の変換は(H 場を修正して)前と同じであり，変換則に加えなければならない新しい部分は，

$$\delta'\lambda = \frac{\sqrt{2}}{432}\kappa\bar{\chi}^a\Gamma^{MNP}\chi^a\Gamma_{MNP}\eta$$
$$\delta' B_{MN} = 2^{-1/2}\kappa\phi^{3/8}\bar{\eta}\Gamma_{[M}\chi^a A^a_{N]} \qquad \text{(A.5.27)}$$
$$\delta'\psi_M = -\frac{1}{256}\kappa\bar{\chi}^a\Gamma^{NPQ}\chi^a(\Gamma_{MNPQ} - 5g_{MN}\Gamma_{PQ})\eta$$

である．

ここで次の質問をする人があるかもしれない．$N=8$ 以上の超重力理論はあるだろうか？ 答はおそらく否である．これは Osp (N/4) 群の超対称生成子がスピン $\frac{1}{2}$ をもっているためである．グラビトンの最大ヘリシティー状態をとり，可能なすべての Q を作用させていくと，それはいずれ終わらなければならない．そうでなければスピン $\frac{5}{2}$ と 3 の粒子ができるからである：

$$Q_\alpha Q_\beta \cdots Q_\zeta |\,\text{グラビトン}\,\rangle . \qquad \text{(A.5.28)}$$

ところが，スピン $\frac{5}{2}$ と 3 の理論は自由理論としてはできるが，他の粒子と結合させたときは矛盾があると考えられている．こうして，2 と -2 の間には 8 つの $\frac{1}{2}$ 段階があるから，上の系列では N は 8 に等しくなることがわかる．したがって O(8) が，2 より大きいスピンを含まない最大の超重力理論となるのである．

A.6　表記法

話を明確にするために，汎関数経路積分と N 点振幅 A_N に表れる規格化因子を落としておいた．これらは読者により容易に回復できるので，問題ではないはずである．

われわれの単位系では，プランク長とプランク質量は，次に等しい：

$$L = \left[\sqrt{\hbar G c^{-3}}\right] = 1.6 \times 10^{-33}\mathrm{cm}$$
$$M = \left[\sqrt{\hbar c G^{-1}}\right] = 2.2 \times 10^{-5}\mathrm{gm} = 1.2 \times 10^{19}\mathrm{GeV}/c^2 .$$

われわれは $c = \hbar = 1$ とおく．

時空のローレンツ計量は，$(-,+,+,\ldots,+)$ を用いる．世界面上では 2 次元計量

$(-,+)$を使う．ここで，第 1 (2)の添字は τ (σ) のことである．2 次元の行列は，

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

である．ここで，

$$\bar{\psi} = \psi\rho^0$$

である．一般に，物理的運動量を表すのに k_μ を使い，固有値が運動量である演算子を表すのに p_μ を使う．しかし一般の文献のように，この区別をなくして両方を入れ替えても使う．

レッジェスロープは次の取り方をする：

$$\text{開弦に対して} \quad \alpha' = \frac{1}{2}$$
$$\text{閉弦に対して} \quad \alpha' = \frac{1}{4}.$$

可能なときはいつでも，曲がった空間の添字を表すのにギリシア文字を使う．つまり，曲がった空間の中の 26 および 10 次元ローレンツ添字を記すのに μ, ν を使う．ギリシア文字 α, β は 2 次元の曲がった世界面の添字を表すのに使う．平坦な添字は，ローレンツでも 2 次元空間でもふつうローマ字 a, b, c にする．文脈から明らかな場合には，平坦な接空間に計量$(+,+,\ldots,+)$を使うこともある．

ガンマ行列は，

$$\{\Gamma_A, \Gamma_B\} = -2g_{AB},$$
$$\Gamma_{D+1} = \Gamma_0\Gamma_1\cdots\Gamma_{D-1}$$

にとる．偶数次元では，それらは

$$\text{もし } D = 4k+2 \text{ ならば}, (\Gamma_{D+1})^2 = +1$$
$$\text{もし } D = 4k \text{ ならば}, (\Gamma_{D+1})^2 = -1$$

と規格化されている．ガンマ行列が 1 つ以上の添字をもって現れているときは，これらの添字のすべての反対称な組み合わせの和をとっている．たとえば，ガンマ行列を

$$\Gamma^{AB} = \frac{1}{2}(\Gamma^A\Gamma^B - \Gamma^B\Gamma^A)$$

と規格化する．光錐ガンマ行列を

$$\Gamma^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma^0 \pm \Gamma^{D-1})$$

と定義する．10 次元または 4 次元の場合に制限するときは，単に記号 γ^μ を使うこともよくある．

光錐形式で SO(8) へ分解するときは，次の 2×2 パウリ行列の直積を使う：

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^i_{a\dot{a}} \\ \gamma^i_{\dot{b}b} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^1 = -i\tau_2 \otimes \tau_2 \otimes \tau_2$$

$$\gamma^2 = i\mathbb{1} \otimes \tau_1 \otimes \tau_2$$

$$\gamma^3 = i\mathbb{1} \otimes \tau_3 \otimes \tau_2$$

$$\gamma^4 = i\tau_1 \otimes \tau_2 \otimes \mathbb{1}$$

$$\gamma^5 = i\tau_3 \otimes \tau_2 \otimes \mathbb{1}$$

$$\gamma^6 = i\tau_2 \otimes \mathbb{1} \otimes \tau_1$$

$$\gamma^7 = i\tau_2 \otimes \mathbb{1} \otimes \tau_3$$

$$\gamma^8 = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$$

$$\gamma^{ij}_{ab} = \frac{1}{2}(\gamma^i_{a\dot{a}}\gamma^j_{\dot{a}b} - \gamma^j_{a\dot{a}}\gamma^i_{\dot{a}b}) .$$

ここで τ_i はパウリ行列で，各 γ 行列は 3 つの 2×2 のかたまりの直積である．

参考文献

群論への入門については，たとえば次を見よ．

[1] R. Gilmore, *Lie Group, Lie Algebra and Some of Their Representations*, Wiley-lnterscience, New York, 1974.

[2] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Dover, New York, 1962.

[3] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, Benjamin/Cummings, Reading, MA, 1982.

[4] R. N. Cahn, *Semi-Simple Lie Algebras and Their Representations*, Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1984.

一般相対論への入門は，次を見よ．

[5] C . W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.

[6] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York, 1972.

[7] S. W. Hawking and G. F. R. Eills, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.

[8] R. Adler, M. Basin, and M. Schiffer, *Introduction to General Relativity*, McGraw-Hill, New York, 1965.

[9] M. Carmeil, *Group Theory and General Relativity*, McGraw-Hill, New York, 1977.

微分形式の理論への入門は，次を見よ．

[10] T. Eguchi, P. B. Gilkey, and A. J. Hanson, *Phys. Rep.* **66**, 213 (1980).

[11] C. Nash and S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*, Academic Press, New York, 1983.

[12] C. von Westenholtz, *Differential Forms in Mathematical Physics*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[13] P. B. Gilkey, *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah-Singer Index Theorem*, Publish or Perish, Wilmington, DE.

[14] S. I. Goldberg, *Curvature and Homology*, Dover, New York, 1962.

超対称性と超重力への入門は，次を見よ．

[15] P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rep.* **68C**, 189 (1981).

[16] S. J. Gates, M. Grisaru, M. Rocek, and W. Siegel, *Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry*, Benjamin/Cummings, Reading, MA, 1983.

[17] M. Jacob, ed., *Supersymmetry and Supergravity*, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[18] P. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, World Scientific, Singapore, 1986.

[19] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1983.

[20] R. N. Mohapatra, *Unification and Supersymmerty*, Springer-Verlag, New York, 1986.

索引

■ A
A_n 523
Atiyah-Singer の指数定理 316
a サイクル 196, 225
$\hat{A}$ 多項式 329
$\hat{A}$ 不変多項式 346

■ B
Betti 数 387, 389, 390, 392, 403
B_n 523
BPS 状態 430, 443, 453, 474, 481, 507
BPS の関係 431
BRST
——チャージ 151
——のアプローチ 31
——場の理論 273, 278
——量子化 27, 40, 66, 113
b サイクル 196, 197, 225

■ C
Calabi-Yau 空間 379
Chan-Paton 因子 316, 344, 345
Chern-Simons 形式 326, 345, 530
Chern-Simons 項 309
Chern 指標 327
Chern 類 345, 397
Clifford 群 220
Clifford 代数 262, 516
C_n 523
coclosed 388
coexact 389
Coleman-Mandula の定理 533
CSV 頂点 292–294

■ D
DDF 演算子 89
Dedekind のエータ関数 210
Dehn トゥイスト 188, 201, 215, 216, 416
Dynkin 図 522
D ブレイン 430, 473, 481, 487, 490, 507

■ E
E_6 524
E_7 524
E_8 524
Euler 類 327, 328, 346

■ F
F_1 形式 105–107, 154
F_2 形式 106, 107, 154
F_4 524
Faddeev-Popov
——行列式 226
——ゴースト 27, 114, 140, 234, 278
F 理論 470, 479

■ G
G_2 524
Green-Schwarz の作用 119
Green-Schwarz 模型 98
GSO 射影 115, 210, 211
GUTs 4
G パリティ 117

■ H
Hirzebruch 類 329
Hodge
——de Rahm の定理 216
——の作用素 388

■ I
IIA 型の超弦 122, 124, 543
IIB 型の超弦 122, 125, 543
I 型の超弦 122, 125

■ J
Jacobi のテータ関数 175, 178

■ K
Kac-Moody 代数 4, 146, 161, 370
Kac 行列式 277
Kähler 多様体 393
KP 階層 221, 222
Kunneth 公式 390
Kähler 383, 422
——形式 396

■ M
M 理論 15, 429, 439, 455, 482, 507

■ N
Narain 格子 435, 476
Neveu-Schwarz 境界条件 100, 362
NS-R 理論 99

■ O
$\mathrm{O}(n)$ 514
$\mathrm{Osp}(N/4)$ 10

Osp(N/M) *533*

■ P
Pfaffian *328, 346*
Pontrjagin 類 *328, 346*

■ R
Ramond 境界条件 *100, 362*
Ricci 平坦 *381, 383, 399, 422*

■ S
S, T, U デュアリティー *430*
Selberg のゼータ関数 *213, 227*
Siegel 上半面 *217*
simply laced *358, 373*
simply laced 格子 *358*
SL(2, ℝ) 不変な真空 *141, 147*
SL(n) *521*
Sp($2n$) *518*
Stiefel-Whitney 類 *327, 329, 346*
SU(n) *517*
SU(N, M) *518*
Szegö 核 *222, 228*
S デュアリティー *436, 447, 471, 472*

■ T
Todd 類 *329*
Torelli 群 *216*
trisecant 加法定理 *222*
T デュアリティー *434, 435, 447, 462, 472, 473, 488*

■ U
U デュアリティー *447, 462, 472*

■ V
Verma モジュール *141, 147, 276*
Virasoro 生成子 *55, 79, 86, 88, 137, 297*
Virasoro 代数 *54, 55, 90, 139*

■ W
Wess-Zumino 無矛盾性の条件 *324, 326, 339, 342*
Wess-Zumino 模型 *538*
Wilson ライン *406, 414, 423*

■あ行
アノーマリー *16, 115, 145, 152, 315*

一般相対性理論 *4*
因子化 *316, 317*

ウェイト *136, 149*

エネルギー運動量テンソル *39, 137, 140, 150*
エントロピー *501, 509*

オイラー数 *322, 387, 390–392, 403*
オイラーのベータ関数 *75, 169*
オービフォールド *407, 424*

■か行
解析的アノーマリー *219, 227*
概複素 *383, 394*
カイラルアノーマリー *319, 345*
カイラル超場 *537*
ガウス-ボネ恒等式 *322*
ガウス-ボネ定理 *153*
核 *203, 330*
カルタン
　——行列 *522*
　——部分代数 *521*
　——ワイル表示 *376, 521*
カルーツァ-クライン理論 *352, 406*
カレント *37, 38, 99*
完全 *326, 384, 529*

幾何学的原理 *6*
擬周期的 *190*
偽状態 *62, 85*
軌跡の傾き *52*
軌跡の切片 *52*
基本的表現 *161*
基本表現 *518*
基本領域 *188, 189, 208*
逆描像変換演算子 *303*
境界 *385–387*
共形
　——アノーマリー *56, 205, 206, 319*
　——ウェイト *79, 85, 104, 135*
　——キリングベクトル *153, 203*
　——ゲージ *57, 69, 84, 92, 93*
　——対称性 *99*
　——場の理論 *133, 301*
　——不変 *69*
　——変換 *79*
鏡像法 *70*
共役類 *191*
行列模型 *430, 494, 507*
局所的アノーマリー *319*

偶格子 *357, 358*
グプタ-ブロイラー形式 *28*
グプタ-ブロイラー量子化 *40, 56, 112*
グラスマニアン *214, 215, 223, 228*
グラスマン
　——積分 *537*
　——変数 *142*
グラスマン数 *29*
グラビトン *10, 60, 61, 83*
くりこみ理論 *9*
クーロン量子化 *26, 39*
群 *513*
　——のパラメーター *514*

形式 *216, 283, 291, 384, 528*
経路積分 *6, 17*
ゲージアノーマリー *334, 346*
ゲージ対称性 *3*

交差行列 *215*
光錐ゲージ *64, 65*
光錐頂点 *294*
光錐量子化 *27, 63, 112*
構造定数 *515*
交代群 *513*
コサイクル *371*
ゴースト *62, 63, 84, 85*
　一般的な—— *150*
　——数 *282, 297*
　——数カレント *151, 152*
　——の作用 *149*

木庭(Koba)-Nielsen 変数 *256, 258*
コヒーレント状態 *177, 185*
——の形式 *77*
コホモロジー *291, 387*
de Rahm—— *384*
Dolbeaut—— *395*
コンパクト化 *349*

■さ行
サイクル *386*
最高ウェイトベクトル *141*
最小の理論 *8*
作用
——の 1 次(ハミルトニアン)形 *26, 55*
——の 2 次形 *26, 55*
——の Polyakov 形 *54*
——の非線形の形 *26, 55*
作用原理 *18, 19*
3 角形分割 *223*
散在型群 *513*

次元 *514*
自己共役 *101*
自己双対 *120, 338, 368*
——格子 *349, 357, 358*
次数つきリー群 *533*
実状態 *62, 85*
質量殻条件 *15, 24, 32, 78*
射影変換 *71, 72, 191, 192*
斜航的 *192*
写像類群 *201, 202, 216*
周期 *197*
周期行列 *197, 198, 216, 217, 387*
重力アノーマリー *334, 346*
種数 *197, 217, 220, 223, 322*
乗数 *191*
ショットキー群 *190, 191, 194, 226*
ショットキー問題 *220, 222, 223, 228*
シンプレクティック *217*

随伴 *388, 395*
随伴表現 *515*
菅原形 *163*
スピノール表現 *516*
スピン構造 *102, 209, 217, 227, 417*
スピン接続 *527, 528*
スピン多様体 *329*

正規順序 *35, 61*
正準ホモロジー基底 *215*
生成子 *514, 515*
正則 *214, 394*
——因子化 *214, 219*
——因子化の定理 *227*
正のルート *522*
世界面 *49*
セカンダリー *135*
世代数 *400, 403, 405, 423*
接空間 *527*
接続場 *540*
全 Chern 形式 *327*
前幾何学的アプローチ *304*

双曲的 *191*
双対 *388*
——格子 *357, 369*
——性 *76*
双対性 *67*
相対論的点粒子 *23*

■た行
第 1 Chern 類 *383, 397, 422*
第 1 量子化 *26, 32, 233*
第 2 量子化 *26, 31, 233*
第 p de Rahm コホモロジー群 *385*
第 p ホモロジー群 *387*
大域的アノーマリー *319*
大域的な微分同相写像 *188*
大統一理論(GUTs) *8*
タイヒミュラー空間 *4, 199, 201*
タイヒミュラーパラメーター *173, 192, 202, 226*
楕円的 *192*
タキオン *58, 60, 67, 72–74, 105, 117, 130*
多重局所的 *234, 246*
タドポール *225*
単純ルート *522*
単体 *385*

中心項 *61, 163*
超 Virasoro 生成子 *114*
超エネルギー運動量テンソル *144*
超共形
——群 *143*
——ゴースト *149*
——代数 *103, 143*
——場の理論 *142*
——変換 *143–145*
超群 *533*
超弦理論 *4*
超重力理論 *539*
超対称 *95*
——性 *110*
——性演算子 *164*
——点粒子 *95*
頂点演算子 *370*
超場 *535*
超モジュライ *153, 211*
超リーマン-ロッホの定理 *223*
張力のない弦 *468*
調和 *388*
直交群 *514*

ツバイバイン *110*

ディラック指数 *329, 403*
ディラトン *169, 181*
テータ関数 *190*
デュアリティー *429*
テンソル *515, 525*

トゥイスト *80, 170, 224, 318*
統一場の理論 *3*
特性類 *316, 325, 345, 403*

■な行
南部-後藤の弦 *47*

2 形式 *529*
2 コサイクル条件 *371*
2 次微分 *203*

ねじれ率 *526*
——形式 *396*

ノイマン関数 *171, 224, 251*
ノイマン係数 *253, 254*

■は行
発散 *225*
場の量子論 *3*
パラメーターつけかえ

112
——不変　*57, 89*
——不変性　*25, 51, 90*
パリティ　*343*
半径順序づけ　*138*
反自己双対　*120*
半微分　*222*

非対称オービフォールド　*420, 425*
微分形式　*325*
微分同相写像　*201*
非平面向きづけ可能な図　*170*
描像変換　*106, 154*
描像変換演算子　*298*
広田方程式　*221, 223*

フィアーバイン　*527*
フェルミオン頂点　*156*
吹きとばし　*409*
複素構造　*394*
複素多様体　*394*
物理的状態　*61, 84*
不動点　*191, 408*
不変多項式　*531*
普遍モジュライ空間　*214*
プライマリー　*135*
プライム形式　*221, 228*
ブラックホール　*430, 481, 500*
プリミティブ　*213*
不連続群　*513*
分配関数　*116, 117*

閉　*326, 384, 529*
平面図　*170*
べき零　*31, 41, 279, 386*
ベクトル　*515*
——超場　*536*
ベータ関数　*75*

ヘテロティック弦　*349, 353*
$E_8 \otimes E_8$——　*15*
——の作用　*363*

ポアンカレ双対性　*390, 396*
放物的　*191*
包絡環　*141*
保型関数　*173, 196*
ボーズ
——海　*164*
——海の真空　*157*
——真空　*153*
ボソン化　*135, 154, 155, 287*
ホモロジー　*385, 387*
ホロノミー
$SU(3)$——　*382, 400, 422*
$U(N)$——　*397*
——群　*381, 422, 528*

■ま行
マヨラナ　*121*
マヨラナスピノール　*262, 335*
マヨラナ-ワイル　*121*
マヨラナ-ワイルスピノール　*120, 126, 262, 335*

密度　*527*

向きづけ不可能な図　*171*

メビウス不変　*78*
メビウス不変性　*79*
メンブレイン　*429, 460, 494, 499*

モジュラー
——群　*4, 187, 188, 202*
——不変性　*188, 209, 214, 225, 357, 358, 411, 413, 415, 420*
——変換　*187, 369*
モジュライ　*153*
——空間　*190, 201, 214*
モンスター群論　*4*

■や行
ヤコビ恒等式　*53, 515*

有理型　*222*

■ら行
ラプラシアン　*388, 395*
ランク　*521, 525*

リー群　*513*
リーマン面　*4, 153, 189, 199, 216, 397*
リーマン-ロッホの定理　*153*
量子重力理論　*3*

ルート格子　*358*
ルートベクトル　*521*

例外群　*514*
レッジェ軌跡　*52, 59*
レッジェスロープ　*184*
レベル　*163*
連続群　*513*

ローレンツ的格子　*372*

■わ行
ワイル
——スピノール　*335*
——不変　*57*
——変換　*54, 111, 112*
——リスケーリング　*206*

著　者

ミチオ・カク
Michio Kaku
Department of Physics
City College of the City University of New York
New York, NY 10031, USA

訳　者

太田　信義（おおた　のぶよし）
近畿大学理工学部理学科教授
東京大学大学院理学系研究科博士課程修了，理学博士
専門分野：素粒子論，重力理論，超弦理論
著書：『一般物理学』（丸善パリティ物理学コース，1992 年）
『超弦理論・ブレイン・M 理論』（シュプリンガー現代理論物理学シリーズ，2002 年）
『超対称性理論』（サイエンス社 SGC ライブラリ，2006 年）

超弦理論と M 理論　　**定価（本体 6,800 円+税）**

発　行　2000 年　9 月 13 日　初　　版
　　　　2007 年　2 月 28 日　初版 6 刷
著　者　ミチオ・カク
訳　者　太田　信義
発行者　深田　良治
発行所　シュプリンガー・ジャパン株式会社
　　　　〒102-0073　東京都千代田区九段北 1 丁目 11 番 11 号　第 2 フナトビル
　　　　TEL（03）6831-7005（営業直通）
印刷所　日経印刷株式会社

ISBN 978-4-431-70867-4 C3042　　http://www.springer.jp